

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

МЕХАНИКО–МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

На правах рукописи
УДК 517.982.256



Дружинин Юрий Юрьевич

**СВОЙСТВА ОПЕРАТОРОВ МЕТРИЧЕСКОГО ПРОЕКТИРОВАНИЯ
И ВЫБОРОК ИЗ ЧЕБЫШЕВСКИХ ЦЕНТРОВ
В БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ**

Специальность 01.01.01 — вещественный, комплексный и
функциональный анализ

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва 2013

Работа выполнена на кафедре теории функций и функционального анализа механико-математического факультета Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова.

Научный руководитель: доктор физико-математических наук,
доцент Бородин Петр Анатольевич

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук,
профессор Царьков Игорь Германович
(профессор каф. математического анализа
МГУ имени М.В. Ломоносова)

доктор физико-математических наук
Лившиц Евгений Давидович
(руководитель исследовательской
группы «ООО Эверноут»)

Ведущая организация: Московский физико-технический институт

Защита диссертации состоится 15 ноября 2013 г. в 16 часов 45 минут на заседании диссертационного совета Д 501.001.85 при МГУ имени М.В. Ломоносова по адресу: 119991, Российская Федерация, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, механико-математический факультет, аудитория 16-24.

С диссертацией можно ознакомиться в Фундаментальной библиотеке МГУ имени М.В. Ломоносова (Ломоносовский пр-т, 27, сектор А, 8-й этаж).

Автореферат разослан 15 октября 2013 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета
Д 501.001.85 при МГУ,
доктор физ.-матем. наук,

профессор



В.Н. Сорокин

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Диссертация посвящена вопросам теории приближений в нормированных пространствах, которые связаны с понятиями оператора метрического проектирования и чебышевского центра множества. В ней исследуются условия существования липшицевой выборки из оператора T_C , сопоставляющего ограниченному множеству множество его чебышевских центров, исследуются условия линейности и липшицевости оператора метрического проектирования на подпространство.

Актуальность темы. Геометрическая теория приближений берет свое начало в классической работе П.Л.Чебышева (1859), в которой, в частности, доказана чебышевность множества P_n алгебраических многочленов степени не выше n и множества R_{mn} рациональных функций со степенью числителя не выше m и степенью знаменателя не выше n в пространстве $C[a, b]$ действительных функций, непрерывных на отрезке $[a, b]$. В этой же работе П.Л.Чебышев описал оператор метрического проектирования на множества P_n и R_{mn} (теорема об альтернансе). В дальнейшем геометрические вопросы теории приближений в пространстве C изучались А.Хааром (1918), А.Н.Колмогоровым (1948), Е.Я.Ремезом (1953). Окончательное становление геометрической теории приближений как самостоятельной ветви теории приближений произошло в 60-е годы прошлого века благодаря работам, в первую очередь, В. Кли, Н.В. Ефимова и С.Б. Стечкина, а затем В.И. Бердышева, Л.П. Власова, А.Л. Гаркави, Е.В. Ошмана, С.Я. Хавинсона, Е. Асплунда, А. Брауна, А. Брендстеда, Д. Вульберта, Ф. Дойча, И. Зингера, Б. Крипке, Дж. Линденштраусса, П. Морриса, Т. Ривлина, У. Рудина, Р. Фелпса, Р. Холмса, Э. Чини, М. Эдельштейна и др. В дальнейшем исследования по геометрической теории приближений в нашей стране проводились в основном представителями научной школы С.Б. Стечкина: А.Р. Алимовым, П.В. Альбрехтом, В.И. Андреевым, В.С. Балаганским, А.А. Васильевой, В.И. Ивановым, М.И. Карловым, С.В. Конагиным, В.А. Кощеевым, Е.Д. Лившицем, А.В. Мариновым, К.С. Рютиным, Г.Ф. Устиновым, И.Г. Царьковым и др., а также М.В. Балашовым, П.А. Бородиным, С.И. Дудовым, Г.Е. Ивановым, Е.М. Семеновым, В.П. Фонфом и многими другими математиками.

В современном понимании геометрическая теория приближений изучает взаимосвязи между различными аппроксимативными свойствами множеств (чебышевность, единственность, существование, аппроксимативная компактность, солнечность, антипроксиминальность и т.д.) с их тополого-геометрическими свойствами (линейность, выпуклость, разного рода связ-

ность, гладкость и т.д.) при различных условиях (строгая выпуклость, равномерная выпуклость, гладкость и т.д.) на нормированное пространство.

Чебышевские центры множеств (названные так и впервые глубоко исследованные А.Л.Гаркави в 1961 году) широко используются в геометрической теории приближений.

Пусть M — произвольное ограниченное множество нормированного пространства X . Чебышевским радиусом множества M называется величина

$$r_C(M, X) = r_C(M) := \inf\{\varepsilon > 0 : M \subset B_\varepsilon(x), x \in X\},$$

где $B_\varepsilon(x)$ — замкнутый шар радиуса ε с центром в точке x . Точка $x \in X$ называется чебышевским центром множества M , если $M \subset B_{r_C(M)}(x)$.

Понятие чебышевского центра является частным случаем понятия наилучшей N -сети, введенного А.Н. Колмогоровым в 1936г.

В связи с чебышевскими центрами естественно возникают задачи об их существовании, единственности, описании и наличии хороших однозначных выборов из оператора T_C , сопоставляющего множеству M из некоторого класса множество $T_C(M)$ его чебышевских центров.

Для произвольного ограниченного множества нормированного пространства чебышевский центр может и не существовать. Как показал А.Л. Гаркави (1962), существует такое банахово пространство и такие три точки в нем, что для этих точек чебышевский центр не существует. С.В. Конягин (1988) показал, что всякое нерефлексивное банахово пространство можно так эквивалентно перенормировать, что некоторое трехточечное множество не будет иметь чебышевского центра в новой норме.

Подпространство Z в банаховом пространстве X называется 1-дополняемым, если существует проектор $R : X \rightarrow Z$ нормы 1 на это подпространство.

Теорема А (А.Л. Гаркави¹, 1962). Если пространство X 1-дополняемо в X^{**} , то для каждого ограниченного множества $M \subset X$ в пространстве X существует чебышевский центр.

Условие теоремы А не является необходимым для существования чебышевского центра для каждого ограниченного множества. Например, пространство $\mathbf{c}_0$ (пространство числовых последовательностей, сходящихся к нулю) не удовлетворяет условию теоремы А. Тем не менее в пространстве $\mathbf{c}_0$ чебышевский центр существует для каждого ограниченного множества (А.Л. Гаркави, 1962).

¹А.Л. Гаркави, «О наилучшей сети и наилучшем сечении множества в нормированном пространстве», *Известия Академии наук СССР, серия математическая*, **26** (1962), 87–106.

А.Л. Гаркави (1962) показал, что каждое нормированное пространство X можно изоморфно и изометрично вложить в некоторое банахово пространство X_1 таким образом, что каждое ограниченное множество $M \subset X$ в пространстве X_1 имеет чебышевский центр, а чебышевский радиус равен

$$r_C(M, X_1) = \inf_{X \subset Z} r_C(M, Z),$$

где нижняя грань берется по всевозможным банаховым пространствам Z , содержащим пространство X .

Всякое ограниченное множество евклидова пространства обладает единственным чебышевским центром. Для ограниченного множества в произвольном пространстве чебышевский центр может быть не единственным, например, в пространстве l_∞^2 упорядоченных пар действительных чисел с нормой $\|(x, y)\| = \max\{|x|, |y|\}$ множеством чебышевских центров отрезка с концами в точках $(-1, 0)$ и $(1, 0)$ является отрезок с концами в точках $(0, 1)$ и $(0, -1)$.

Нормированное пространство X называется *равномерно выпуклым по каждому направлению*, если для любого $z \in X$ и для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что если $\|x_1\| = \|x_2\| = 1$, $x_1 - x_2 = \lambda z$ и $\|x_1 + x_2\| \geq 2 - \delta$, то $|\lambda| < \varepsilon$.

Нормированное пространство X называется *строго выпуклым*, если его единичная сфера $S(X)$ не содержит отрезков.

Теорема В. (А.Л. Гаркави¹, 1962) *Для того чтобы каждое ограниченное множество M пространства X имело не более одного чебышевского центра, необходимо и достаточно, чтобы пространство X было равномерно выпуклым по каждому направлению.*

А.Л. Гаркави (1961) установил, что для того чтобы каждое компактное множество M пространства X имело не более одного чебышевского центра, необходимо и достаточно, чтобы пространство X было строго выпуклым.

Примером строго выпуклого, но не равномерно выпуклого по всем направлениям пространства служит пространство непрерывных функций на отрезке $[0, 1]$ с нормой $\|f\| := \|f\|_{C[0,1]} + \|f\|_{L_2[0,1]}$.

Нормированное пространство X называется *равномерно выпуклым*, если для каждого элемента для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что если $\|x_1\| = \|x_2\| = 1$ и $\|x_1 + x_2\| \geq 2 - \delta$, то $|x_1 - x_2| < \varepsilon$.

Из теорем А и В следует, что для всякого ограниченного множества M равномерно выпуклого пространства существует единственный чебышевский центр.

В.Н. Замятин и М.И. Кадец (1968) установили, что в пространстве $C(K)$ действительнзначных непрерывных функций на хаусдорфовом компакте K всякое ограниченное множество M обладает чебышевским центром и описали множество $T_C(M)$.

Для пространства $C(T, E)$ ограниченных непрерывных функций, определенных на топологическом пространстве T , со значениями в нормированном пространстве E , верны следующие утверждения.

Всякое ограниченное множество пространства $C(T, E)$ имеет чебышевский центр, если либо E конечномерное строго выпуклое пространство и T паракомпакт, либо E гильбертово, а T нормальное (J.D. Ward, 1974);

Всякое ограниченное множество пространства $C(T, E)$ имеет чебышевский центр, если E равномерно выпуклое пространство (D. Amir, 1978).

Хаусдорфовым расстоянием между ограниченными множествами M и N нормированного пространства X называется величина

$$d_H(M, N) = d_H(M, N; X) = \max\{\varepsilon > 0 : N \subset M_\varepsilon \text{ и } M \subset N_\varepsilon\}$$

где $M_\varepsilon, N_\varepsilon$ — ε -раздутия множеств M и N .

Хаусдорфово расстояние является метрикой в пространстве ограниченных множеств из X . Установлены следующие свойства оператора T_C как оператора на этом пространстве.

Если X равномерно выпуклое нормированное пространство, то оператор T_C непрерывен (П.К. Белобров, 1966);

Банахово пространство X равномерно выпукло тогда и только тогда, когда всякое ограниченное множество имеет ровно один чебышевский центр и оператор T_C равномерно непрерывен (D. Amir, 1978);

Пусть $X = C(T, E)$, E — равномерно выпуклое пространство, тогда оператор T_C равномерно непрерывный (D. Amir, 1978).

Будем говорить, что оператор T_C обладает липшицевой выборкой, если найдется такой оператор T , сопоставляющий каждому ограниченному множеству некоторый (один) его чебышевский центр, что для некоторого $\theta > 0$ и любых ограниченных множеств M и N выполнено неравенство

$$\|T(M) - T(N)\| \leq \theta \cdot d_H(M, N).$$

В евклидовом пространстве размерности не меньше 2, а значит, и в гильбертовом пространстве, липшицевой выборки из оператора T_C не существует даже на классе выпуклых замкнутых ограниченных множеств, как показывает следующая

Теорема С. (Е.С. Половинкин, М.В. Балашов², 2004). Пусть X — евклидово пространство размерности не меньше 2. Тогда

1) для любых двух выпуклых замкнутых множеств $M, N \subset B_R(0)$ выполнено

$$\|T_C(M) - T_C(N)\| \leq 2\sqrt{3Rd_H(M, N)} + d_H(M, N);$$

2) для любого $R > 0$ и для любого $\varepsilon \in (0; R)$ найдутся такие выпуклые замкнутые множества $M_0, N_0 \subset B_R(0)$, что

$$\varepsilon = \|T_C(M_0) - T_C(N_0)\| \geq \sqrt{2Rd_H(M_0, N_0)}.$$

Примером пространства, в котором липшицева выборка из оператора T_C существует, является пространство l_∞^2 : каждому ограниченному множеству M поставим в соответствие точку

$$T(M) := \frac{1}{2} (\sup M_1 + \inf M_1, \sup M_2 + \inf M_2),$$

где $M_1 := \{x \in \mathbb{R} : \exists y \in \mathbb{R} : (x, y) \in M\}$, $M_2 := \{y \in \mathbb{R} : \exists x \in \mathbb{R} : (x, y) \in M\}$. Тогда $T(M) \in T_C(M)$, и для произвольных ограниченных множеств M, N имеем $\|T(M) - T(N)\|_{l_\infty^2} \leq d_H(M, N)$.

В.Н. Замятин и М.И. Кадец (1968) установили, что в пространстве действительнзначных непрерывных функций $C[a, b]$ для всякого ограниченного множества $M \subset C[a, b]$ существует чебышевский центр и для любых ограниченных множеств M и N выполнено неравенство $d_H(T_C(M), T_C(N)) \leq 2d_H(M, N)$. Вопрос о существовании липшицевой выборки из оператора T_C в пространстве $C[a, b]$ до сих пор не решен.

В главе I настоящей работы выделен большой класс банаховых пространств, для которых не существует липшицевой выборки из оператора T_C , найден критерий существования липшицевой выборки для конечномерных пространств, доказано существование липшицевой выборки для пространств $\mathbf{c}_0(E)$ и пространств типа $\mathbf{c}$.

Другим важнейшим понятием геометрической теории приближений является понятие оператора метрического проектирования.

Пусть X — нормированное пространство, M — непустое подмножество X , $\rho(x, M) := \inf\{\|x - y\| : y \in M\}$ — расстояние от элемента $x \in X$ до M . Множество $P_M(x) = \{y \in M : \|x - y\| = \rho(x, M)\}$ ближайших к

²Е.С. Половинкин, М.В. Балашов, «Элементы выпуклого и сильно выпуклого анализа», Физматлит, М., 2004.

x элементов из M называется *метрической проекцией* элемента x на M . Множество M называется *множеством существования*, если для любого $x \in X$ множество $P_M(x)$ содержит хотя бы один элемент, и *множеством единственности*, если для любого $x \in X$ множество $P_M(x)$ состоит из не более чем одного элемента. Если M является одновременно и множеством существования и множеством единственности, то есть для любого $x \in X$ в M существует ровно один элемент наилучшего приближения $P_M(x)$, то M называется *чебышевским* множеством. Оператор $P_M : x \rightarrow P_M(x)$ ($x \in X$) называется *оператором метрического проектирования*.

В диссертации речь идет в основном об операторе P_Y метрического проектирования на линейные чебышевские подпространства Y банахова пространства X .

Оператор метрического проектирования P_Y бывает разрывным, бывает непрерывным, но не липшицевым (например, для подпространства $Y = P_n$ многочленов степени не выше $n \geq 2$ в $C[0, 1]$), и совсем редко бывает линейным, как показывает

Теорема D (W. Rudin, K.T. Smith, ³; I. Singer ⁴) Пусть X — действительное банахово пространство размерности $\dim X \geq 3$, и натуральные числа n, k удовлетворяют условиям $1 \leq n < \dim X - 1$, $2 \leq k < \dim X$. Следующие условия эквивалентны:

1) X — гильбертово пространство; 2) всякое подпространство $Y \subset X$ размерности n обладает однозначной линейной метрической проекцией; 3) всякое подпространство $Y \subset X$ коразмерности k обладает однозначной линейной метрической проекцией.

Для пространства $L_1[0, 1]$ установлена следующая

Теорема Е. (D. Morris⁵, 1980). Подпространство Y пространства $L_1[0, 1]$ является чебышевским с линейным оператором метрического проектирования тогда и только тогда, когда существует разбиение отрезка $[0, 1]$ на два непересекающихся измеримых множества M_1 и M_2 и существует линейный оператор $A : L_1(M_1) \rightarrow L_1(M_2)$, строго уменьшающий норму каждого ненулевого элемента ($\|Ay\| < \|y\|$ при $y \neq 0$), такие, что

$$Y = \{y \in L_1[0, 1] : y|_{M_2} = Ay|_{M_1}\},$$

³W. Rudin, K.T. Smith, «Linearity of best approximation: a characterization of ellipsoids», *Indagationes Mathematicae*, **23**:1 (1961), 97–103.

⁴I. Singer, «Best Approximation in Normed Linear Spaces by Elements of Linear Subspaces», *Acad. SRR, Bucharest; Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York*, 1970.

⁵D. Morris, «Chebyshev subspaces of L_1 with linear metric projection», *J. Approx. Theory*, **29** (1980), 231–234.

где $y|_N$ — сужение функции y на множество $N \subset M$.

П.А. Бородин (1998) обобщил эту теорему на случай произвольного пространства $L_1(M, \Sigma, \mu)$, где (M, Σ, μ) — σ -конечное измеримое пространство.

Существуют типы подпространств Y , для которых оператор P_Y метрического проектирования линеен в любом пространстве X . Этими подпространствами являются тривиальные подпространства $\{0\}$, X и чебышевские подпространства коразмерности 1. Существуют пространства, в которых оператор метрического проектирования линеен только для этих трех видов подпространств, например, таким пространством является $C(K)$, как было установлено П.А. Бородиным (1998).

В гильбертовых пространствах P_Y линеен для любых подпространств Y , поскольку совпадает с оператором ортогонального проектирования на Y . В пространстве $L_p(M) = L_p(M, \Sigma, \mu)$ при $p > 1$ и $p \neq 2$ все подпространства Y чебышевские (пространство $L_p(M)$ гладкое и строго выпуклое), однако, P_Y бывает и нелинейным, и нелипшицевым.

В главе II настоящей работы найден критерий линейности оператора метрического проектирования на подпространства $L_p(M, \Sigma, \mu)$, $p > 1, p \neq 2$, конечной размерности и конечной коразмерности (отметим, что аналогичный результат был получен Pee-kee Lin (1985) для случая конечной меры μ). Построены примеры подпространств в $L_p[0, 1]$ с бесконечной размерностью и коразмерностью, для которых операторы метрического проектирования как линейны, так и нелинейны.

F. Deutsch, W. Li, S. Park (1989) получили, что для подпространства существования Y банахова пространства X оператор P_Y липшицев тогда и только тогда, когда P_Y равномерно непрерывен. А.К. Cline (1973) доказал, что если K — бесконечный компакт, Y — подпространство $C(K)$ с $2 < \dim Y < \infty$, то оператор метрического проектирования P_Y не является липшицевым.

П.А. Бородин (2009) доказал, что если банахово пространство X не изоморфно гильбертову пространству, то в X есть либо нечебышевское подпространство Y , либо чебышевское подпространство Y с нелипшицевым оператором метрического проектирования.

П.В. Альбрехт (1994) построил пример одномерного подпространства Y в $L_p(M, \Sigma, \mu)$, $p > 1, p \neq 2$, для которого оператор P_Y нелипшицев.

В главе II настоящей работы доказано, что в пространстве $L_p(M, \Sigma, \mu)$, $p > 1, p \neq 2$, оператор P_Y нелипшицев для всякого такого одномерного подпространства $Y = \langle y \rangle$, что $\text{supp } y$ содержит безатомную часть положительной меры.

Цель работы: отыскание классов банаховых пространств, для которых существует липшицева выборка из чебышевских центров; описание подпространств конечной размерности и конечной коразмерности с линейным оператором метрического проектирования в пространстве $L_p(M, \Sigma, \mu)$, $p > 1$, $p \neq 2$; описание конечномерных подпространств $Y \subset L_p(M, \Sigma, \mu)$, $p > 1$, $p \neq 2$, для которых оператор P_Y липшицев.

Научная новизна работы. Все результаты работы являются новыми. В диссертации получены следующие основные результаты.

1. Выделен большой класс банаховых пространств, для которых не существует липшицевой выборки из чебышевских центров.
2. Описаны конечномерные банаховы пространства, для которых существует липшицева выборка из чебышевских центров.
3. Явно построены липшицевы выборки из чебышевских центров в пространстве $\mathbf{c}_0$ и пространствах типа $\mathbf{c}$.
4. Описаны подпространства конечной размерности и конечной коразмерности с линейным оператором метрического проектирования в пространстве L_p , $p > 1$, $p \neq 2$.
5. Доказана нелипшицевость оператора метрического проектирования на одномерное подпространство $Y = \langle y \rangle$ с $\text{supp } y$, содержащим безатомную часть, в пространстве L_p , $p > 1$, $p \neq 2$.

Методы исследования. В работе используются различные методы теории функций действительного переменного, функционального анализа, линейной алгебры, выпуклой геометрии.

Теоретическая и практическая ценность. Работа носит теоретический характер. Результаты диссертации могут найти применение в теории функций, функциональном анализе и геометрии.

Апробация работы. Автор выступал с докладами по теме диссертации на следующих научных семинарах:

- семинар по теории приближений и граничным свойствам функций в МГУ под руководством профессора Е.П. Долженко (2009)
- семинар по теории приближений в МГУ под руководством профессора И.Г. Царькова (2011)
- семинар по теории ортогональных рядов в МГУ под руководством академика РАН Б.С. Кашина и чл.-корр. РАН С.В. Конягина (2012)

- научный семинар кафедры высшей математики Московского физико-технического института (государственного университета) под руководством профессора Е.С. Половинкина (2011, 2013)
- семинар по геометрической теории приближений в МГУ под руководством доцента П.А. Бородина (2010-2012)

Содержащиеся в диссертации результаты докладывались автором на следующих конференциях:

- Международная конференция «Теория приближений», посвященная 90-летию со дня рождения С. Б. Стечкина (2010)
- школа С.Б. Стечкина по теории функций в г.Миасс (2011, 2013)
- XI Казанская летняя школа-конференция «Теория функций, ее приложения и смежные вопросы» (2013)

Публикации. Результаты диссертации опубликованы в 4 работах автора (две из перечня ВАК), список которых приведен в конце автореферата.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, двух глав и списка литературы из 41 наименования. Общий объем диссертации — 70 страниц.

СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

В **главе I** исследуется вопрос существования липшицевой выборки из оператора T_C , сопоставляющего каждому ограниченному множеству некоторого банахова пространства X множество его чебышевских центров.

Гиперплоскость L называется *опорной гиперплоскостью* к сфере $S(X)$ в точке $x_0 \in S(X)$, если $x_0 \in L$ и L не пересекается с внутренностью единичного шара. Точка $x_0 \in S(X)$ называется *достижимой точкой*, если существует опорная гиперплоскость L к сфере $S(X)$ в x_0 , для которой выполнено $L \cap S(X) = \{x_0\}$. Точка $x_0 \in S(X)$ называется *точкой гладкости* сферы $S(X)$, если существует ровно одна опорная гиперплоскость к $S(X)$ в точке x_0 . Будем говорить, что банахово пространство *обладает достижимой точкой гладкости*, если сфера $S(X)$ имеет точку, являющуюся одновременно достижимой точкой и точкой гладкости.

Функционал $f \in X^*$ называется *опорным* к сфере $S(X)$ в точке $x_0 \in S(X)$, если гиперплоскость $\{x \in X : f(x) = f(x_0)\}$ является опорной к $S(X)$ в x_0 . Через $J(a) = J(a; X)$ обозначим множество опорных функционалов f к сфере $S(X)$ в точке $a \in S(X)$, для которых $f(a) = 1$. *Диаметром*

множества $M \subset X$ назовем величину $\text{diam } M := \sup\{\|x_1 - x_2\|_X : x_1, x_2 \in M\}$.

ТЕОРЕМА 1.1. *Пусть X — банахово пространство, точка $a \in S(X)$ является достижимой точкой $S(X)$, а Y — некоторое двумерное подпространство X , содержащее a . Тогда для любого $\delta > 0$ найдутся два ограниченных множества $M, N \subset X$, каждое из которых обладает ровно одним чебышевским центром и для которых выполнено неравенство*

$$\|T_C(M) - T_C(N)\| \geq \frac{1}{\text{diam } J(a; Y) + \delta} \cdot d_H(M, N).$$

ТЕОРЕМА 1.2. *Если банахово пространство X имеет достижимую точку гладкости, то не существует липшицевой выборки из оператора T_C .*

При доказательстве теоремы 1.1 используется идея конструкции Половинкина и Балашова из доказательства теоремы С.

В случае, когда X конечномерное, удалось установить критерий существования липшицевой выборки из T_C .

Будем говорить, что единичный шар $B(X)$ конечномерного банахова пространства X является *многогранным*, если существуют такие функционалы $f_1, \dots, f_s \in X^*$ единичной нормы, что

$$B(X) = \bigcap_{j=1}^s \{x \in X : |f_j(x)| \leq 1\}.$$

ТЕОРЕМА 1.3. *Пусть X — конечномерное банахово пространство. Оператор T_C обладает липшицевой выборкой тогда и только тогда, когда единичный шар пространства X является многогранным.*

В диссертации указана и разобрана ошибка в работе D. Amir и J. Mach (1984) (в утверждении о несуществовании липшицевой выборки из чебышевских центров для трехмерного пространства с многогранным шаром).

Пусть E — бесконечное множество. Пространством $\mathbf{c}_0(E)$ называется пространство функций $f: E \rightarrow \mathbb{R}$, обладающих двумя свойствами: (1) каждая функция $f \in \mathbf{c}_0(E)$ отлична от нуля на не более чем счетном подмножестве E , (2) для любой последовательности попарно различных точек $\{a_n\}_{n=1}^\infty \subset E$ выполнено $f(a_n) \rightarrow 0$. Нормой в пространстве $\mathbf{c}_0(E)$ является обыкновенная равномерная норма: $\|f\| = \|f\|_{\mathbf{c}_0(E)} := \max_{a \in E} |f(a)|$. Примером пространства $\mathbf{c}_0(E)$ служит пространство $\mathbf{c}_0$ последовательностей, сходящихся к 0.

ТЕОРЕМА 1.4. В пространстве $\mathbf{c}_0(E)$ оператор T_C обладает липшицевой выборкой.

ТЕОРЕМА 1.5. Пусть K — хаусдорфов компакт с конечным числом предельных точек. Тогда в пространстве $C(K)$ существует липшицева выборка из оператора T_C .

При доказательстве этих теорем липшицевы выборки строятся явно.

Установлена связь между существованием липшицевой выборки из оператора T_C и существованием липшицевой выборки из метрической проекции P_Y на подпространство констант Y в пространстве $C(K, Z)$ (пространстве непрерывных функций со значениями в банаховом пространстве Z) и получены следующие результаты:

ТЕОРЕМА 1.6. Пусть компакт K содержит хотя бы 4 точки, $Y \subset C(K, Z)$ — подпространство константных функций, а Z имеет достижимую точку гладкости. Тогда у оператора P_Y не существует липшицевой выборки.

ТЕОРЕМА 1.7. Пусть компакт K содержит хотя бы 4 точки, Z — конечномерное банахово пространство, Y — подпространство константных функций. Тогда у оператора P_Y существует липшицева выборка тогда и только тогда, когда единичный шар пространства Z — многогранный.

В главе II исследованы условия линейности и липшицевости оператора метрического проектирования на подпространства конечной размерности и конечной коразмерности в пространстве $L_p(M, \Sigma, \mu)$ при $p > 1$, $p \neq 2$.

ТЕОРЕМА 2.1. Пусть Y — подпространство в $L_p(M, \Sigma, \mu)$ ($p > 1$, $p \neq 2$) размерности n . Оператор P_Y линеен тогда и только тогда, когда в подпространстве Y найдется такой базис $f_1, \dots, f_n$, что носитель каждой функции f_i состоит из одного или двух атомов.

Аннулятором подпространства Y называется подпространство $Y^\perp = \{f \in X^* : f(y) = 0 \ \forall y \in Y\}$.

ТЕОРЕМА 2.2. Пусть Y — подпространство в $L_p(M, \Sigma, \mu)$ ($p > 1$, $p \neq 2$) коразмерности n . Оператор P_Y линеен тогда и только тогда, когда в подпространстве $Y^\perp \subset L_q$ ($\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$) найдется такой базис $g_1, \dots, g_n$, что $\mu(\text{supp } g_i \cap \text{supp } g_j) = 0$ для всех $i \neq j$.

Построены примеры подпространств пространства $L_p(M, \Sigma, \mu)$ с бесконечными размерностью и коразмерностью как с линейным, так и с нелинейным оператором метрического проектирования. Данные примеры пока-

зывают, что теорему Е невозможно перенести на пространства $L_p(M, \Sigma, \mu)$ с $p > 1$, $p \neq 2$.

Исследовалась липшицевость метрической проекции для одномерных подпространств.

ТЕОРЕМА 2.3. Пусть $Y = \langle y \rangle$ — такое одномерное подпространство $L_p(M, \Sigma, \mu)$, $p > 1$, $p \neq 2$, что $\text{supp } y$ имеет безатомную часть положительной меры. Тогда оператор P_Y не является липшицевым.

При доказательстве данной теоремы использовалось обобщение конструкции П.В. Альбрехта.

Автор глубоко благодарен своему научному руководителю Петру Анатольевичу Бородину за постановку задач, плодотворные обсуждения и постоянную поддержку, руководителям научных семинаров Сергею Владимировичу Конягину за указание на связь чебышевских центров с метрической проекцией на подпространство константных функций и Борису Сергеевичу Кашину за ценные замечания.

ПУБЛИКАЦИИ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

1. Ю.Ю. Дружинин, «О линейности оператора метрического проектирования на подпространства в пространствах L_p », *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем. Механ.*, **1** (2010), 30–36.
2. Ю.Ю. Дружинин, «О существовании липшицевой выборки из чебышевских центров», *Матем. сб.*, **204**:5 (2013), 25–44.
3. Ю.Ю. Дружинин, «О липшицевости оператора метрического проектирования на подпространство констант в $C[K, B]$ », *Международная конференция по теории приближений, посвященная 90-летию С.Б. Стечкина*, Тезисы докладов, 2010, 27–28.
4. Ю.Ю. Дружинин, «О липшицевости оператора метрического проектирования в L_p », *Труды математического центра им Н.И. Лобачевского, материалы международной Казанской летней научной школы-конференции (Казань, 22-28 августа 2013)*, **46** (2013), 180–181.