

Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова

Механико-математический факультет

На правах рукописи
УДК 517.55

Мамай Игорь Борисович

**Пространства модулей
модельных поверхностей
в комплексной геометрии
вещественных подмногообразий**

01.01.01 — вещественный, комплексный и функциональный анализ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Москва 2013

Работа выполнена на кафедре теории функций и функционального анализа механико-математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова.

- Научный руководитель:** доктор физико-математических наук,
профессор Белошапка Валерий Константинович
- Официальные оппоненты:** доктор физико-математических наук,
доцент Лобода Александр Васильевич,
Воронежский государственный
архитектурно-строительный университет,
профессор кафедры высшей математики
- доктор физико-математических наук,
профессор Кацыло Павел Иванович,
Финансовый университет,
профессор кафедры математики
- Ведущая организация:** Математический институт
имени В. А. Стеклова РАН

Защита диссертации состоится 15 ноября 2013 г. в 16 ч. 45 м. на заседании диссертационного совета Д 501.001.85 при Московском государственном университете имени М.В. Ломоносова по адресу: Российская Федерация, 119991, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д. 1, МГУ, механико-математический факультет, аудитория 16-24.

С диссертацией можно ознакомиться в Фундаментальной библиотеке Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова.

Автореферат разослан 14 октября 2013 г.

Учёный секретарь
диссертационного совета
Д 501.001.85 при МГУ,
доктор физико-математических наук,
профессор

В. Н. Сорокин

Общая характеристика работы

Актуальность темы

Диссертация посвящена решению некоторых задач CR-геометрии с использованием метода модельной поверхности.

Многие задачи комплексного анализа органично связаны с вещественными подмногообразиями комплексного пространства. Это справедливо по отношению к одномерному комплексному анализу, где вещественные кривые – это границы областей и контуры интегрирования. Но в еще большей мере это относится к многомерному комплексному анализу, где ситуация, с геометрической точки зрения, гораздо разнообразнее. Вещественные подмногообразия вещественной коразмерности один – это топологические границы областей. По отношению к биголоморфным отображениям не все точки топологической границы равноправны. Там содержатся особые подмногообразия, например, граница Шилова, которая может иметь более высокую коразмерность. Вещественные подмногообразия возникают также в связи с голоморфными действиями вещественных групп Ли, как орбиты таких действий. Область математики, которая лежит на стыке многомерного комплексного анализа, дифференциальной геометрии и теории групп и алгебр Ли, и которая изучает свойства вещественных многообразий, инвариантные по отношению к голоморфным заменам, называется "CR-геометрия".

Первая работа по CR-геометрии принадлежит А. Пуанкаре¹. В его работе изучались трехмерные вещественные гиперповерхности пространства $\mathbb{C}^2$ и была выявлена модельная роль трехмерной гиперсферы. В работе 1932 года Э. Картан², опираясь на работу Пуанкаре, построил полную голоморфную классификацию однородных вещественных гиперповерхностей пространства $\mathbb{C}^2$. В 1974 году вышла совместная работа известных математиков С. Черна и Ю. Мозера³. В этой работе изучались вещественные гиперповерхности комплексного пространства произвольной размерности. Эта статья состоит из двух частей. В первой части Ю. Мозер, развивая подход А. Пуанкаре, строит аналитическую теорию, а во второй части С. Черн, развивая подход Э. Картана и опираясь на результаты первой части, строит дифференциально-геометрическую теорию. Однако после публикации

¹Poincaré H., *Les fonctions analytiques de deux variables et la représentation conforme*, Rend. Circ. Mat. Palermo. 1907. P.185-220.

²Cartan E., *Sur la géométrie pseudoconforme des hypersurfaces de deux variables complexes*, Ann. Math. Pura Appl. (4). 1932. V. 5. №3. P.1231-1304.

³Chern S., Moser J., *Real hypersurfaces in complex manifolds*, Acta Math. 1974. 133. №3-4. P.219-271.

этой статьи оказалось, что дифференциально-геометрическая часть этой работы ранее была сделана Н. Танакой⁴.

Для вещественного подмногообразия комплексного пространства в качестве самой первой и грубой характеристики принято указывать два числа n и K , где n – это комплексная размерность комплексной касательной, а K – вещественная коразмерность. Для порождающих подмногообразий через эту пару выражаются как вещественная размерность самого многообразия $(2n + K)$, так и комплексная размерность объемлющего пространства $(n + K)$. Пара (n, K) называется CR-типом многообразия. А. Пуанкаре и Э. Картан работали с подмногообразиями CR-типа $(1, 1)$, С. Черн и Ю. Мозер – с подмногообразиями CR-типа $(n, 1)$, Н. Танака разобрал три случая $(n, 1)$, (n, n^2) и $(n, n^2 - 1)$.

Дифференциально-геометрический подход, идущий от Э. Картана (метод подвижного репера, геометрия G-структур), не позволил ни Н. Танаке, ни С. Черну разобраться с ситуацией произвольной коразмерности. С другой стороны, аналитический подход, идущий от А. Пуанкаре и Ю. Мозера, был успешно развит В. К. Белошапкой^{5,6}. В серии его работ был разработан метод (метод модельной поверхности^{7,8}), который дает подход, пригодный для любого CR-типа. Этот эффективный метод инициировал серию публикаций. Отметим работы А. Е. Туманова⁹, С. Н. Шевченко¹⁰, Н. Ф. Палинчак¹¹, В. Ежова и Г. Шмальца^{12,13} по квадратичным модельным по-

⁴Tanaka N., *On generalised graded Lie algebras and geometric structures*, Math. Soc. Japan. 1967. 19. №2 P.215-264.

⁵Белошапка В. К., *Конечномерность группы автоморфизмов вещественно аналитической поверхности*, Изв. АН СССР. Сер. матем. 1988. Т. 52. №2. С.437-442

⁶Белошапка В. К., *О голоморфных преобразованиях квадрики*, Матем. сб. 1991. Т. 182. №2. С.203-219.

⁷Белошапка В. К., *Универсальная модель вещественного подмногообразия*, Матем. заметки. 2004. Т.75. №4. С.507-522.

⁸Белошапка В. К., *Вещественные подмногообразия комплексного пространства: их полиномиальные модели, автоморфизмы и проблемы классификации*, Успехи математических наук 2002. Т.57. Вып.1(343). С.3-44.

⁹Туманов А. Е., *Конечномерность группы CR-автоморфизмов стандартного CR-многообразия и собственные голоморфные отображения областей Зигеля*, Изв. АН СССР. Сер. матем. 1988. Т. 52. №3. С.651-659.

¹⁰Шевченко С. Н., *Квадрики коразмерности два и их автоморфизмы*, Изв. РАН. Сер. матем. 1994. Т. 58. №4. С.149-172.

¹¹Палинчак Н. Ф., *Вещественные квадрики коразмерности три в $\mathbb{C}^6$ и их нелинейные автоморфизмы*, Изв. РАН. Сер. матем. 1995. Т. 59. №3. С.159-179.

¹²Ezov V., Schmalz G., *Poincaré automorphisms for nondegenerate CR quadrics*, Math. Ann. 1994. V. 298. №1. P.79-87.

¹³Ezov V., Schmalz G., *A matrix Poincaré formula for holomorphic automorphisms of quadrics of higher codimension. Real associative quadrics*, J. Geom. Anal. 1997. V. 8. №1. P.27-41.

верхностям. А также работы Е. Н. Шананиной^{14,15}, И. Г. Коссовского^{16,17}, Ж. Меркера, М. Сабзевари, А. Хасхеми, Б. М.-Ализаде¹⁸ по модельным поверхностям высоких степеней.

Пусть M – гладкое подмногообразие CR-типа (n, K) , которое является порождающим в точке ξ . После подходящей линейной замены координат уравнение ростка M_ξ CR-типа (n, K) можно записать в следующем виде:

$$\operatorname{Im} \mathbf{w} = \Phi(z, \bar{z}, \mathbf{u}), \quad (1)$$

где $\mathbf{u} = \operatorname{Re} \mathbf{w}$, $z \in \mathbb{C}^n$, $\mathbf{w} \in \mathbb{C}^K$, Φ – гладкое отображение окрестности нуля в пространство $\mathbb{R}^K$, $\Phi(0, 0, 0) = 0$, $d\Phi(0, 0, 0) = 0$. Такая форма записи уравнений ростка называется стандартной.

Обозначим через D_1 линейное пространство гладких векторных полей на многообразии M , значения которых в каждой точке принадлежат комплексной касательной $T^{\mathbb{C}}M$ многообразия M . Далее определим линейное пространство D_j следующим образом: $D_j = [D_{j-1}, D_1] + D_{j-1}$, $j \in \mathbb{N}$, $j \geq 2$. Алгебра Леви-Танаки – это бесконечномерная градуированная алгебра Ли $\mathfrak{d} = \bigoplus \mathfrak{d}_j$, где $\mathfrak{d}_j = D_j/D_{j-1}$, с операцией $[X, Y]$ – скобкой Ли (коммутатором) векторных полей. Если для какого-то числа $\ell \in \mathbb{N}$ пространство D_ℓ совпадает с касательным пространством TM , то многообразие M называется многообразием конечного типа, а минимальное такое ℓ называется длиной алгебры Леви-Танаки.

Пусть $\mathbf{w} = \mathbf{u} + i\mathbf{v} = (w_1, \dots, w_K) = (u_1 + iv_1, \dots, u_K + iv_K)$, $z = (z_1, \dots, z_n)$ – координаты в $\mathbb{C}^{n+K}$, ξ – точка M , а M_ξ – росток M в точке ξ . Тогда через $\operatorname{aut} M_\xi$ будем обозначать алгебру Ли инфинитезимальных голоморфных автоморфизмов ростка M_ξ , то есть алгебру Ли вещественных векторных полей с голоморфными коэффициентами касающихся ростка M_ξ в точках самого ростка. Запись в координатах имеет следующий вид:

$$\operatorname{aut} M_\xi = \left\{ X(z, \mathbf{w}) = 2\operatorname{Re} \left(\sum_{s=1}^n f_s(z, \mathbf{w}) \frac{\partial}{\partial z_s} + \sum_{t=1}^K g_t(z, \mathbf{w}) \frac{\partial}{\partial w_t} \right) \right\},$$

¹⁴Шананина Е. Н., *Модели CR-многообразий типа $(1, K)$ при $3 \leq K \leq 7$ и их автоморфизмы*, Матем. заметки. 2000. Т. 67 №3. С.452–459.

¹⁵Шананина Е. Н., *Полиномиальные модели степени 5 и алгебры их автоморфизмов*, Матем. заметки. 2004. Т. 75 №5. С.757–772.

¹⁶Гаммель Р. В., Коссовский И. Г., *Оболочка голоморфности модельной поверхности степени три и феномен “жесткости”*, Тр. МИАН, 2006. Т. 253. С.30–45.

¹⁷Коссовский И. Г., *Об оболочках голоморфности модельных многообразий*, Изв. РАН. Сер. матем. 2007. Т. 71. №3. С.113–140.

¹⁸Sabzevari M., Hashemi A., M.-Alizadeh B., Merker J., *Applications of differential algebra for computing Lie algebras of infinitesimal CR-automorphisms*, arXiv:1212.3070, 2012. P.1–28.

где голоморфные в окрестности точки ξ функции f_s , $s = 1, \dots, n$ и g_t , $t = 1, \dots, K$ удовлетворяют системе функциональных соотношений, являющихся условиями того, что векторное поле $X(z, \mathbf{w})$ касается ростка M_ξ . Эти векторные поля порождают однопараметрические подгруппы, действующие голоморфно на M_ξ . Можно рассмотреть соответствующую $\text{aut}M_\xi$ локальную группу – $\text{Aut}M_\xi$. То есть $\text{Aut}M_\xi$ – это образ $\text{aut}M_\xi$ под действием экспоненциального отображения. Эта локальная группа действует на M_ξ отображениями, биголоморфными в точке ξ . Эту алгебру и соответствующую ей группу будем называть алгеброй и группой ростка. Подгруппу автоморфизмов $\text{Aut}_\xi M_\xi$, сохраняющих точку ξ на месте, будем называть стабилизатором группы ростка, а ее алгебру Ли $\text{aut}_\xi M_\xi$ будем называть стабилизатором алгебры ростка.

Пусть M_ξ – это росток вполне невырожденного вещественного порождающего подмногообразия M CR-типа (n, K) в точке ξ . Каждому такому ростку M_ξ может быть поставлена в соответствие его касательная модельная поверхность Q_ξ ¹⁹, то есть некоторая специальная вещественно алгебраическая поверхность того же CR-типа (n, K) .

Модельная поверхность – это вполне невырожденное алгебраическое многообразие, обладающее набором свойств, которые делают ее удобным и эффективным средством для изучения произвольных CR-многообразий. Приведем список основных свойств модельной поверхности.

1. *Симметричность*: существует естественное точное представление стабилизатора алгебры ростка в стабилизаторе алгебры модельной поверхности.
2. *Конечномерность*: критерием конечномерности группы голоморфных автоморфизмов модельной поверхности является ее полная невырожденность.
3. *Функториальность*: если два ростка биголоморфно эквивалентны, то эквивалентны и их касательные модельные поверхности. Две модельные поверхности биголоморфно эквивалентны тогда и только тогда, когда они эквивалентны линейно.
4. *Однородность*: всякая модельная поверхность голоморфно однородна, однородность обеспечивается треугольно-полиномиальными автоморфизмами.

¹⁹Белашапка В. К., *Вещественные подмногообразия комплексного пространства: из полиномиальные модели, автоморфизмы и проблемы классификации*, Успехи математических наук 2002. Т.57. Вып.1(343). С.3-44.

Обозначим через $\text{Aut}_0 Q$ подгруппу группы $\text{Aut} Q$, которая состоит из линейных преобразований модельной поверхности, оставляющих начало координат на месте. Подгруппа $\text{Aut}_0 Q$ всегда содержит подгруппу скалярных растяжений вида:

$$z \rightarrow \lambda z, \quad \mathbf{w}_j \rightarrow \lambda^j \mathbf{w}_j, \quad \lambda \in \mathbb{R}^+, \quad j = 2, \dots, \ell.$$

Где $\mathbf{w}_j$, $j = 2, \dots, \ell$ – векторные переменные, такие что выполнено равенство $(\mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_\ell) = (w_1, \dots, w_K)$. Причем в векторную переменную $\mathbf{w}_j$ сгруппированы те переменные w_m , $m \in \{1, \dots, K\}$, на которые подгруппа скалярных растяжений действует с весом j . То есть $\mathbf{w}_j \rightarrow \lambda^j \mathbf{w}_j$, $\lambda \in \mathbb{R}^+$.

Алгебра инфинитезимальных автоморфизмов модельной поверхности – это градуированная алгебра Ли вида:

$$\text{aut} Q = \mathfrak{g}_- + \mathfrak{g}_0 + \mathfrak{g}_+.$$

Градуировка вводится с помощью задания весов всем переменным и всем операторам дифференцирования по правилу:

$$[z] = 1, \quad [\mathbf{w}_j] = j, \quad \left[\frac{\partial}{\partial z}\right] = -1, \quad \left[\frac{\partial}{\partial \mathbf{w}_j}\right] = -j, \quad j = 2, \dots, \ell.$$

Подалгебре $\mathfrak{g}_-$ соответствует при экспоненциальном отображении подгруппа $\text{Aut}_- Q$ группы $\text{Aut} Q$ голоморфных автоморфизмов модельной поверхности. Подгруппа $\text{Aut}_- Q$ обеспечивает голоморфную однородность модельной поверхности. Размерность этой подгруппы совпадает с размерностью модельной поверхности и, как легко видеть, эту подгруппу можно отождествить с самой модельной поверхностью. Подалгебре $\mathfrak{g}_0$ соответствует подгруппа $\text{Aut}_0 Q$ линейных автоморфизмов модельной поверхности, оставляющих начало координат на месте. Подалгебре $\mathfrak{g}_+$ соответствует подгруппа $\text{Aut}_+ Q$ нелинейных автоморфизмов модельной поверхности, оставляющих начало координат на месте. Модельные поверхности с тривиальной подгруппой $\text{Aut}_+ Q$ называются *жесткими*.

Имеет место следующая гипотеза, касающаяся жесткости модельных поверхностей.

ГИПОТЕЗА. *Все вполне невырожденные модельные поверхности с длинной алгебры Леви-Танаки $\ell \geq 3$ являются жесткими.*

Эта гипотеза была доказана для $\ell = 3$ в диссертации И. Г. Коссовского²⁰. Автору настоящей диссертации удалось подтвердить эту гипотезу для

²⁰Гаммель Р. В., Коссовский И. Г., *Оболочка голоморфности модельной поверхности степени три и феномен “жесткости”*, Тр. МИАН, 2006. Т. 253. С.30–45.

серии CR-типов при $n = 1$, а именно для $K \leq 13$. Стоит отметить, что при $n = 1$ и $K \geq 4$ длина алгебры Леви-Танаки $\ell > 3$. Тем самым эти результаты не являются следствием теоремы Коссовского.

При изучении модельных поверхностей произвольного CR-типа появляется особенность, которой нет в случае Пуанкаре и которая слабо проявлена в случае Черна и Мозера. Различные ростки одного CR-типа могут быть ассоциированы с голоморфно неэквивалентными модельными поверхностями, причем семейства неэквивалентных поверхностей могут задаваться достаточно большим числом параметров. Модельные поверхности, как было указано в третьем свойстве, голоморфно локально эквивалентны лишь в том случае, если они эквивалентны линейно. Таким образом, задача описания пространства параметров (*пространства модулей*), нумерующих совокупность голоморфно неэквивалентных модельных поверхностей, погружается в контекст классической теории инвариантов.

Соответствующая конструкция построения пространства модулей модельных поверхностей была приведена в работе В. К. Белошапки²¹, она основана на теореме Гильберта о базисе и использует конструкцию рационального фактора²². В этой работе были разобраны простейшие примеры нетривиальных пространств модулей модельных поверхностей, а также было предложено применение этой конструкции к построению характеристических CR-классов. Настоящая диссертация посвящена рассмотрению более сложных примеров пространств модулей модельных поверхностей. Все они относятся к многообразиям с одномерной комплексной касательной.

Цель работы

Целью диссертации является решение следующих задач:

Доказать тривиальность компоненты $\mathfrak{g}_+$ алгебры Ли инфинитезимальных автоморфизмов модельных поверхностей CR-типов $(1, K)$ для K от 8 до 12.

Описать пространства модулей модельных поверхностей CR-типов $(1, K)$ для $K \leq 13$.

²¹Beloshapka V. K., *Moduli Space of Model Real Submanifolds*, Russian J. Math. Phys. 2006. V. 13. №3 P. 245–252.

²²Винберг Э. Б., Попов В. Л., *Теория инвариантов, Алгебраическая геометрия-4*, Итоги науки и техн. Сер. Современ. пробл. мат. Фундам. направления. 55. ВИНТИ. М. 1989. С.137-309.

Научная новизна

Результаты диссертации являются новыми и заключаются в следующем:

1. Доказана тривиальность компоненты $\mathfrak{g}_+$ алгебры Ли инфинитезимальных автоморфизмов модельных поверхностей CR-типов $(1, K)$ для K от 8 до 12. Получено полное описание алгебры и группы автоморфизмов модельных поверхностей CR-типов $(1, K)$ для K от 8 до 12.
2. Вычислены конечные системы образующих поля рациональных инвариантов для пространств модулей модельных поверхностей CR-типов $(1, K)$ для $K \leq 13$. Дано топологическое описание пространств модулей CR-типов $(1, 4)$ и $(1, 7)$.

Основные методы исследования

В диссертации используются методы многомерного комплексного анализа, теории инвариантов, дифференциальной геометрии, а также метод модельной поверхности, развитый в работах В. К. Белошапки.

Теоретическая и практическая ценность работы

Полученные в диссертации результаты имеют теоретическое значение. Они могут найти применение в многомерном комплексном анализе, дифференциальной геометрии, теории групп и алгебр Ли, теории инвариантов.

Апробация работы

Результаты диссертации докладывались:

- на семинаре имени Витушкина механико-математического факультета МГУ (руководители — В. К. Белошапка, С. Ю. Немировский, А. Г. Сергеев и Е. М. Чирка), 2010 г. и 2013 г.
- на международной конференции «CR-Geometry and PDE's – IV» (Тренто, Италия), 2010 г.
- на международной конференции «Ломоносов-2011» (Москва, Россия), 2011 г.
- на летней школе-конференции по проблемам алгебраической геометрии и комплексного анализа (Ярославль, Россия), 2011 г.

- на семинаре «Комплексные задачи математической физики» математического института имени В. А. Стеклова РАН (руководители — А. Г. Сергеев и А. В. Домрин), 2013 г.

Публикации

Основные результаты диссертации опубликованы в трех работах автора, две из которых входят в официальный перечень ВАК. Работ в соавторстве нет. Список работ приводится в конце автореферата [1–3].

Структура и объём диссертации

Диссертация состоит из введения, трех глав и списка литературы. Главы разбиты на пункты. Список литературы включает в себя 21 наименование. Общий объём диссертации составляет 96 страниц.

Краткое содержание работы

Во **введении** к диссертации приводятся основные понятия, обсуждается история вопроса, формулируются основные результаты диссертации, а также освещается место полученных результатов в современном многомерном комплексном анализе.

Первая глава диссертации посвящена вычислению алгебры автоморфизмов модельных поверхностей CR-типа $(1, K)$ для $8 \leq K \leq 12$. Алгебры автоморфизмов модельных поверхностей CR-типа $(1, K)$ для $2 \leq K \leq 7$ были вычислены в работах В. К. Белошапки²³ и Е. Н. Шананиной²⁴. В пункте **1.1** уравнение произвольного вполне невырожденного ростка CR-типа $(1, K)$ для $8 \leq K \leq 12$ приводится к простейшему виду, который является аналогом нормальной жордановой формы.

В пункте **1.2** в явном виде вычисляется алгебра автоморфизмов модельных поверхностей CR-типа $(1, K)$ для $8 \leq K \leq 12$. Как следствие доказывается следующая теорема.

²³Белошапка В. К., *Вещественные подмногообразия комплексного пространства: их полиномиальные модели, автоморфизмы и проблемы классификации*, Успехи математических наук 2002. Т.57. Вып.1(343). С.3-44.

²⁴Шананина Е. Н., *Модели CR-многообразий типа $(1, K)$ при $3 \leq K \leq 7$ и их автоморфизмы*, Матем. заметки. 2000. Т. 67 №3. С.452-459.

ТЕОРЕМА. *Модельные поверхности CR-типа $(1, K)$ при $8 \leq K \leq 12$ являются жесткими, то есть их подалгебра $\mathfrak{g}_+ = 0$.*

Эта теорема подтверждает гипотезу о жесткости модельных поверхностей при $\ell \geq 3$.

СЛЕДСТВИЕ 1. *Стабилизатор группы роста CR-типа $(1, K)$ при $8 \leq K \leq 12$ изоморфен либо $\mathbb{R}^*$, либо $\mathbb{C}^*$.*

СЛЕДСТВИЕ 2. *Группа $\text{Aut}Q$ роста CR-типа $(1, K)$ при $8 \leq K \leq 12$ состоит из треугольно-полиномиальных преобразований пространства $\mathbb{C}^{K+1}$.*

Вторая глава диссертации посвящена изучению пространств модулей модельных поверхностей CR-размерности один. В пунктах **2.1** – **2.6** рассмотрены пространства модулей модельных поверхностей CR-типов $(1, K)$ при $K \leq 13$. Для них построены конечные системы образующих поля рациональных инвариантов действия линейной группы на пространстве, которое параметризует модельные поверхности. Тем самым получено описание пространств модулей модельных поверхностей CR-типов $(1, K)$ при $K \leq 13$.

В пунктах **2.1** и **2.2** дано топологическое описание пространств модулей модельных поверхностей CR-типов $(1, 4)$ и $(1, 7)$ соответственно.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. *Пространство модулей $\mathcal{M}(1, 4)$ гомеоморфно отрезку.*

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. *Пространство модулей $\mathcal{M}(1, 7)$ гомеоморфно взвешенному проективному пространству $\mathbb{CP}(3, 1, 1)^{25}$.*

В пункте **2.6** демонстрируется двойственность, имеющая место для пространств модулей модельных поверхностей. Из двойственности следует, что пространства модулей $\mathcal{M}(1, 5)$ и $\mathcal{M}(1, 11)$ гомеоморфны пространствам модулей $\mathcal{M}(1, 4)$ и $\mathcal{M}(1, 7)$ соответственно. Таким образом, верны следующие два утверждения.

УТВЕРЖДЕНИЕ 3. *Пространство модулей $\mathcal{M}(1, 5)$ гомеоморфно отрезку.*

УТВЕРЖДЕНИЕ 4. *Пространство модулей $\mathcal{M}(1, 11)$ гомеоморфно взвешенному проективному пространству $\mathbb{CP}(3, 1, 1)$.*

²⁵Это обозначение взвешенного проективного пространства соответствует обозначениям монографии А. R. Iano-Fletcher, *Working with weighted complete intersections*, London Mathematical Society Lecture Note Series 2000. №281. P.101-174.

В пункте **2.7** доказано следующее утверждение о строении пространств модулей модельных поверхностей CR-размерности один.

УТВЕРЖДЕНИЕ 5. *Пространства модулей модельных поверхностей CR-размерности один либо тривиальны, либо представляют из себя фактор-пространства вещественных многообразий Грассмана по действию группы $U(1)$.*

Третья глава диссертации посвящена изучению связи между понятием полной невырожденности и понятием геометрической невырожденности для ростка порождающего CR-многообразия. Первое понятие определяется в терминах форм, которые задают уравнения ростка, а второе понятие определяется в терминах его алгебры Леви-Танаки.

В пункте **3.1** в явном виде вычисляется структура алгебры Леви-Танаки для модельных поверхностей, у которых длина алгебры Леви-Танаки $\ell = 4$. На основании этих вычислений доказывается следующее утверждение.

УТВЕРЖДЕНИЕ 6. *Для ростков CR-многообразий с длиной алгебры Леви-Танаки $\ell = 4$ понятия полной невырожденности и геометрической невырожденности эквивалентны.*

В пункте **3.2** в явном виде вычисляется структура алгебры Леви-Танаки для модельных поверхностей, у которых длина алгебры Леви-Танаки $\ell = 5$.

В пункте **3.3**, на основании вычислений пункта **3.2**, доказывается следующее утверждение.

УТВЕРЖДЕНИЕ 7. *Для ростков CR-типа $(1,12)$ понятия полной невырожденности и геометрической невырожденности эквивалентны.*

Благодарности

Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю профессору Валерию Константиновичу Белошапке за постановку задач, многочисленные обсуждения и постоянное внимание к работе. Автор благодарит также весь коллектив кафедры теории функций и функционального анализа механико-математического факультета МГУ имени М. В. Ломоносова за творческую атмосферу, способствовавшую научной работе.

Публикации автора по теме диссертации

- [1] Mamai I. B., *Model CR-Manifolds with One-Dimensional Complex Tangent*, Russian J. Math. Phys. 2009. V.16. №1 P.21-30.
- [2] Мамай И. Б., *Пространство модулей модельных поверхностей с одномерной комплексной касательной*, Изв. РАН. Сер. матем. 2013. Т.77 №2. С.139-164.
- [3] Мамай И. Б., *Алгебра Леви-Танаки модельной поверхности*, Деп. в ВИНИТИ. 2012. №426-В2012. С.3-21.