ФГБОУ ВПО «МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ имени М. В. ЛОМОНОСОВА»

На правах рукописи
УДК 519.7

Кочергин Алексей Вадимович

О ГЛУБИНЕ ФУНКЦИЙ МНОГОЗНАЧНОЙ ЛОГИКИ

01.01.09 — дискретная математика и математическая кибернетика

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва 2013

Работа выполнена на кафедре дискретной математики Механико-математического факультета Федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Московский государственний университет имени М. В. Ломоносова».

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук, профессор Касим-Заде Октай Мурад оглы
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук, профессор Косовский Николай Кириллович (ФГБОУ ВПО «Санкт-Петербургский государственный университет», зав. кафедрой информатики математико-механического факультета)
	кандидат физико-математических наук, доцент Стеценко Владимир Алексеевич (ФГБОУ ВПО «Московский педагогический государственный университет», кафедра теоретической информатики и дискретной математики)
Ведущая организация:	ФГБУН Институт математики им. С. Л. Соболева Сибирского отделения РАН

Защита диссертации состоится 22 ноября 2013 г. в 16 часов 45 минут на заседании диссертационного совета Д.501.001.84 при ФГБОУ ВПО «Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова» по адресу: Российская Федерация, 119991, ГСП-1, Москва, Ленинские горы, д. 1, МГУ имени М. В. Ломоносова, Механико-математический факультет, аудитория 14–08.

С диссертацией можно ознакомиться в Фундаментальной библиотеке ФГБОУ ВПО «Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова» (Москва, Ломоносовский проспект, дом 27, сектор А, 8 этаж).

Автореферат разослан 22 октября 2013 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
Д.501.001.84 при ФГБОУ ВПО МГУ
доктор физико-математических наук,
профессор А. О. Иванов

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы.

Диссертационная работа относится к одной из центральных областей дискретной математики и математической кибернетики — теории синтеза и сложности управляющих систем[1]. Одним из важнейших модельных классов управляющих систем является изучаемый в работе класс схем из функциональных элементов[2].

В диссертации рассматривается реализация функций k-значной логики схемами из функциональных элементов над произвольным функционально полным базисом. Основная задача синтеза схем из функциональных элементов в данном случае может быть сформулирована следующим образом. Для произвольной функции k-значной логики требуется построить такую реализующую ее схему из функциональных элементов над заданным базисом, которая является в том или ином смысле близкой к наилучшей (например, асиптотически оптимальной схемой) относительно выбранной меры сложности[2,3].

Начиная со второй половины 1950-х годов О.Б. Лупановым были разработаны асимптотически оптимальные методы синтеза и получены асимптотически точные оценки сложности для многих важнейших классов управляющих систем, в том числе для схем из функциональных элементов над произвольным конечным полным базисом булевых функций[4].

Одной из наиболее важных мер сложности является глубина схемы. С содержательной точки зрения рассматриваемое в данной работе понятие глубины связано с представлениями о задержке (или времени работы) схемы[5]. Время работы является одной из наиболее существенных характеристик современных вычислительных устройств.

Под глубиной схемы понимается максимальное число элементов в ориентированных цепях, ведущих от какого-либо из входов схемы к ее выходу.

---

[1] Яблонский С. В. Основные понятия кибернетики // *Проблемы кибернетики, вып.* 2. — М.: Физматгиз, 1959. — С. 7–38.

[2] Лупанов О. Б. Асимптотические оценки сложности управляющих систем. — М.: Изд-во Московского университета, 1984.

[3] Shannon C. E. The synthesis of two-terminal switching circuits // *Bell Syst. Techn. J.* — 1949. — V. 28, № 1. — P. 59–98. (Русский перевод: Шеннон К. *Работы по теории информации и кибернетике.* — М.: ИЛ, 1963. — С. 59–101.)

[4] Лупанов О. Б. Об одном методе синтеза схем // *Известия высших учебных заведений. Радиофизика.* — 1958. — Т. 1, № 1. — С. 120–140.

[5] См., например: Лупанов О. Б. О схемах из функциональных элементов с задержками // *Проблемы кибернетики, вып.* 23. — М.: Наука, 1970. — С. 43–81; Храпченко В. М. Новые соотношения между глубиной и задержкой // *Дискретная математика.* — 1995. — Т. 7, вып. 4. — С. 77–85.

Глубиной функции k-значной логики f над базисом B называется минимальная глубина схем, реализующих функцию f над базисом B. В диссертационной работе под базисом понимается произвольное функционально полное множество функций k-значной логики, т. е. такое, что суперпозициями функций этого множества можно реализовать любую функцию k-значной логики. Базис называется бесконечным, если для любого натурального числа m существует функция из этого базиса, существенно зависящая более чем от m переменных. В противном случае базис называется конечным. Вообще говоря, при этом формально число функций в конечном базисе может быть бесконечным. Однако, по-существу, конечный базис с точностью до введения и изъятия несущественных переменных содержит лишь конечное число различных функций. Будем считать, что конечный базис задается как конечное множество функций k-значной логики.

Отметим, что в ряде работ[6] под «глубиной» (или «глубиной альтернирования») схемы понимается максимальное число перемен типов элементов в цепях, ведущих от входов схемы к ее выходу. Это понятие существенно отличается от изучаемого в данной работе, и в данной работе не рассматривается.

Отметим также, что в данной работе исследуется глубина функций k-значной логики только над функционально полными системами. Однако глубина функций изучалась и над функционально неполными системами функций двузначной и k-значной ($k \geq 3$) логики (см., например, работы А. Б. Угольникова[7,8], А. А. Андреева[9]). В ряде работ также получены соотношения, связывающие глубину и формульную сложность функций

[6] См., например: Лупанов О. Б. О реализации функций алгебры логики формулами из конечных классов (формулами ограниченной глубины) в базисе $\&, \vee, \neg$. // *Проблемы кибернетики, вып.* 6. — М.: Физматгиз, 1961. — С. 5–14; Лупанов О. Б. О влиянии глубины формул на их сложность // *Кибернетика.* — 1970. — № 2. — С. 46–49.; Boppana R. B., Sipser M. The complexity of finite functions // *Handbook of Theoretical Computer Science.* — V. A. Algoritms and complexity — Amsterdam: Elsiver, 1990. — P. 757–804; Ложкин С. А., Коноводов В. А. О синтезе и сложности формул с ограниченной глубиной альтернирования // *Вестник Московского университета. Сер.* 15. *Вычислительная математика и кибернетика.* — 2012. — № 2. — С. 28–36.

[7] Угольников А. Б. О глубине формул в неполных базисах // *Математические вопросы кибернетики, вып.* 1. — М.: Наука, 1988. — С. 242–245.

[8] Угольников А. Б. О сложности реализации формулами одной последовательности функций многозначной логики // *Математические вопросы кибернетики, вып.* 2. — М.: Наука, 1989. — С. 174–176.

[9] Андреев А. А. Об одной последовательности функций многозначной логики // *Вестник Московского университета. Сер.* 1. *Математика. Механика.* — 2011. — № 6. — С. 3–7.

(см., например, работы Ф. М. Спиры[10], В. М. Храпченко[11], И. Вегенера[12], А. Б. Угольникова[13], М. Е. Рагаца[14], Р. Ф. Сафина[15]). В работе в качестве меры сложности рассматривается только глубина схем, а ее взаимосвязи с другими мерами сложности, как и сами другие меры сложности, не рассматриваются.

В диссертации для произвольного базиса B исследуется поведение функции Шеннона глубины $D_B(n)$, характеризующей максимальную глубину функций от n переменных и определяемой равенством $D_B(n) = \max D_B(f)$, где максимум берется по всем функциям k-значной логики f, зависящим от n переменных.

В 1970 г. О. Б. Лупановым[16] было установлено, что в случае двузначной логики ($k = 2$) для любого конечного базиса B выполняется равенство

$$D_B(n) = \zeta n + a(n),$$

где $a(n) = o(n)$ при $n \to \infty$, а $\zeta = (\log_2 m)^{-1}$ и m — максимальное число существенных переменных у функций из базиса B. В случае классического базиса двузначной логики, состоящего из конъюнкции двух переменных, дизъюнкции двух переменных и отрицания, эта оценка для функции Шеннона глубины уточнялась в работах Ф. М. Спиры[17], У. Ф. Мак-Колла и

[10] Spira P. M. On time-hardware complexity tradeoffs for Boolean functions // *Proc. 4th Hawai Symposium on System Sciences.* — 1971. — P. 525–527.

[11] Храпченко В. М. О соотношении между сложностью и глубиной формул в базисе, содержащем медиану // *Методы дискретного анализа в теории кодов и схем. Сб. научн. тр., вып.* 37. — Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР, 1981. — С. 77–84.

[12] Wegener I. Relating monotone formula size and monotone formula depth of Boolean functions // *Information Processing Letters.* — 1983. — V. 16. — P. 41–42.

[13] Угольников А. Б. О глубине и полиномиальной эквивалентности формул для замкнутых классов двузначной логики // *Математические заметки.* — 1987. — Т. 42, № 4. — С. 603–612.

[14] Ragaz M. E. Parallelizable algebras // *Archiv fur Mathematische Logik und Grundlagenforschung.* — 1986/87. — Bd. 26/1, № 2. — P. 77–99.

[15] Сафин Р. Ф. О равномерности систем монотонных функций // *Вестник Московского университета. Сер.* 1. *Математика. Механика.* — 2003. — № 2. — С. 15–20.

[16] Лупанов О. Б. О схемах из функциональных элементов с задержками // *Проблемы кибернетики, вып.* 23. — М.: Наука, 1970. — С. 43–81.

[17] Spira P. M. On the time necessary to compute switching functions // *IEEE Transactions on Computers.* — 1971. — V. 20 (1). — P. 104–105.

М. С. Патерсона[18], С. Б. Гашкова[19], С. А. Ложкина[20].

В 1996 г. С. А. Ложкиным[21] было показано, что для произвольного конечного базиса B функций двузначной логики справедливо равенство

$$D_B(n) = \zeta(n - \log_2 \log_2 n) + c(n),$$

где $c(n) = O(1)$.

Результатов о поведении функции Шеннона глубины в случае бесконечных базисов функций двузначной логики до появления работ О. М. Касим-Заде было известно немного. Асимптотики роста (или хотя бы порядки роста) были найдены только для небольшого числа базисов. При этом во всех известных примерах функция Шеннона либо была ограничена сверху константой (в частности, для базиса, состоящего из всех функций двузначной логики, или для базиса функций двузначной логики, состоящего из всех пороговых функций[22], либо росла по порядку как $\log_2 n$ (например, для базиса функций двузначной логики, состоящего из конъюнкции двух переменных и всех линейных функций — фактически это следует из результатов работы С. А. Ложкина[23]).

В 2007 г. О. М. Касим-Заде[24] было установлено, что для любого бесконечного базиса B функций двузначной логики порядок роста функции Шеннона глубины $D_B(n)$ при $n \to \infty$ равен либо 1, либо $\log_2 n$. Позднее О. М. Касим-Заде[25,26] этот результат усилил: было показано, что для лю-

[18]McColl W. F., Paterson M. S. The depth of all Boolean functions // *SIAM J. Comput.* — 1977. — V. 6, № 2. — P. 373–380.

[19]Гашков С. Б. О глубине булевых функций // *Проблемы кибернетики, вып.* 34. — М.: Наука, 1978. — С. 265–268.

[20]Ложкин С. А. О глубине функций алгебры логики в некоторых базисах // *Annales Univ. Sci. Budapest. Sec. Comput.* — 1983. — V. 4. — P. 113–125.

[21]Ложкин С. А. О глубине функций алгебры логики в произвольном полном базисе // *Вестник Московского университета. Сер.* 1. *Математика. Механика.* — 1996. — № 2. — С. 80–82.

[22]Лупанов О. Б. О синтезе схем из пороговых элементов // *Проблемы кибернетики, вып.* 26. — М.: Наука, 1973. — С. 109–140.

[23]Ложкин С. А. Асимптотическое поведение функций Шеннона для задержек схем из функциональных элементов // *Математические заметки.* — 1976. — Т. 19, № 6. — С. 939–951.

[24]Касим-Заде О. М. О глубине булевых функций при реализации схемами над произвольным базисом // *Вестник Московского университета. Сер.* 1. *Математика. Механика.* — 2007. — № 1. — С. 18–21.

[25]Касим-Заде О. М. О глубине булевых функций над произвольным бесконечным базисом // *Дискретный анализ и исследование операций. Сер.* 1. — 2007. — Т. 14, 1. — С. 45–69.

[26]Касим-Заде О. М. О глубине булевых функций при реализации схемами над произ-

бого бесконечного базиса B функций двузначной логики либо существует константа a, $1 \leq a \leq 6$, такая, что $D_B(n) = a$ при всех достаточно больших n, либо существуют целочисленная константа $b \geq 2$, такая, что $\lceil \log_b n \rceil \leq D_B(n) \leq \lceil \log_b n \rceil + 5$ при всех n.

При $k \geq 3$ задача о поведении функции Шеннона глубины функций k-значной логики при реализации схемами из функциональных элементов до последнего времени оставалась практически неисследованной. Можно указать, по-видимому, только на некоторые тривиальные результаты, являющиеся очевидными обобщениями на k-значные логики случая двузначной логики. Например, для конечного базиса B^*, состоящего из всех функций k-значной логики от двух переменных, легко показать, что порядок роста функции Шеннона глубины $D_{B^*}(n)$ при $n \to \infty$ равен n. Отсюда очевидным образом следует, что и для любого конечного базиса B функций k-значной логики функция Шеннона глубины $D_B(n)$ при $n \to \infty$ по порядку растет как n. В то же время вопрос о точном виде асимптотики функции Шеннона глубины функций k-значной логики при $k \geq 3$ над произвольным конечным базисом до самого последнего времени, по-видимому, оставался открытым. В случае бесконечных базисов при $k \geq 3$ оставался открытым даже вопрос о возможных порядках роста функции Шеннона глубины, в частности, оставалось неизвестным, конечно или бесконечно их число.

Цель работы.

Целью диссертационной работы является изучение асимптотического поведения функции Шеннона глубины схем из функциональных элементов над произвольным базисом (т. е. функционально полной системой) функций k-значной логики при всех $k \geq 3$ и получение асимптотических выражений для указанной функции Шеннона.

Методы исследования.

В диссертации используются методы дискретной математики и математической кибернетики, в том числе методы теории синтеза и сложности управляющих систем, теории функциональных систем, теории формальных языков и грамматик, а также методы теории оптимизации.

Научная новизна.

Все основные результаты диссертации являются новыми. Основные положения, выносимые на защиту, следующие:

1. При всех $k \geq 3$ установлено существование асимптотики вида $D_B(n) = \alpha_B n + o(n)$ для функции Шеннона глубины $D_B(n)$ над произ-

---

вольным бесконечным базисом // *Вестник Московского университета. Сер.* 1. *Математика. Механика.* — 2012. — № 6. — С. 55–57.

вольным конечным базисом B функций k-значной логики, где α_B — положительная постоянная, зависящая только от базиса B, $n \to \infty$.

2. Получено алгоритмическое решение проблемы нахождения константы в указанной выше асимптотике. Показано, что при любом $k \geq 3$ для произвольного конечного базиса B функций k-значной логики константа α_B из соотношения $D_B(n) = \alpha_B n + o(n)$ имеет вид $\alpha_B = (\log_k \tau_B)^{-1}$, где τ_B является алгебраическим числом. Описан алгоритм нахождения по системе B многочлена с целыми коэффициентами, максимальным действительным корнем которого является число τ_B.

3. Установлено, что для любого $k \geq 3$ и произвольного бесконечного (т. е. содержащего функции, имеющие сколь угодно большое число существенных переменных) базиса B функций k-значной логики либо существует константа $\gamma_B \geq 1$, такая, что $D_B(n) = \gamma_B$ при всех достаточно больших n, либо существует константа $\beta_B > 0$, такая, что при $n \to \infty$ имеет место соотношение $D_B(n) = \beta_B \log_2 n + o(\log_2 n)$.

Результаты 1 и 3 дают полную качественную картину асимптотического поведения функции Шеннона глубины над произвольным базисом функций k-значной логики при всех $k \geq 3$.

Теоретическая и практическая ценность.

Работа имеет теоретический характер. Ее результаты могут быть использованы в исследованиях по теории синтеза и сложности управляющих систем, теории функциональных систем и в других разделах дискретной математики и математической кибернетики.

Апробация работы.

Научные результаты и положения диссертационной работы докладывались и обсуждались на научных семинарах «Синтез и сложность управляющих систем» (2012 г.) и «Математические вопросы кибернетики» (2013 г.) под руководством профессора О. М. Касим-Заде в МГУ, на XI Международном семинаре «Дискретная математика и ее приложения» (Москва, МГУ, 18–23 июня 2012 г.), на научной конференции «Ломоносовские чтения» (Москва, МГУ, апрель 2013 г.), на IX Молодежной научной школе по дискретной математике и ее приложениям (Москва, ИПМ им. М. В. Келдыша РАН, 16–21 сентября 2013 г.).

Публикации. Основное содержание диссертации опубликовано в 3 работах автора, список которых приведен в конце автореферата [1–3].

Структура и объем работы. Диссертационная работа состоит из Введения, двух глав, разделенных в совокупности на 9 параграфов, и списка использованной литературы из 65 наименований. Полный объем работы составляет 86 страниц. Нумерация теорем, лемм, следствий, свойств и формул — двойная, состоящая из номера главы и номера внутри данной главы.

Содержание работы

Во Введении кратко излагается история вопроса и описываются основные результаты диссертации.

В **главе 1** диссертации изучается поведение функции Шеннона глубины схем над произвольным конечным базисом функций k-значной логики. В **§1.1** вводятся основные понятия и определения, формулируются основные результаты этой главы, заключающиеся в трех следующих теоремах.

Теорема 1.1. *При любом натуральном k, $k \geq 2$, для произвольного конечного базиса B функций k-значной логики существует такая положительная константа α_B, что при $n \to \infty$ выполняется соотношение*[27]

$$D_B(n) \sim \alpha_B n.$$

Теорема 1.2. *При любом натуральном k, $k \geq 2$, для произвольного конечного базиса B константа α_B из соотношения $D_B(n) \sim \alpha_B n$ имеет вид $\alpha_B = (\log_k \tau_B)^{-1}$, где τ_B является алгебраическим числом.*

Теорема 1.3. *При любом натуральном k, $k \geq 2$, существует алгоритм нахождения по произвольному конечному базису B функций k-значной логики многочлена с целыми коэффициентами, максимальным действительным корнем которого является число τ_B.*

Говоря содержательно, теорема 1.1 для произвольного конечного базиса B функций k-значной логики устанавливает существование асимптотики функции Шеннона глубины вида $D_B(n) \sim \alpha_B n$, линейной по числу n переменных реализуемых функций, а теоремы 1.2 и 1.3 дают «эффективное» в некотором естественном смысле решение проблемы нахождения константы α_B в указанной асимптотике: по теореме 1.2 эта константа выражается в «замкнутой форме» через логарифм от алгебраического числа τ_B, которое по теореме 1.3 задается как корень некоторого вычисляемого по базису B многочлена с целыми коэффициентами.

В **§§1.2–1.3** приводится доказательство теоремы 1.1. Наметим основные шаги этого доказательства. Для любого конечного базиса B функций k-значной логики и произвольного натурального числа d вводится величина $N_B(d)$ как наибольшее число существенных переменных у функций,

[27] Как обычно, для последовательностей положительных чисел $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ асимптотическое равенство $a(n) \sim b(n)$ означает, что $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$.

допускающих над базисом B реализацию схемой глубины не более d. Устанавливается, что для любого конечного базиса B функций k-значной логики существует положительный предел

$$\lim_{d\to\infty} \frac{\log_k N_B(d)}{d}.$$

Далее вводится константа α_B, определеляемая равенством

$$\alpha_B = \left(\lim_{d\to\infty} \frac{\log_k N_B(d)}{d}\right)^{-1}.$$

В **§1.2** на основе мощностных соображений доказывается, что для любого ε, $\varepsilon > 0$, при всех достаточно больших n выполняется неравенство $D_B(n) > \alpha_B n(1-\varepsilon)$, причем доля функций $f(x_1, \dots, x_n)$, для которых $D_B(f) < \alpha_B n(1-\varepsilon)$, стремится к 0 с ростом n. (Отметим, что с учетом этого теореме 1.1 можно придать даже более сильную форму — имеет место так называемый «эффект Шеннона»: почти все функции имеют почти одинаковую глубину, асимптотически равную значению функции Шеннона.) В **§1.3** доказывается верхняя оценка функции Шеннона глубины

$$D_B(n) \le \alpha_B n + o(n),$$

где $n \to \infty$. При доказательстве этой оценки используется некоторый аналог леммы О. Б. Лупанова об обобщенном разложении[28].

Теорема 1.1 устанавливает лишь факт существования асимптотики указанного вида для функции Шеннона глубины над любым конечным базисом функций k-значной логики. Возникает проблема нахождения по конечному базису B соответствующей константы α_B из этой асимптотики. В **§1.4** рассматривается ряд известных конечных базисов функций k-значной логики, дающих конкретные примеры возможных асимптотик функций Шеннона глубины. Во всех указанных примерах константа α_B в соответсвующей асимптотике имеет вид $\alpha_B = (\log_k \tau_B)^{-1}$, где τ_B является рациональным (и даже натуральным) числом. Далее, здесь же приводится пример конечного базиса B, для которого константа τ_B в представлении $\alpha_B = (\log_k \tau_B)^{-1}$ является числом иррациональным. Последний пример указывает на принципиальное отличие k-значных ($k \ge 3$) логик от двузначной: при $k = 2$ для любого конечного базиса B константа τ_B — натуральное число[29]. Теорема 1.2 показывает, что в общем случае для конечных базисов функций k-значной логики число τ_B является алгебраическим.

[28]Лупанов О. Б. Асимптотические оценки сложности управляющих систем. — М.: Изд-во Московского университета, 1984.

[29]Лупанов О. Б. О схемах из функциональных элементов с задержками // *Проблемы кибернетики, вып.* 23. — М.: Наука, 1970. — С. 43–81.

Далее в **§1.5** проводится доказательство теорем 1.2 и 1.3. Определяется объект, называемый Λ-грамматикой, который по существу отличается от контекстно-свободной грамматики лишь отсутствием терминальных символов. Описывается алгоритм построения по произвольному конечному базису B функций k-значной логики некоторой Λ-грамматики J_B, имеющей в некотором подходящем смысле хорошие свойства. Далее описывается алгоритм построения по получившейся Λ-грамматике J_B многочлена с целыми коэффициентами, максимальным действительным корнем которого является число τ_B, фигурирующее в формулировке теоремы 1.2. Таким образом устанавливается справедливость утверждений теорем 1.2 и 1.3, дающих алгоритмическое решение проблемы нахождения по произвольному конечному базису B константы α_B.

Глава 2 диссертации посвящена изучению поведения функции Шеннона глубины схем над произвольным бесконечным базисом функций k-значной логики. Основным результатом этой главы является следующее утверждение.

Теорема 1.4. *При любом фиксированном k, $k \geq 2$, для любого бесконечного базиса B функций k-значной логики либо существует константа $\gamma_B \geq 1$, такая, что $D_B(n) = \gamma_B$ при всех достаточно больших n, либо существует константа $\beta_B > 0$, такая, что при $n \to \infty$ имеет место соотношение $D_B(n) \sim \beta_B \log_2 n$.*

Сначала в **§2.1** вводится понятие обобщенной p-степени базиса B. Для произвольного бесконечного базиса B и любого простого числа p определяется величина $\mathrm{gdeg}_p B$, называемая обобщенной p-степенью базиса B и принимающая значения из расширенного множества натуральных чисел $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$ (подробное определение этого понятия и объяснение соответствующих обозначений см. в тексте диссертации). Устанавливается, что для любого бесконечного базиса B функций k-значной логики имеет место одна из двух взаимоисключающих возможностей: либо $\mathrm{gdeg}_q B = \infty$ при любом простом q, либо существует единственное простое p, такое, что $\mathrm{gdeg}_p B < \infty$. В первом случае базис B называется базисом бесконечной характеристики, во втором — базисом конечной характеристики. (В случае $k = 2$ введенное в диссертации понятие обобщенной p-степени базиса совпадает с известным понятием p-степени базиса функций двузначной логики[30].)

Далее в **§2.1** устанавливается, что для произвольного бесконечного ба-

[30]Касим-Заде О. М. О глубине булевых функций при реализации схемами над произвольным базисом // *Вестник Московского университета. Сер.* 1. *Математика. Механика.* — 2007. — № 1. — С. 18–21.

зиса B бесконечной характеристики при всех достаточно больших n выполняется равенство

$$D_B(n) = \gamma_B,$$

где γ_B — некоторая константа, зависящая от базиса B. В конце параграфа рассматриваются некоторые примеры базисов бесконечной характеристики. (Тривиальным примером такого базиса является бесконечный базис, состоящий из всех функций k-значной логики.)

В §§**2.2–2.3** исследуются бесконечные базисы конечной характеристики. Для произвольного бесконечного базиса B конечной характеристки вводится положительная константа κ_B как предел некоторой последовательности положительных чисел, зависящей от базиса B (подробнее см. в § 2.2). Сначала в §**2.2** устанавливается нижняя оценка: доказывается, что для произвольного бесконечного базиса B конечной характеристики и любого $\varepsilon, \varepsilon \geq 0$, при всех достаточно больших n справедливо неравенство

$$D_B(n) \geq \left(\kappa_B^{-1} - \varepsilon\right) \log_2 n.$$

В отличие от случая конечных базисов в случае бесконечных базисов конечной характеристики нижняя оценка устанавливается конструктивно: явно предъявляется последовательность функций k-значной логики $\{f_n\}$ (где f_n зависит от n переменных), удовлетворяющих при произвольном $\varepsilon, \varepsilon \geq 0$, и всех достаточно больших n неравенству

$$D_B(f_n) \geq \left(\kappa_B^{-1} - \varepsilon\right) \log_2 n.$$

Далее в §**2.3** доказывается верхняя оценка: устанавливается, что при $n \to \infty$ для произвольного бесконечного базиса B конечной характеристики выполняется соотношение

$$D_B(n) \leq \kappa_B^{-1} \log_2 n + o(\log_2 n).$$

Таким образом, устанавливается, что для любого бесконечного базиса B конечной характеристики выполняется соотношение

$$D_B(n) \sim \beta_B \log_2 n,$$

где $\beta_B = \kappa_B^{-1}$.

В §**2.4** рассматриваются примеры бесконечных базисов конечной характеристики. В случае функций двузначной логики для любого бесконечного базиса B конечной характеристики асимптотика функции Шеннона глубины может быть записана[31] в виде $D_B(n) \sim \log_s n$, где s ($s \geq 2$) — некоторое натуральное число, зависящее от базиса B. В **§2.4** сначала для всякого $k \geq 3$ устанавливается существование бесконечных базисов функций k-значной логики с аналогичной асимптотикой функции Шеннона глубины при всех достаточно больших s. Далее приводится пример бесконечного базиса конечной характеристики, для которого функция Шеннона глубины не представима в таком виде (в этом случае асимптотика функции Шеннона имеет вид $D_B(n) \sim \log_t n$, где t — число иррациональное). Этот пример указывает на еще одно отличие k-значных (при $k \geq 3$) логик от двузначной.

Отметим, что справедливость утверждений теорем 1.1–1.4 в случае двузначной логики вытекает из перечисленных ранее результатов других авторов. Случай $k = 2$ включен в формулировки теорем 1.1–1.4 лишь для полноты изложения. Результаты теорем 1.1 и 1.4 дают полную качественную картину асимптотического поведения функции Шеннона глубины над произвольным базисом функций k-значной логики при всех $k \geq 2$.

Благодарности

Автор выражает благодарность проф. О. М. Касим-Заде за постановку задач и постоянное внимание к работе.

Публикации автора по теме диссертации

1. Кочергин А. В. О глубине функций k-значной логики в бесконечных базисах // *Вестник Московского университета. Сер.* 1. *Математика. Механика.* — 2011. — № 1. — С. 22–26.

2. Кочергин А. В. О глубине функций многозначной логики // *Материалы* XI *Международного семинара «Дискретная математика и ее приложения», посвященного* 80*-летию со дня рождения академика О. Б. Лупанова* (*Москва,* 18–23 *июня* 2012 *г.*). — М.: Изд-во механико-математического факультета МГУ, 2012. — С. 133–135.

3. Кочергин А. В. О глубине функций k-значной логики в конечных базисах // *Вестник Московского университета. Сер.* 1. *Математика. Механика.* — 2013. — № 1. — С. 56–59.

[31] Касим-Заде О. М. О глубине булевых функций над произвольным бесконечным базисом // *Дискретный анализ и исследование операций. Сер.* 1. — 2007. — Т. 14, 1. — С. 45–69.