ФГБОУ ВПО Московский государственный университет имени
М. В. Ломоносова

На правах рукописи

Киселев Денис Дмитриевич

Задача погружения и ее применения: индекс Шура, оптимальное управление

Специальность 01.01.06
(математическая логика, алгебра и теория чисел)

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва 2013

Работа выполнена на кафедре высшей алгебры механико-математического факультета ФГБОУ ВПО Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова.

Научный руководитель:	кандидат физико-математических наук, доцент Игорь Андреевич Чубаров
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук, профессор Георгий Борисович Шабат (ФГБОУ ВПО Российский государственный гуманитарный университет)
	кандидат физико-математических наук, доцент Илья Юрьевич Ждановский (ФГАОУ ВПО Московский физико-технический институт (государственный университет))
Ведущая организация:	ФГБОУ ВПО Санкт-Петербургский государственный университет

Защита диссертации состоится "06" декабря 2013 г. в 16 ч. 45 мин. на заседании диссертационного совета Д 501.001.84 при ФГБОУ ВПО Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова по адресу: Российская Федерация, 119991, г. Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д. 1, МГУ имени М. В. Ломоносова, механико-математический факультет, аудитория 14-08.

С текстом диссертации можно ознакомиться в Фундаментальной библиотеке ФГБОУ ВПО Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова (Москва, Ломоносовский проспект, д. 27, сектор А).

Автореферат разослан "06" ноября 2013 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
Д 501.001.84 при МГУ
доктор физико-математических наук,
профессор А. О. Иванов

Общая характеристика работы

Актуальность темы

Область исследования диссертации относится к таким разделам алгебры как теория Галуа и теория представлений конечных групп. Диссертационная работа посвящена во многом изучению как взаимосвязей между фундаментальным понятием индекса Шура[1] неприводимого комплексного характера конечной группы и разделом теории Галуа, известным как задача погружения[2], так и доказательству отдельных новых результатов в каждой из перечисленных областей.

Представляет довольно большой интерес построение оценок индекса Шура неприводимого комплексного представления конечной группы относительно поля рациональных чисел. Существует множество подходов к решению данной проблемы. Все они так или иначе используют различные редукционные средства (наиболее важным из них является, пожалуй, теорема Р. Брауэра-Э. Витта[3]), и получаемые оценки могут быть трудно вычислимы, если про строение группы известно не очень много. Однако на практике приходится сталкиваться с необходимостью нетривиально оценивать индекс Шура "равномерно" по всем конечным группам заданного порядка или экспоненты и т.п. Такие "равномерные оценки" уже могут быть вычислены практически без использования какой-либо информации о внутреннем строении данной группы (во многом это относится к таблице характеров а также к p-локальному строению). Представляет интерес помимо оценок индекса Шура еще и нахождение по возможности меньшего по размерности над $\mathbb{Q}$ поля алгебраических чисел, в котором данное неприводимое комплексное представление реализуется. Например, вопрос существования такого поля в n-круговом поле, где n – порядок или экспонента группы, весьма нетривиален[4]. Проблемам "равномерных" оценок индекса Шура посвящены главы 3, 4.

[1] см., например, T. Yamada, *The Schur Subgroup of the Brauer Group*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. **397**, Springer-Verlag, Berlin, 1974.

[2] см., например, В. В. Ишханов, Б. Б. Лурье, Д. К. Фаддеев, *Задача погружения в теории Галуа*, Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., М., 1990.

[3] см., например, Ch. W. Curtis, I. Reiner, *Methods of representation theory*, v.2, Pure Appl. Math. (N.Y.), Wiley, New York, 1987, theorem 74.38.

[4] E. Spiegel, A. Trojan, "Minimal splitting fields in cyclotomic extensions", *Proc. Ams. Math. Soc.*, **87:1**, (1983), 33–37.

С другой стороны, теория задач погружения предоставляет дополнительные средства для исследования индекса Шура, так как хорошо известное условие согласности Д. К. Фаддеева-Х. Хассе[5, 6, 7] для задач погружения с абелевым ядром представляет собой по существу критерий равенства индекса Шура единице над фиксированным полем. Такая точка зрения используется в главе 3 для упрощения некоторых доказательств а также в главе 4 уже по существу. Можно, однако, на основании результатов из теории индекса Шура исследовать некоторые вопросы теории погружения. Примеры этому приводятся в главе 4.

Существует довольно интригующая проблема в теории погружения, касающаяся решений таких задач. В теории задач погружения решения наиболее естественно искать в классе алгебр Галуа. Это дает возможность особенно в случае абелева ядра использовать аппарат гомологической алгебры. Именно на этом пути А. В. Яковлевым[8] было найдено необходимое и достаточное условие существования решения задачи погружения в случае абелева ядра. Наиболее значительным применением теории погружения стало доказательство теоремы И. Р. Шафаревича о реализуемости конечной разрешимой группы в виде группы Галуа относительно произвольного поля алгебраических чисел[9, 10, 11, 12]. Это оказалось возможным потому, что в глобальных полях разрешимость задачи погружения с абелевым (теорема Д. К. Фаддеева-А. Шольца[13]) и, более общо, нильпотентным ядром[14] в смысле алгебр Галуа равносильна разрешимости в смысле полей. Последнее, к сожалению, возможно да-

[5] Б. Н. Делоне, Д. К. Фаддеев, "Исследования по геометрии теории Галуа", *Мат. сб.*, **15:2**, (1944), 243–284.

[6] H. Hasse, "Existenz und Mannigfaltigkeit Abelscher Algebren mit vorgegebener Galoisgruppe über einem Teilkörper des Grundkörpers", *Math. Nachr.*, **1:1**, (1948), 40–61.

[7] H. Hasse, "Existenz und Mannigfaltigkeit Abelscher Algebren mit vorgegebener Galoisgruppe über einem Teilkörper des Grundkörpers", *Math. Nachr.*, **1:4**, (1948), 213–217.

[8] А. В. Яковлев, "Задача погружения полей", *Изв. АН СССР, сер. матем.*, **28:3** (1964), 645–660.

[9] И. Р. Шафаревич, "О построении полей с заданной группой Галуа порядка l^α", *Изв. АН СССР, сер. матем.*, **18:3** (1954), 261–296.

[10] И. Р. Шафаревич, "Об одной теореме существования в теории алгебраических чисел", *Изв. АН СССР, сер. матем.*, **18:4** (1954), 327–334.

[11] И. Р. Шафаревич, "О задаче погружения полей", *Изв. АН СССР, сер. матем.*, **18:5** (1954), 389–418.

[12] И. Р. Шафаревич, "Построение полей алгебраических чисел с заданной разрешимой группой Галуа", *Изв. АН СССР, сер. матем.*, **18:6** (1954), 525–578.

[13] В. В. Ишханов, Б. Б. Лурье, Д. К. Фаддеев, *Задача погружения в теории Галуа*, Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., М., 1990, Гл. 3, §6.

[14] В. В. Ишханов, "О полупрямой задаче погружения с нильпотентным ядром", *Изв. АН СССР, сер. матем.*, **40:1** (1976), 3–25.

леко не всегда. Простейший пример – задача погружения конечного расширения конечных полей в поле с нециклической группой Галуа. Более сложный пример – погружение конечного p-расширения p-локальных полей[15] в поле с p-группой Галуа, число образующих которой больше числа образующих группы Демушкина[16, 17, 18] основного поля. В связи с этим представляет интерес проблема построения разрешимых задач погружения, все решения которых заведомо являются полями. Глава 2 полностью посвящена данному вопросу.

Наконец, в теории Галуа можно ставить естественный вопрос о размерности линейной оболочки над полем k корней сепарабельного многочлена $f(x) \in k[x]$. Довольно примечательно, что такая проблема имеет связи с теорией оптимального управления. В главе 5 приводятся некоторые общие результаты по данному вопросу а также изучаются частные случаи, имеющие отношение к задачам оптимального управления. Весьма примечательно, что и здесь используются некоторые результаты теории задач погружения.

Цель работы

Целью диссертации является построение равномерных оценок индекса Шура неприводимых комплексных представлений конечных групп заданной экспоненты или заданного порядка а также оптимальной равномерной оценки индекса Шура на классе конечных групп с известными простыми делителями порядка; построение бесконечной нетривиальной серии примеров задач погружения, у которых все решения являются полями; решение проблемы М. И. Зеликина-Л. В. Локуциевского[19] в некоторых частных случаях.

Методы исследования

В работе использованы методы алгебраической теории чисел, теории Галуа, теории погружения, гомологической теории, теории представлений конечных групп, теории индекса Шура.

[15] Д. Касселс, А. Фрелих, *Алгебраическая теория чисел*, Мир, М., 1969.

[16] С. П. Демушкин, "Группа максимального p-расширения локального поля", *Изв. АН СССР, сер. матем.*, **25:3** (1961), 329–346.

[17] С. П. Демушкин, "О 2-расширениях локального поля", *Сиб. мат. ж.*, **4:4** (1963), 951–956.

[18] С. П. Демушкин, "Топологические 2-группы с четным числом образующих и одним полным определяющим соотношением", *Изв. АН СССР, сер. матем.*, **29:1** (1965), 3–10.

[19] М. И. Зеликин, Л. В. Локуциевский, Р. Хильдебранд, "Геометрия окрестностей особых экстремалей в задачах с многомерным управлением", *Тр. МИАН*, **277**, (2012), 74–90, гипотеза 1.

Научная новизна

Все результаты диссертации являются новыми. Перечислим основные:

1. Получены равномерные оценки индекса Шура неприводимых комплексных представлений конечных групп заданного порядка или заданной экспоненты над полем рациональных чисел;

2. Найдена оптимальная равномерная оценка индекса Шура неприводимых комплексных представлений конечных групп, про которые известно лишь множество простых делителей порядка, над полем рациональных чисел;

3. Построена бесконечная нетривиальная серия примеров групповых расширений, для которых существует задача погружения, все решения которой суть поля;

4. Установлен критерий согласности[20] n-кругового расширения поля алгебраических чисел k, содержащегося в поле $\mathbb{Q}(\varepsilon_n)$. Приведен пример, когда такое расширение не является циклическим. Тем самым, в некоторых частных случаях улучшена теорема Д. М. Голдшмидта-И. М. Айзекса-Б. Фейна[21, 22];

5. Решена в частных случаях проблема М. И. Зеликина-Л. В. Локуциевского[23];

6. Даны оценки снизу числа линейно независимых над полем рациональных чисел корней многочленов Чебышева-Эрмита четной степени и многочленов $f(x^2)$, где $f(x)$ – обобщенный многочлен Чебышева-Лагерра[24].

Апробация работы

Результаты диссертации докладывались на следующих научных конференциях и семинарах:

[20] Д. Д. Киселев, "Об оценке индекса Шура неприводимых представлений конечных групп", *Мат. сб.*, **204:8**, (2013), 73–82.

[21] D. M. Goldschmidt, I. M. Isaacs. "Schur indices in finite groups", *J. Algebra*, **33** (1975), 191–199, theorem 1.

[22] B. Fein, "Schur indices and sums of squares", *Proc. Ams. Math. Soc.*, **51:1**, (1975), 31–34, theorem 2.

[23] М. И. Зеликин, Л. В. Локуциевский, Р. Хильдебранд, "Геометрия окрестностей особых экстремалей в задачах с многомерным управлением", *Тр. МИАН*, **277**, (2012), 74–90, гипотеза 1.

[24] F. Hajir, "On the Galois group of generalized Laguerre polynomials", *J. Theor. Nombres Bordeaux*, **17:2**, (2005), 517–525.

1. научно-исследовательский семинар кафедры высшей алгебры мехмата МГУ (Москва, 2011-2013 гг., неоднократно);
2. семинар "Избранные вопросы алгебры" кафедры высшей алгебры мехмата МГУ (Москва, 2009-2013 гг., неоднократно);
3. семинар "Геометрические методы в теории оптимального управления" кафедры общих проблем управления мехмата МГУ (Москва, октябрь, 2012 г.);
4. международный алгебраический симпозиум, посвященный 80-летию кафедры высшей алгебры механико-математического факультете МГУ и 70-летию профессора А. В. Михалева (Москва, 15–18 ноября 2010 г.);
5. международная конференция "Алгебра и комбинаторика", посвященная 60-летию чл.-корр. РАН профессора А. А. Махнева (Екатеринбург, 3–7 июня 2013 г.).

Публикации

Результаты автора по теме диссертации опубликованы в четырех работах [1]-[4].

Теоретическая и практическая ценность работы

Диссертация имеет теоретический характер. Ее результаты могут найти применение в теории погружения, теории представлений конечных групп, теории оптимального управления. Материалы диссертации могут быть использованы для чтения спецкурсов по теории погружения и ее применениям в теории индекса Шура.

Структура и объем диссертации

Диссертация состоит из введения и пяти глав. Главы подразделяются на разделы и подразделы. В главах $2, 4$ подразделы отсутствуют.

Диссертация написана на 121 странице. Список литературы состоит из 63 наименований.

Краткое содержание работы

Во введении затронута актуальность темы диссертации, ее структура, перечислены результаты автора.

В главе 1 подробно изложены результаты, не принадлежащие автору, но применяемые в работе. Это сделано для возможности автономного чтения диссертации. По теории индекса Шура излагаются следующие результаты: теорема Р. Брауэра-Э. Витта (теоремы 1.2, 1.3, подраздел 1.1.1), теорема М. Бенарда-М. Шахера (теоремы 1.4, 1.5, подраздел 1.1.2), теория С. Д. Бермана индекса Шура[25] (подраздел 1.1.3) в необходимом для диссертации объеме, результат Ю. Л. Баранника[26] (подраздел 1.1.4). По задаче погружения излагаются общие технические средства (подразделы 1.2.1-1.2.3), упрощенная концепция условия согласности (см. определение 1.12) вместе с необходимыми результатами А. В. Яковлева и Н. П. Зяпкова[27] об универсально согласных расширениях (подраздел 1.2.4); подраздел 1.2.5 содержит критерий разрешимости А. В. Яковлева[28] задачи погружения с абелевым ядром, специализированный для полей алгебраических чисел; подраздел 1.2.6 посвящен изложению результата Д. К. Фаддеева[29, 30] о погружении квадратичного расширения основного поля с характеристикой отличной от двух в алгебру Галуа с кватернионной группой.

Глава 2 посвящена ультраразрешимым задачам погружения (см. определение 2.1) и описанию классов сингулярных (см. определение 2.3) решений сопутствующих задач погружения первого рода по отношению к исходным. Именно наличие сингулярных решений влечет за собой существование ультраразрешимых задач погружения, ядро которых не содержится в группе Фраттини объемлющей группы. Введем соответствующие определения.

[25] С. Д. Берман, "Представления конечных групп над произвольным полем и над кольцами целых чисел", *Изв. АН СССР, сер. матем.*, **30** (1966), 69–132, §4.

[26] Ю. Л. Баранник, "О телах, возникающих в разложении рациональных групповых алгебр конечных групп порядка $p^\alpha q^\beta$", *Изв. вузов. Матем.*, **187:12**, (1977), 13–18.

[27] Н. П. Зяпков, А. В. Яковлев, "Универсально согласные расширения Галуа", *Зап. научн. сем. ЛОМИ*, **71** (1977), 133–152.

[28] А. В. Яковлев, "Задача погружения для числовых полей", *Изв. АН СССР, сер. матем.*, **31:2** (1967), 211–224.

[29] Д. К. Фаддеев, "Построение алгебраических областей, группой Галуа которых является группа кватернионов", *Уч. зап. ЛГУ*, **3:17** (1937), 17–23.

[30] Д. К. Фаддеев, "Построение полей алгебраических чисел, группой Галуа которых является группа кватернионных единиц", *ДАН СССР*, **47:6**, (1945), 404–407.

Определение (2.1). Разрешимая задача погружения, у которой все решения являются полями, называется ультраразрешимой.

Определение (2.3). Рассмотрим разрешимую задачу $(K/k,\, G,\, \varphi,\, N)$. Допустим существование собственной подгруппы A группы N, нормальной в G. Тогда задана сопутствующая задача погружения $(K/k,\, G/A,\, \varphi_1,\, N/A)$ первого рода, где $\varphi = \varphi_1\varphi_0$, а $\varphi_0\colon G \to G/A$ – канонический эпиморфизм. Решение L_1 данной сопутствующей задачи называется сингулярным по отношению к исходной задаче, если для любого решения L исходной задачи $L^A \neq L_1$. В противном случае L_1 называется регулярным по отношению к исходной задаче.

Теорема 2.1 использует локальную двойственность Тейта[31].

Теорема (2.1). *Рассмотрим разрешимую задачу* $(K/k,\, G,\, \varphi,\, N)$ *с абелевым ядром* N. *Обозначим* $F = \mathrm{Gal}(K/k)$. *Пусть* k *– локальное поле. Фиксируем собственную подгруппу (если существует)* A *группы* N, *нормальную в* G. *Тогда любая фиксированная система представителей (по модулю классов эквивалентных в узком смысле регулярных решений) классов эквивалентных в узком смысле сингулярных решений задачи* $(K/k,\, G/A,\, \varphi_1,\, N/A)$ *находится в биективном соответствии с элементами группы*

$$\mathrm{Hom}_F(A,\, K^*)/\,(\mathrm{Hom}_F(N,\, K^*)/\mathrm{Hom}_F(N/A,\, K^*)).$$

Рассмотрим конечное расширение Галуа глобальных полей E/L. Фиксируем конечное множество S неархимедовых точек поля E, соответствующие пополнения по которым полей E и L (после ограничения точки поля E), задают разветвленные расширения. Положим $C_{E,S} := J_E/E^*V_{E,S}$, где $V_{E,S} = \prod\limits_{\mathfrak{p}\notin S} V_{\mathfrak{p}}$, а $V_{\mathfrak{p}}$ – группа единиц $\mathfrak{p}$-пополнения поля E. Штрих обозначает переход к двойственной группе.

Аналогичными теореме 2.1 рассуждениями, но только с применением глобальной двойственности Тейта[32], доказывается следующая

Теорема (2.2). *Рассмотрим разрешимую задачу* $(K/k,\, G,\, \varphi,\, N)$ *с абелевым ядром* N. *Обозначим* $F = \mathrm{Gal}(K/k)$. *Пусть* k *– глобальное поле. Пусть* S *–*

[31] В. В. Ишханов, Б. Б. Лурье, Д. К. Фаддеев, *Задача погружения в теории Галуа*, Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., М., 1990, теорема Д.3.2.

[32] В. В. Ишханов, Б. Б. Лурье, Д. К. Фаддеев, *Задача погружения в теории Галуа*, Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., М., 1990, следствие к теореме Д.3.5.

конечное множество точек поля K, содержащее все простые делители экспоненты N а также все разветвленные точки поля K над k. Фиксируем собственную подгруппу (если существует) A группы N, нормальную в G. Тогда любая фиксированная система представителей (по модулю классов эквивалентных в узком смысле регулярных решений) классов эквивалентных в узком смысле сингулярных решений задачи $(K/k,\, G/A,\, \varphi_1,\, N/A)$ находится в биективном соответствии с элементами группы

$$(\mathrm{Hom}_F(A,\, C_{K,S})/\left(\mathrm{Hom}_F(N,\, C_{K,S})/\mathrm{Hom}_F(N/A,\, C_{K,S})\right))'.$$

Укажем простейшее применение теорем 2.1 и 2.2. Рассмотрим расширение Галуа K/k локальных полей с группой F. Фиксируем также нечетное число n, такое что для всякого простого $p \mid n$ примитивный корень степени p из единицы не содержится в K. Тогда произвольная задача погружения расширения K/k в алгебру Галуа с группой G, имеющая абелево ядро A экспоненты n, ультраразрешима тогда и только тогда, когда $A \leqslant \Phi(G)$. Это и неудивительно – если K/k_p – силовское p-подрасширение для некоторого простого $p \mid n$, то $\varepsilon_p \notin k_p$, в частности группа Галуа максимального p-расширения поля k_p является свободной про-p-группой. Это означает, что наша задача всегда разрешима, равно как и любая присоединенная к ней.

Следующая теорема является ключевой в построении бесконечной нетривиальной (т.е. ядро любой такой задачи не должно содержаться в группе Фраттини объемлющей группы) серии ультраразрешимых задач погружения.

Теорема (2.4). *Пусть дана ультраразрешимая задача $(K/k,\, G,\, \varphi,\, N)$. Поднимем ее до задачи $(L/k,\, G \times_F F_1,\, \overline{\varphi},\, N)$, где $F = \mathrm{Gal}(K/k)$, $F_1 = \mathrm{Gal}(L/k)$. В указанных ниже достаточных условиях поднятая задача будет ультраразрешимой: либо (1) композиционные факторы группы $\mathrm{Gal}(L/K)$ являются неабелевыми простыми группами, а все подгруппы группы N нормальны в N; либо (2) группа $\mathrm{Gal}(L/K)$ разрешима, а N совпадает со своим коммутантом.*

По-видимому не существует примеров задач погружения, удовлетворяющих условию (2) теоремы 2.4, однако доказать или опровергнуть это утверждение весьма непросто. В диссертации рассматриваются случаи, когда ядро N является знакопеременной группой степени не ниже 4 или группой $L_2(p^2)$

для простого p. В этих случаях действительно не существует примеров ультраразрешимых задач погружения.

Теорема (2.3). *Пусть $(K/k,\, G,\, N)$ – разрешимая задача погружения над произвольным полем k. Если N – знакопеременная группа степени не ниже 4 либо группа $L_2(p^2)$ для некоторого простого p, то в качестве решения всегда можно выбрать алгебру Галуа, не являющуюся полем.*

Задачи погружения, удовлетворяющие условию (1) теоремы 2.4, построить можно, и на этом основана следующая

Теорема (2.5). *Существует семейство неабелевых простых групп $\mathfrak{G}$, являющееся бесконечным, и такое, что для произвольной группы N_1, композиционные факторы которой принадлежат $\mathfrak{G}$, задача погружения для произвольного расширения*

$$1 \longrightarrow N_1 \longrightarrow F_1 \xrightarrow{\theta} F = \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\sqrt{3})/\mathbb{Q}) \longrightarrow 1$$

имеет поле-решение L. В частности, задача $(L/\mathbb{Q},\, Q_8 \times_F F_1,\, \overline{\varphi},\, N)$ является ультраразрешимой, но при этом $N \nleq \Phi(Q_8 \times_F F_1)$.

Теорема 2.5 существенно использует так называемую *GAR-реализацию* над полем рациональных чисел некоторых конечных простых групп[33].

Глава 3 посвящена оценкам индекса Шура неприводимых представлений конечных групп, которые можно вывести с помощью теоремы Голдшмидта-Айзекса-Фейна[34, 35], а также анализом дополнительных условий, необходимых для справедливости данной теоремы.

Теорема (Д. М. Голдшмидт, И. М. Айзекс). *Пусть дана произвольная конечная группа G экспоненты n, k – поле нулевой характеристики, такое что $\mathrm{Gal}(k(\varepsilon_n)/k)$ циклическая. Тогда для любого неприводимого комплексного характера $\chi \in \mathrm{Irr}\, G$ справедлива оценка $m_k(\chi) \mid 2$. Случай $m_k(\chi) = 2$ возможен лишь при $\varepsilon_4 \notin k$.*

В формулировке теоремы Голдшмидта-Айзекса присутствует дополнительное условие: $\sqrt{-1} \in k$. Рассматривается простой пример того, что условие

[33] G. Malle, B. H. Matzat, *Inverse Galois theory*, Springer-Verlag, N.Y., 1999, Ch.IV, §3, corollary 3.7, Ch.IV, §4, theorem 4.3, Ch.IV, §3.1.

[34] D. M. Goldschmidt, I. M. Isaacs. "Schur indices in finite groups", *J. Algebra*, **33** (1975), 191–199.

[35] B. Fein, "Schur indices and sums of squares", *Proc. Ams. Math. Soc.*, **51:1**, (1975), 31–34.

$\sqrt{-1} \in k$ существенно для справедливости теоремы. Для краткости будем в дальнейшем называть это условие условием сильной невещественности. Так как группа $\mathrm{Gal}(k(\varepsilon_n)/k)$ каноническим образом отождествляется с подгруппой группы $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\varepsilon_n)/\mathbb{Q})$, то по полю k можно однозначно (если фиксировать данное каноническое отождествление) построить поле $F \subset \mathbb{Q}(\varepsilon_n)$, такое что $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\varepsilon_n)/F) \cong \mathrm{Gal}(k(\varepsilon_n)/k)$; более того, $\varepsilon_4 \in k$ тогда и только тогда, когда $\varepsilon_4 \in F$.

Определение (3.1). Пусть поле F, однозначно определяемое по полю k, обладает свойством невещественности: $F \not\subseteq \mathbb{R}$. Будем говорить в этом случае, что поле k удовлетворяет условию слабой невещественности.

Однако, условия слабой невещественности недостаточно для справедливости теоремы Голдшмидта-Айзекса.

Пример (3.1). Положим $G := \mathbb{Z}_{31} \times Q_8$, где Q_8 обозначает группу кватернионов порядка 8. Легко видеть, что $\exp G = 124 = 31 \cdot 4$. Возьмем поле $k := \mathbb{Q}(\varepsilon_{31})$. Тогда для поля k выполнено условие слабой невещественности, но не выполнено условие сильной невещественности. Далее, $\mathrm{Gal}(k(\varepsilon_{124})/k) = \mathrm{Gal}(k(i)/k)$ – циклическая группа порядка 2.

Б. Фейном[36] установлен замечательный достаточный признак применимости теоремы Голдшмидта-Айзекса. Он состоит в том, что -1 должна быть представима в виде суммы двух квадратов элементов основного поля k. Оказывается, существует очень мало случаев, когда данное условие нарушается. Из этого замечания сразу будет следовать, что для вычисления оценки индекса Шура это не играет никакой роли – можно дать наилучшую возможную оценку, обеспечиваемую теоремой Голдшмидта-Айзекса, но при этом не обращать внимания на какие-либо дополнительные условия. Этот вывод сделан в теореме 3.5.

Предложение (3.1). *Пусть* $\mathrm{char}\, k = 0$, n *– некоторое сравнимое с нулем по модулю* 4 *натуральное число, такое что* $\mathrm{Gal}(k(\varepsilon_n)/k)$ *– циклическая группа. Если* -1 *не представляется в виде суммы двух квадратов элементов поля* k, *то* 2*-силовская подгруппа группы* $\mathrm{Gal}(k(\varepsilon_n)/k)$ *имеет порядок* 2.

[36] B. Fein, "Schur indices and sums of squares", *Proc. Ams. Math. Soc.*, **51:1**, (1975), 31–34, theorem 2.

Условие представимости -1 в виде суммы двух квадратов элементов поля k очень легко охарактеризовать в случае, когда k является полем алгебраических чисел. Это сделано в работе[37].

Предложение (3.2). *Пусть k – поле алгебраических чисел. -1 представима в виде суммы двух квадратов элементов поля k тогда и только тогда, когда, во-первых, архимедово пополнение поля k дает поле комплексных чисел, а, во-вторых, $(k_{\mathfrak{p}_2}/\mathbb{Q}_2) \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 2)$, где $\mathfrak{p}_2$ – произвольная простая точка поля k, лежащая над (2).*

Следующая теорема помогает охарактеризовать отличие условия Фейна от условия слабой невещественности для подполей в $\mathbb{Q}(\varepsilon_n)$ (на практике только такие подполя интересны для рассмотрения).

Заметим, что в силу китайской теоремы об остатках справедливо разложение:

$$\mathbb{Z}_n^* = A_1 \times \ldots \times A_s,$$

где $n = p_1^{k_1} \ldots p_s^{k_s}$, $A_i \cong \mathbb{Z}^*_{p_i^{k_i}}$, $p_1 = 2$.

Теорема (3.2). [38] *Пусть G – конечная группа экспоненты n. Пусть также K – поле нулевой характеристики с условием слабой невещественности, такое что группа $\mathrm{Gal}(K(\varepsilon_n)/K)$ является циклической 2-группой. Пусть также $\mathrm{Gal}(K(\varepsilon_n)/K) \cap A_1 = \{1\}$. Тогда для любого $\chi \in \mathrm{Irr}\, G$ выполнено $m_K(\chi) = 1$.*

Замечание (3.1). В свете предложения 3.1 и теоремы 3.2 интересно понять, как в сущности зависит нарушение условия Фейна от величины 2-части числа n и условия слабой невещественности. Если $n_2 \leqslant 2$, то условие Фейна несущественно. Будем поэтому считать, что $n_2 \geqslant 4$. Легко видеть, что выполнение условий теоремы 3.2 для поля K влечет в этом случае выполнение условий Фейна для K. В самом деле, возьмем в качестве G группу вида $Q_8 \times Z_{n_2} \times Z_{n_{2'}}$ с характером $\zeta = \chi \otimes 1_{Z_{n_2}} \otimes 1_{Z_{n_{2'}}}$, где χ – двумерный неприводимый комплексный характер группы Q_8. Выполнение условий теоремы 3.2 влечет равенство

[37] B. Fein, D. Gordon, J. Smith, "On the representation of -1 as sum of two squares in an algebraic number field", *J. Number Theory*, **3**, (1971), 310–315.

[38] В оригинальной статье [1] формулировка данной теоремы содержит опечатку, однако доказательство корректно.

$m_K(\zeta) = 1$, откуда (см. доказательство леммы 3.1) -1 представима в виде суммы двух квадратов элементов поля K.

Для простоты считаем в дальнейшем, что $K \subset \mathbb{Q}(\varepsilon_n)$. Тем самым, условие слабой невещественности для поля K оказывается эквивалентным условию $K \not\subseteq \mathbb{R}$; в частности, данное условие необходимо для справедливости условия Фейна (см. предложение 3.2). Предположим, что $n_2 \geqslant 8$. В этом случае условие $K \not\subseteq \mathbb{R}$ не только необходимо, но и достаточно для справедливости условия Фейна. В самом деле, если это не так, то $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\varepsilon_n)/K) \cong Z_2$, согласно предложению 3.1, причем $\mathbb{Q}(\varepsilon_n) = K(\varepsilon_4)$. Согласно предположению а также предложению 3.2 размерность $(K \cdot \mathbb{Q}_2 : \mathbb{Q}_2)$ нечетна. Это означает, что $\mathbb{Q}_2(\varepsilon_{n_2}) \cap K \cdot \mathbb{Q}_2 = \mathbb{Q}_2$. Так как $(K \cdot \mathbb{Q}_2)(\varepsilon_4) = (K \cdot \mathbb{Q}_2) \cdot \mathbb{Q}_2(\varepsilon_{n_2})$, то группа $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}_2(\varepsilon_{n_2})/\mathbb{Q}_2)$ должна быть циклической, что невозможно при $n_2 \geqslant 8$.

Предложения 3.1, 3.2, теорема 3.2 а также замечание 3.1 показывают, что на практике нет никакой необходимости проверять какие-либо дополнительные условия применимости теоремы Голдшмидта-Айзекса для получения оценок индекса Шура над полем рациональных чисел, стремящихся к оптимальным. В свете вышесказанного никаких идейно отличных от примера 3.1 возможностей для невыполнения условия Фейна при выполненном условии невещественности нет. Приведем чуть более просто проверяемый признак, достаточный для справедливости теоремы Голдшмидта-Айзекса, но, однако, более слабый по сравнению с условием Фейна.

Теорема (3.4). *Пусть G – конечная группа экспоненты n. Пусть далее поле нулевой характеристики K удовлетворяет условию слабой невещественности, причем $\mathrm{Gal}(K(\varepsilon_n)/K)$ – циклическая 2-группа. Если*

$$\nu_2\left(\min\left\{ t \in \mathbb{N} \mid \frac{2^t - 1}{n_{2'}} \in \mathbb{N}\right\}\right) \neq 0,$$

то для любого $\chi \in \mathrm{Irr}\, G$ выполнено $m_K(\chi) = 1$.

Следующая теорема строит "равномерную" оценку индекса Шура неприводимых комплексных характеров конечных групп порядка (или экспоненты) n.

Теорема (3.5). *Пусть G – конечная группа порядка (или экспоненты) n, а m – порядок какой-нибудь максимальной циклической подгруппы в группе $\mathbb{Z}_n^*$. Если $n \neq 4$, то $m_{\mathbb{Q}}(\chi) \mid \frac{\varphi(n)}{m}$ для любого $\chi \in \mathrm{Irr}\, G$.*

Следующая теорема посвящена Э. Галуа.

Теорема (3.6). *Пусть G – конечная группа нечетного порядка n. Пусть далее $n = p_1^{k_1} \dots p_s^{k_s}$ – каноническое разложение числа n на простые множители. Обозначим $m = p_1 \dots p_s$. Если правильный m-угольник допускает построение с помощью циркуля и линейки, то для любого характера $\chi \in \operatorname{Irr} G$ имеем $m_{\mathbb{Q}}(\chi) = 1$.*

Глава 4 также посвящена оценкам индекса Шура. В связи с теоремой 3.5 вводится и изучается понятие согласного кругового расширения.

Определение (4.1). Пусть k – числовое поле. Расширение $k(\varepsilon_n)/k$ называется согласным, если для любого простого делителя p числа n силовское p-подрасширение $k(\varepsilon_n)/k_p$ согласно. p-расширение $k(\varepsilon_n)/k$ называется согласным, если для любой простой неархимедовой точки $\mathfrak{q}$ поля k, не лежащей над p, пополненное расширение $k_{\mathfrak{q}}(\varepsilon_n)/k_{\mathfrak{q}}$ является циклическим.

Класс универсально согласных n-круговых расширений числовых полей периода $m \mid n$ как легко следует из[39] содержится в классе согласных n-круговых расширений. Поэтому согласные расширения более приспособлены для теории индекса Шура.

Доказывается критерий согласности расширения для случая подполя в $\mathbb{Q}(\varepsilon_n)$ (напомним, что для оценок индекса Шура интересен именно такой случай).

Предложение (4.2). *p-расширение $\mathbb{Q}(\varepsilon_n)/k$ согласно тогда и только только тогда, когда для любого нечетного простого $q \mid n$, такого что $q \neq p$, $p \mid (q-1)$ либо $\mathbb{Q}_q(\varepsilon_n)/k_{\mathfrak{q}}$ – универсально согласное расширение периода p, либо $\varepsilon_{n_{q'}} \in k_{\mathfrak{q}}$. Здесь $\mathfrak{q}$ – произвольная точка поля k, лежащая над q.*

Универсально согласные расширения из предложения 4.2 полностью охарактеризованы[40], поэтому предложение 4.2 является полноценным арифметическим критерием. Важность предложения 4.2 обусловлена следующим результатом.

[39] Н. П. Зяпков, А. В. Яковлев, "Универсально согласные расширения Галуа", *Зап. научн. сем. ЛОМИ*, **71** (1977), 133–152, теоремы 5, 6 и комментарии к ним.

[40] Там же, теорема 6.

Предложение (4.1). *Согласность расширения числовых полей $k(\varepsilon_n)/k$ влечет за собой для произвольной конечной группы G экспоненты (или порядка) n и произвольного неприводимого характера $\chi \in \operatorname{Irr} G$ оценку $m_k(\chi) \mid 2$.*

Приводится пример согласного нециклического расширения.

Пример (4.1). Рассмотрим произвольную конечную группу G, порядок которой имеет вид $n = p^\alpha q^\beta$, где $2 < p < q$, $p^\alpha \mid (q-1)$, $\alpha \geqslant 2$. Применение теоремы 4.3 (см. ниже) дает оценку $m_{\mathbb{Q}}(\chi) \mid p^\alpha$ для произвольного неприводимого характера $\chi \in \operatorname{Irr} G$. Применение теоремы 3.5 дает $m_{\mathbb{Q}}(\chi) \mid p^{\alpha-1}$.

Рассмотрим цепочку включений

$$\mathbb{Q} \subset k \subset \mathbb{Q}(\varepsilon_n),$$

где $k = \mathbb{Q}(\varepsilon_n)^{\operatorname{Syl}_p(\operatorname{Gal}(\mathbb{Q}(\varepsilon_n)/\mathbb{Q}))}$. Легко видеть, что $\varepsilon_{n_p} \in k_{\mathfrak{q}}$ для произвольной простой точки $\mathfrak{q}$ поля k, лежащей над q. Действительно, в силу $p^\alpha \mid (q-1)$ имеем даже $\varepsilon_{n_p} \in \mathbb{Q}_q$. Наконец, заметим нецикличность группы $\operatorname{Gal}(\mathbb{Q}(\varepsilon_n)/k)$.

Предложение 4.1 усиливает тем самым теорему Голдшмидта-Айзекса.

Нередко на практике возникает потребность оценить индекс Шура неприводимого комплексного характера некоторой конечной группы, про которую известна лишь информация о простых делителях порядка. В таком случае естественная оценка является оптимальной.

Теорема (4.3). [41] *Рассмотрим для конечного множества простых чисел π класс $\mathfrak{G}_\pi$ конечных групп вида*

$$\mathfrak{G}_\pi := \{G : |G| = \prod_{p \in \pi} p^{t_p},\ t_p \in \mathbb{N}\}.$$

Если $|\pi| > 1$, либо $\pi = \{p \neq 2\}$, то оптимальной равномерной оценкой индекса Шура над полем $\mathbb{Q}$ неприводимых характеров групп класса $\mathfrak{G}_\pi$ является

$$m_{\mathbb{Q}}(\chi) \mid [\{(p-1)_\pi : p \in \pi,\ p \neq 2\}]\ \forall\, G \in \mathfrak{G}_\pi,\ \forall\, \chi \in \operatorname{Irr} G.$$

Если же $\pi = \{2\}$, то

$$m_{\mathbb{Q}}(\chi) \mid 2,\ \forall\, G \in \mathfrak{G}_\pi,\ \forall\, \chi \in \operatorname{Irr} G.$$

[41] Для натуральных чисел $a_1, \ldots, a_k$ символом $[a_1, \ldots, a_k]$ обозначается их наименьшее общее кратное.

С помощью теории индекса Шура устанавливается универсальная согласность n-круговых p-расширений p-локальных полей, которую непосредственно проверить довольно затруднительно.

Теорема (4.2). *Рассмотрим p-расширение p-локальных полей $k(\varepsilon_n)/k$. Если $p = 2$, то потребуем $\sqrt{-1} \in k$. Расширение $k(\varepsilon_n)/k$ является универсально согласным периода n.*

Наконец, результаты **главы 5** посвящены оценке снизу размерности векторного пространства над полем k, порожденного корнями некоторого многочлена из кольца $k[x]$. Результаты раздела 5.1 не принадлежат автору. Они приведены для возможности автономного чтения диссертации.

Определение (5.1). Многочлены

$$L_n^{(\alpha)}(x) := (-1)^n \sum_{j=0}^{n} \binom{n+\alpha}{n-j} \frac{(-x)^j}{j!},$$

определенные для всех действительных значений $\alpha \in \mathbb{R}$, называются обобщенными многочленами Чебышева-Лагерра.

Теорема (5.4). *Пусть $\alpha \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}_{<0}$, либо $\alpha = 1 - n - r$ для некоторого $r \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$. Тогда для всех натуральных n, кроме, быть может, конечного числа, любая система из $\left[\frac{n+1}{2}\right]$ корней многочлена $L_n^{(\alpha)}(x^2)$, квадраты любых двух элементов которой различны, линейно независима над $\mathbb{Q}$.*

В следующей теореме $H_n(x)$ обозначает многочлен Чебышева-Эрмита степени n.

Теорема (5.5). *При $n > 12$ многочлены $H_{2n}(x)$ и $\frac{1}{x}H_{2(n+1)}(x)$ удовлетворяют свойству: для каждого указанного многочлена любая подсистема из $\left[\frac{n+1}{2}\right]$ его корней, квадраты любых двух элементов которой различны, линейно независима над $\mathbb{Q}$.*

Теоремы 5.4, 5.5 основаны на применении следующего общего результата.

Лемма (5.1). *Пусть $a(x) \in k[x]$ – сепарабельный многочлен степени $n-1$ над полем k с отличной от 2 характеристикой, где $n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 5}$. Пусть далее $\mathrm{Gal}_k(a) \cong S_{n-1}$, либо $\mathrm{Gal}_k(a) \cong A_{n-1}$. В этом случае любые $\left[\frac{n}{2}\right]$ корня многочлена $A(x) := a(x^2)$, квадраты которых попарно различны, линейно независимы над k.*

Представляется весьма любопытным, что задача об оценке снизу размерности векторного пространства, порожденного над k корнями некоторого многочлена из $k[x]$, находит свое применение в теории задач оптимального управления. Для понимания формулировки теоремы 5.8 (см. ниже) приведем некоторые результаты М. И. Зеликина и Л. В. Локуциевского.

Рассмотрим оптимизационную задачу

$$J(x) = \int_0^{+\infty} \big\langle x, Cx \big\rangle \, dt \to \min \tag{1}$$

на траекториях управляемой системы

$$\begin{aligned} &x^{(q)} = u, \quad |u| \leqslant 1, \quad x \in V, \quad u \in U = V; \\ &x^{(k)}(0) = x_k^0, \text{ при } k \leqslant q-1. \end{aligned}$$

Здесь V – евклидово пространство со скалярным произведением $\big\langle \cdot, \cdot \big\rangle$, а C – некоторый самосопряженный линейный оператор. Функция $x(t)$ считается абсолютно непрерывной вместе со своими $2q-1$ производными. Управление $u(t) \in L_1(0; +\infty)$ – измеримая функция. Прежде сформулируем доказанную ранее[42] теорему о траекториях, не покидающих собственное подпространство V_j формы C. Любую двумерную плоскость L в V_j мы будем рассматривать как комплексную плоскость[43] $\mathbb{C}$. Итак,

Теорема (5.2). [44] *В любой двумерной плоскости $L \subseteq V_j$, содержащей 0, есть $[q/2]$ пар оптимальных траекторий*[45] *задачи* (1), *имеющих вид*

$$x(t) = \Big(A_k t^{2q} \exp\Big\{ \pm i\alpha_k \ln|t| \Big\} \Big)^{(q)}, \; u(t) = \exp\Big\{ \pm i\alpha_k \ln|t| \Big\}, \tag{2}$$

где $\alpha_k \in \mathbb{R}_+$ различны и находятся из условий

$$\operatorname{Im} P_q(\alpha) = 0, \quad (-1)^{q+1} \operatorname{Re} P_q(\alpha) > 0, \tag{3}$$

а коэффициенты $A_k \in \mathbb{R}_+$ находятся из условия $(-1)^{q+1}\mathrm{Re}P_q(\alpha_k) = 1/A_k$. Здесь

[42] М. И. Зеликин, Л. В. Локуциевский, Р. Хильдебранд, "Геометрия окрестностей особых экстремалей в задачах с многомерным управлением", *Тр. МИАН*, **277**, (2012), 74–90.

[43] Комплексная структура на L выбирается согласовано с евклидовой структурой на $\mathbb{R}^q$.

[44] В оригинальной работе формулировка данной теоремы содержит опечатку, хотя доказательство корректно.

[45] С точностью до поворота и сдвига по времени.

$$P_q(\alpha) = \big(2q + i\alpha\big)\big((2q-1) + i\alpha\big) \dots \big(1 + i\alpha\big). \tag{4}$$

Если q нечетно, то в L есть еще одна траектория вида $x = \frac{t^q}{q!}$ и $u = 1$.

Отметим, что в решениях (2) управление совершает счетное число оборотов по окружности $L \cap \{|u| = 1\}$ при $t \to 0$ за конечное время. Сама траектория $x(t)$ представляет собой логарифмическую спираль, которая тоже проходится за конечное время.

В некоторых случаях линейные комбинации решений (2) дают новые оптимальные решения задачи (1), управление в которых уже двигается не по окружности, а по тору, вложенному в сферу $|u| = 1$. Для отыскания всех траекторий такого типа мы воспользуемся группой Ли симметрий данной задачи и выделим семейства траекторий, не выходящий за пределы одной орбиты. Для этого выпишем систему принципа максимума. Положим

$$x_1 = x,\ x_1' = x_2, \dots,\ x_{q-1}' = x_q$$

Тогда гамильтониан (функция Понтрягина) имеет вид ($p_1, \dots, p_q$ – сопряженные переменные)

$$H = -\lambda_0 \big\langle Cx_1, x_1 \big\rangle + \big\langle p_1, x_2 \big\rangle + \dots + \big\langle p_q, u \big\rangle.$$

Нетрудно показать, что $\lambda_0 \neq 0$. Положив $\lambda_0 = \frac{1}{2}$, получаем

$$p_1' = Cx_1,\ p_2' = -p_1, \dots, p_q' = -p_{q-1} \text{ и } u = p_q/|p_q|$$

Вид этой системы сильно упроститься, если обозначить

$$z_k = (-1)^{q-k} p_{q-k+1} \text{ и } z_{q+k} = Cx_k \text{ при } k \leqslant q. \tag{5}$$

Тогда $x = C^{-1} z_{q+1}$ и

$$z_1' = z_2;\ z_2' = z_3; \dots;\ z_{2q}' = Cu;\ u = (-1)^{q+1} \frac{z_1}{|z_1|} \tag{6}$$

Данная система обладает следующими симметриями:

1. Группа $G_1 = SO(V_1) \times SO(V_2) \times \dots \times SO(V_s) \subseteq SO(V)$ действует на z_k и u одновременными поворотами и переводит векторы скоростей (а значит и решения) системы (6) в себя.

2. Группа $G_2 = \mathbb{R}_+$ действует масштабированием: пусть $\lambda \in \mathbb{R}_+$ тогда $z_k \mapsto \lambda^{2q-k+1} z_k$. На самом деле, вектор скорости системы (6) удлиняется в λ раз при этом действии. Однако, интегральные кривые по-прежнему переходят в интегральные кривые (только скорость движения по ним возрастает в λ раз).

Теорема (5.3). *Рассмотрим любой набор двумерных плоскостей $L_m \subseteq V_{j_m}$, $m = 1, \ldots, N$, где V_{j_m} – какие-то различные*[46] *собственные подпространства формы C. Если набор собственных значений $\lambda_{j_1}, \ldots, \lambda_{j_N}$ формы C удовлетворяет условию*

$$\frac{P_q(\alpha_{j_1})}{\lambda_{j_1}} = \frac{P_q(\alpha_{j_2})}{\lambda_{j_2}} = \ldots = \frac{P_q(\alpha_{j_N})}{\lambda_{j_N}} = \mu.$$

для каких-то различных α_{j_m}, то любая траектория вида

$$\begin{aligned} z_1(t) &= \sum_{m=1}^{N} b_m t^{2q} \exp\Big\{ \pm i\alpha_{j_m} \ln|t| \Big\} y_m, \\ u(t) &= \mu \sum_{m=1}^{N} b_m \exp\Big\{ \pm i\alpha_{j_m} \ln|t| \Big\} y_m, \end{aligned} \tag{7}$$

является оптимальной для задачи (1) при любом выборе единичных векторов $y_m \in L_m$ и ненулевых чисел $b_m \in \mathbb{R}$, лишь бы $\mu^2 \sum_{m=1}^{N} b_m^2 = 1$.

Более того, таким способом описываются все возможные (с точностью до сдвига по времени) оптимальные траектории задачи (1), не покидающие какую-либо фиксированную орбиту группы $G = G_1 \times G_2$.

Теорема (5.8). *При каждом $n = \overline{4,\,15}$ в соответствующей задаче оптимального управления 1 (при надлежащем выборе согласно теореме 5.3 матрицы C) существует оптимальное решение, управление которого проходит всюду плотную обмотку k-мерного тора ($k \leqslant \left[\frac{n}{2}\right]$). Такая обмотка (точнее ее половина, соответствующая положительному направлению времени) целиком проходится за конечное время. Оптимальное решение представляет собой логарифмическую спираль, которая также проходится за конечное время.*

[46]Случай $N = 1$ не исключается. В этом случае подойдет любое собственное значение λ_j формы C, лишь бы $\dim V_j \geqslant 2$.

Благодарности

Автор считает своим приятным долгом выразить признательность коллективу кафедры высшей алгебры за предоставленную возможность неоднократного выступления на научно-исследовательском семинаре. Хочется также поблагодарить научного руководителя к.ф.-м.н. доцента И. А. Чубарова за внимание к работе, посильную помощь.

Автор благодарит чл.-корр. РАН д.ф.-м.н. профессора М. И. Зеликина и к.ф.-м.н. ассистента Л. В. Локуциевского за предоставленную возможность проиллюстрировать теорию Галуа на примере задачи оптимального управления.

Работы автора по теме диссертации

[1] Д. Д. Киселев, "Поля разложения конечных групп", *Изв. РАН. Сер. мат.*, **76:6**, (2012), 95–106.

[2] Д. Д. Киселев, Б. Б. Лурье, "Ультраразрешимость и сингулярность в проблеме погружения", *Записки научных семинаров ПОМИ*, **414**, (2013), 113–126.

[3] Д. Д. Киселев, "Об оценке индекса Шура неприводимых представлений конечных групп", *Мат. сб.*, **204:8**, (2013), 73–82.

[4] Д. Д. Киселев, "Примеры задач погружения, у которых решения только поля", *УМН*, **68:4**, (2013), 181–182.

В работе [2] соавтору принадежат: исследование условия согласности в задаче $(k(\sqrt{d})/k,\ Q_8,\ \varphi,\ Z_4)$ для $\operatorname{char} k \neq 2$, $d \in k^*/k^{*2}$, вводная часть а также замечания по поводу универсально разрешимых задач.

Диссертанту в работе [2] принадлежат: доказательство теоремы 2, теоремы 3 и теоремы 4.

Теорема 1 получена авторами совместно.