ФГБОУ ВПО МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ им. М. В. ЛОМОНОСОВА

На правах рукописи

Канунников Андрей Леонидович

Градуированные кольца частных

Специальность 01.01.06 — математическая логика, алгебра и теория чисел

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Москва 2013

Работа выполнена на кафедре высшей алгебры
Механико-математического факультета ФГБОУ ВПО „Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова“.

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук, профессор Михалёв Александр Васильевич.
Официальные оппоненты:	Кожухов Игорь Борисович, доктор физико-математических наук, профессор (ФГБОУ ВПО „Национальный исследовательский университет „МИЭТ“).
	Туганбаев Аскар Аканович, доктор физико-математических наук, профессор (ФГБОУ ВПО „Российский экономический университет имени Г. В. Плеханова“).
Ведущая организация:	ФГБОУ ВПО „Тульский государственный педагогический университет имени Л. Н. Толстого“.

Защита диссертации состоится 6 декабря 2013 года в 16 часов 45 минут на заседании диссертационного совета Д 501.001.84 на базе ФГБОУ ВПО „Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова“ по адресу: 119991, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д. 1, ФГБОУ ВПО „Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова“, Механико-математический факультет, аудитория 14-08.

С диссертацией можно ознакомиться в Фундаментальной библиотеке ФГБОУ ВПО „Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова“ по адресу: Москва, Ломоносовский проспект, д. 27, сектор А, 8 этаж.

Автореферат разослан 6 ноября 2013 года.

Учёный секретарь диссертационного
совета Д 501.001.84 при МГУ,

доктор физико-математических наук,
профессор

А. О. Иванов

Общая характеристика работы

Диссертация посвящена градуированным кольцам частных градуированных по группе колец. В диссертации доказаны градуированные аналоги теоремы Фейса—Утуми о порядках в матричных кольцах, теорем Голди о порядках во вполне приводимых кольцах, а также построено и исследовано ортогональное градуированное пополнение — аналог кольца частных, лежащего в основе теории ортогональной полноты Бейдара—Михалёва. Все кольца предполагаются ассоциативными с ненулевой единицей, а модули — унитальными.

Актуальность темы. В последнее время отмечается значительный интерес к кольцам и другим алгебраическим структурам, снабжённым градуировкой. Это объясняется тем, что многие важные классы колец допускают естественную градуировку, например, кольца многочленов, матричные кольца, групповые кольца. В 1979 и 2000 годах вышли монографии[1] [2], посвящённые кольцам и модулям, градуированным по группе, причём в работе[1] рассматривалась только градуировка по группе $\mathbb{Z}$ целых чисел. В 1980-х годах появилось множество работ, посвящённых модулям, кольцам, алгебрам, градуированным по произвольной группе или полугруппе.

При построении структурной теории градуированных колец важную роль играют градуированные кольца частных — такие кольца частных, которые естественным образом наследуют градуировку кольца. Каждое градуированное кольцо R обладает полным правым градуированным кольцом частных $Q^{gr}(R)$, которое является градуированным аналогом полного правого кольца частных $Q(R)$ и может быть построено аналогичными способами[2] [3] [4]. Другим градуированным правым кольцом частных является классическое $Q^{gr}_{cl}(R)$, которое строится с помощью локализации относительно системы всех однородных регулярных элементов кольца R и существует при выполнении условий Оре. Одной из первых проблем в теории градуированных колец частных является получение градуированной версии теоремы Голди, описывающей кольца, чьи классические кольца частных вполне приводимы. Строение вполне приводимых колец описывает теорема Молина—Веддербарна—Артина, градуированный аналог которой известен[2] [5] [6].

[1]Năstăsescu C., van Oystaeyen F. Graded and Filtered Rings and Modules. Lect. Notes Math. Springer. 1979.

[2]Năstăsescu C., van Oystayen F. Graded ring theory. — Amsterdam, North-Holland, 2004.

[3]Jespers E., Wauters P. A general notion of noncommutative Krull rings // J. of Algebra, 1988. V. 112. P. 388-415.

[4]Балаба И. Н. Кольца частных полупервичных градуированных колец. Труды международного семинара „Универсальная алгебра и приложения“, Волгоград, 2000, с. 21—28.

[5]Балаба И. Н. Градуированные кольца и модули // Дисс. ... докт. физ.-мат. наук, специальность 01.01.06, М., 2012 — 212 с.

[6]Liu Shaoxue, Beattie M., Fang Hongjin. Graded division rings and the Jacobson density theorem.

В конце 1950-х годов английский математик Альфред Голди доказал[7], что классическое правое кольцо частных $Q_{cl}(R)$ кольца R существует и вполне приводимо в точности тогда, когда кольцо R полупервично и удовлетворяет следующим двум условиям:

1) условие максимальности для правых аннуляторов;

2) условие конечномерности справа (в кольце нет бесконечных прямых сумм правых идеалов).

Кольца с условиями 1) и 2) стали называть правыми кольцами Голди.

В монографиях[8 9 10] доказано также, что для полупервичного правого кольца Голди R справедливо равенство $Q_{cl}(R) = Q(R)$.

Перейдём к градуированным правым кольцам Голди. Так называются[1 2] градуированные кольца, не содержащие бесконечных прямых сумм градуированных правых идеалов (gr-конечномерные справа) и удовлетворяющие условию максимальности для правых градуированных аннуляторов.

Один из первых градуированных вариантов теоремы Голди доказан в монографии[1] 1979 года. Там же приведён пример gr-полупервичного коммутативного градуированного кольца Голди, для которого классическое градуированное кольцо частных не является вполне gr-приводимым.

Пример[1]**.** *Пусть k — поле, кольцо $R = k[X,Y]/(XY)$ градуировано группой $\mathbb{Z}$ (обозначим $x = X + (XY)$ и $y = Y + (XY)$):*

$$R_n = \begin{cases} kx^n, & n > 0, \\ k, & n = 0, \\ ky^{-n}, & n < 0. \end{cases}$$

Тогда кольцо $Q_{cl}^{gr}(R)$ совпадает с кольцом R и не является gr-артиновым (и тем более, вполне gr-приводимым), в то же время (x,y) — gr-существенный идеал, все однородные элементы которого — делители нуля.

Мы покажем, что полное градуированное кольцо частных $Q^{gr}(R)$ кольца R из этого примера вполне gr-приводимо и, в частности, не совпадает с классическим $Q_{cl}^{gr}(R)$. Поэтому градуированный вариант теоремы Голди следует рассматривать для колец частных Q_{cl}^{gr} и Q^{gr} отдельно. Отметим, что как вопрос о совпадении этих колец, так и вопрос о полной gr-приводимости кольца Q_{cl}^{gr}, упираются в проблему существования однородного регулярного элемента в каждом gr-существенном правом идеале

Journal of Boijing Normal University (Natural Science), 1991, vol. 27, N 2, 129–134.

[7]Goldie A. W. Semi-prime rings with maximal conditions// Proc. London Math. Soc. — 1960. — V. 10.– P. 201-220.

[8]Фейс К. Алгебра: кольца, модули и категории, I. M.: Мир. 1977.

[9]Ламбек И. Кольца и модули. — М.: Факториал Пресс, 2005.

[10]Туганбаев А. А. Теория колец. Арифметические модули и кольца. — М.: МЦНМО, 2009.

кольца R. В неградуированном случае это условие выполнено и такой проблемы не возникает, но повторение рассуждений Голди в градуированном случае приводит, вообще говоря, к неоднородному регулярному элементу. Эта проблема решалась в работах[1, 2, 11, 12, 13] наложением дополнительных ограничений на однородные компоненты кольца R и градуирующую группу G. В 2000 году Гудёрл и Стэффорд[11] доказали градуированную версию теоремы Голди для gr-первичных колец, градуированных абелевой группой. В монографии[2] доказан вариант теоремы Голди для gr-полупервичных колец, сильно градуированных конечной группой.

Автором диссертации получены новые градуированные варианты теорем Голди. Доказано, что для gr-полупервичного правого градуированного кольца Голди R кольцо Q^{gr} вполне gr-приводимо. Также доказано обращение теоремы Голди для градуированных колец и найдены различные условия, при которых кольцо Q^{gr}_{cl} существует и вполне gr-приводимо (и тогда совпадает с кольцом Q^{gr}). В качестве следствия получен полный аналог теоремы Голди (в форме критерия) для колец с конечным носителем.

В диссертации также введено понятие gr-pri-кольца и получены градуированные аналоги третьей теоремы Голди[14, 15] о строении первичных и полупервичных pri-колец (колец главных правых идеалов). Доказано, что для gr-pri-колец условие gr-полупервичности гарантирует существование и полную gr-приводимость кольца Q^{gr}_{cl}.

Мощным логическим средством исследования в теории колец является метод ортогональной полноты[16, 17, 18, 19, 20, 21, 22], разработанный К. И. Бейдаром и А. В. Михалёвым в 1970-х и 1980-х годах. Его основная идея состоит в рассмотрении полупервичных колец как булевых произведений первичных, что позволяет теоремы с определённой логической структурой о первичных кольцах „поднимать“ до теорем об ортогонально полных полу-

---

[11] Goodearl K., Stafford T. The Graded Version of Goldie's Theorem, Contemporary Math. 259, 2000, 237–240.

[12] Năstăsescu C., van Oystaeyen F. Graded Ring Theory // North-Holland, Amsterdam. 1982.

[13] Năstăsescu C., Nauwelaerts E., van Oystaeyen F. Arithmetically graded rings revisited // Comm.Alg., 1986, v.14, N10, p. 1191-2017.

[14] Goldie A. W. Non-commutative principal ideal rings// V. XIII. 1962.

[15] Jatengaonkar A. V. Left principal ideal rings // Lect. Notes Math. Springer. 1970.

[16] Бейдар К. И. Кольца с обобщёнными тождествами, I // Вестник МГУ, Мат., мех., 1977, №2, с. 19–36.

[17] Бейдар К. И. Кольца частных полупервичных колец // Вестник МГУ, Мат., мех., 1978, №5, с. 36–43.

[18] Бейдар К. И., Михалёв А. В. Ортогональная полнота и алгебраические системы // Успехи математических наук, 1985, т. 40, Вып. 6, с. 79–115.

[19] Бейдар К. И., Михалёв А. В. Функтор ортогонального пополнения // Абелевы группы и модули. Вып. 4. 1986. С. 3–19.

[20] Михалёв А. В. Ортогонально полные многосортные системы // ДАН СССР, №6, 1986, С. 1304–1308.

[21] Beidar K. I., Martindale W. S., Mikhalev A. V. Rings with generalized identities. M.Dekker, 1995.

[22] Chen-Lian Chuang. Boolean valued models and semiprime rings. Proc. of the International Conference of Algebra in Memory of Prof. K. I. Beidar, p. 23-53, 2005.

первичных кольцах. Основные объекты теории строятся последовательно по заданному полупервичному кольцу A: его полное правое кольцо частных $Q = Q(A)$, центр C кольца Q (называемый расширенным центроидом кольца A) и булево кольцо B идемпотентов кольца C. С помощью кольца B вводится понятие ортогональной полноты и строится ортогональное пополнение $O(A)$ кольца A. На кольцо $O(A)$ удаётся перенести теоремы, справедливые в классе первичных колец, если их условия и заключения имеют определённую логическую структуру.

В диссертации построены и исследованы основные объекты теории ортогональной полноты для градуированных колец. Для данного gr-полупервичного кольца R вместо колец $Q(R)$ и $C(R)$ рассматриваются их градуированные аналоги — кольцо $Q^{gr}(R)$ и максимальное градуированное подкольцо $C^{gr}(R)$ его центра (градуированный расширенный центроид кольца R). Среди идемпотентов кольца $C^{gr}(R)$ используются только однородные для согласования построений с градуировкой. Ортогональная полнота рассматривается относительного образуемого указанными идемпотентами булева кольца B.

На следующем этапе в неградуированном случае устанавливается[17] ортогональная полнота кольца $Q(R)$. В градуированном случае это оказывается верным не всегда. В диссертации доказан критерий ортогональной полноты кольца $Q^{gr}(R)$, который в случае точной градуировки кольца R приобретает следующую форму: кольцо B конечно или группа G конечна.

Чтобы каждое (а не только удовлетворяющее условиям критерия) gr-полупервичное кольцо имело ортогональное градуированное пополнение, вводится понятие ортогональной gr-полноты — ортогональной полноты однородных компонент.

Ортогональное градуированное пополнение находит интересное применение к градуированным кольцам Голди. Так, для кольца R из примера на с. 2 кольцо $O^{gr}(R)$ является прямой суммой $k[x] \oplus k[y]$ двух градуированных областей. В диссертации доказано, что ортогональное градуированное пополнение $O^{gr}(R)$ gr-полупервичного правого градуированного кольца Голди R является прямой суммой gr-первичных колец Голди. Этот факт позволяет редуцировать полупервичный случай к первичному, реализовав генеральную идею метода ортогональной полноты.

Цель работы. Получение аналогов теоремы Фейса—Утуми о строении порядков в матричных кольцах, теорем Голди для градуированных колец, а также построение ортогонального градуированного пополнения градуированно полупервичных колец.

Научная новизна. Результаты диссертации являются новыми и получены автором самостоятельно. Основные результаты диссертации состоят в следующем:

1. Доказан градуированный аналог теоремы Фейса—Утуми о строении порядков в матричных кольцах над градуированными телами.

2. Доказаны градуированные варианты теорем Голди:

1) о строении полного правого градуированного кольца частных (получен критерий его полной приводимости);

2) о существовании и строении классического правого градуированного кольца частных (из полученных результатов, в частности, следует, что для градуированных колец с конечным носителем справедлив критерий Голди);

3) о строении первичных и полупервичных колец главных правых идеалов (доказаны градуированные аналоги третьей теоремы Голди);

3. Построено ортогональное градуированное пополнение и получены его применения:

1) доказаны критерии ортогональной полноты полного градуированного кольца частных gr-полупервичного кольца;

2) построение ортогональное градуированное пополнения и описана его структура;

3) с его помощью доказаны новые градуированные варианты теорем Голди, а также получен градуированный аналог теоремы Бейдара—Михалёва о перестановочных дифференцированиях на полупервичном кольце.

Методы исследования. В диссертации используются методы классической теории колец, теории градуированных колец, а также методы теории ортогонального пополнения Бейдара—Михалёва, развитые для градуированных колец.

Теоретическая и практическая ценность. Работа имеет теоретический характер; полученные результаты вносят вклад в развитие теории градуированных колец на основе градуированных колец частных.

Апробация диссертации. Результаты диссертации докладывались на следующих конференциях:

- международный алгебраический симпозиум, посвящённый 80-летию кафедры высшей алгебры механико-математического факультета МГУ и 70-летию профессора А. В. Михалёва (Москва, 15–18 ноября 2010 г.);
- VIII международная конференция „Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения“ (Саратов, 12–17 сентября 2011 г.);

- X международная конференция „Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения“ (Волгоград, 10–16 сентября 2012 г.);
- международная конференция „Мальцевские чтения“, посвящённая 80-летию В. П. Шункова (Новосибирск, 12–16 ноября 2012 г.),

  а также на следующих семинарах кафедры высшей алгебры механико-математического факультета МГУ:
- научно-исследовательский семинар по алгебре (2011–2013, неоднократно);
- семинар „Кольца и модули“ (2009–2013, неоднократно);
- семинар „Алгебра и теория моделей“ (2007–2013, неоднократно).

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в работах [1]—[6], из них первые четыре — в журналах из перечня ВАК.

Структура диссертации. Диссертация состоит из введения, четырёх глав, содержащих 18 разделов, и списка литературы. Библиография содержит 41 наименование. Текст диссертации изложен на 108 страницах.

Содержание работы

Глава 1 имеет вспомогательный характер. В ней приводятся необходимые сведения и доказываются предварительные результаты. **Раздел 1.1** содержит начальные сведения из теории градуированных колец и модулей.

Кольцо R называется *градуированным* по группе G, если

$$R = \bigoplus_{g \in G} R_g,$$

где $\{R_g \mid g \in G\}$ — семейство аддитивных подгрупп кольца R таких, что $R_g R_h \subseteq R_{gh}$ для всех $g, h \in G$. Элементы множества $h(R) = \bigcup\limits_{g \in G} R_g$ называются *однородными*, ненулевой элемент $r \in R_g$ называется однородным элементом *степени* g. Кольцо R называется *g-точным справа (слева)*, если $R_g R_{g^{-1}} \neq 0$ ($R_{g^{-1}} R_g \neq 0$) и *точным*, если оно g-точно справа и слева для всех $g \in G$. Подмножество градуированного кольца называется градуированным, если вместе с каждым своим элементом оно содержит все его однородные компоненты.

Раздел 1.2 посвящён градуированным матричным кольцам с т. н. *хорошими* градуировками: если R — G-градуированное кольцо, $n \in \mathbb{N}$, $\overline{g} = (g_1, \ldots, g_n) \in G^n$, то через $R_n(\overline{g})$ обозначается матричное кольцо R_n с градуировкой $R_n(\overline{g})_h = (R_{g_i^{-1} h g_j})_{ij}$, $h \in G$. Полученные в этом разделе результаты применяются при доказательстве градуированного аналога теоремы Фейса—Утуми в разделе 4.2. В **разделе 1.3** приводятся стандартные градуированные аналоги классических понятий, обозначаемые приставкой gr-. Например, *gr-артинов (gr-нётеров)* модуль — это градуированный модуль с условием минимальности (максимальности) для градуированных подмодулей; *gr-полупервичное* кольцо — это градуированное кольцо, не содержащее ненулевых градуированных идеалов. В **разделе 1.4** собраны сведения о булевых кольцах и ортогональной полноте, которые понадобятся в главе 4.

Подмножество M несингулярного C-модуля X называется[14,15,18] *ортогонально полным относительно ортогонально полного булева кольца B*, если для любой плотной ортогональной системы $(u_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ в B и любой системы $(x_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ в M существует элемент $x \in M$, удовлетворяющий равенствам $x_\gamma u_\gamma = x u_\gamma$ для всех $\gamma \in \Gamma$. Элемент x в данном определении определён однозначно[18]; он обозначается через $\sum^{\perp}_{\gamma\in\Gamma} x_\gamma u_\gamma$.

Глава 2 содержит ряд результатов о градуированных кольцах частных. В **разделе 2.1** собраны предварительные сведения о gr-существенных и gr-рациональных расширениях модулей и градуированном сингулярном подмодуле. **Раздел 2.2** посвящён полному правому градуированному кольцу частных $Q^{gr}(R)$. Доказан критерий его gr-регулярности (состоящий в gr-несингулярности кольца R), а также установлен изоморфизм между кольцами $Q^{gr}_e(R)$ и $Q(R_e)$ в каждом из двух случаев: 1) кольцо R e-точно справа и gr-несингулярно справа; 2) кольцо R точно справа и слева. **Раздел 2.3** содержит предварительные сведения и результаты о классическом правом градуированном кольце частных $Q^{gr}_{cl}(R)$. В **разделе 2.4** доказаны градуированные аналоги теорем Утуми о кольцах частных матричных колец и Фейса—Утуми о порядках в матричных кольцах.

Теорема 2.4.4. *Пусть кольцо Q градуировано по абелевой группе G, $n \in \mathbb{N}$, $\overline{g} = (g_1, \ldots, g_n) \in G^n$, $M = \{e_{ij} \mid 1 \leqslant i, j \leqslant n\}$ — система матричных единиц в $Q_n(\overline{g})$, $\deg e_{ij} = g_i g_j^{-1}$, R — градуированное подпредкольцо в $Q_n(\overline{g})$, S — множество всех однородных регулярных элементов в R. Считая, что $Q = \mathrm{Cent}_{Q_n(\overline{g})}(M)$, введём обозначения:*

$A_M = \{a \in R \mid aM \subseteq R\}$ — градуированный левый идеал в R,

$B_M = \{b \in R \mid Mb \subseteq R\}$ — градуированный правый идеал в R,

$F_M = B_M A_M \cap Q$ — градуированный идеал в $R \cap Q$.

Тогда верны следующие утверждения:

1. $(F_M)_n(\overline{g}) = B_M A_M$.

2. Если $Q_n(\overline{g}) = RS^{-1}$, то найдётся система N однородных матричных единиц в $Q_n(\overline{g})$, для которой $B_N A_N$ — градуированный правый порядок в $Q_n(\overline{g})$.

3. В предположениях пункта 2: если Q — градуированное тело, то F_N (для любой системы N из пункта 2) — градуированный правый по-

рядок в некотором градуированном теле $Q' \cong Q$, и $Q_n(\overline{g}) \cong Q'_n(\overline{g}) \cong (F_N)_n(\overline{g})(F_N \cap S)^{-1}$.

Глава 3 посвящена градуированным кольцам Голди. В **разделе 3.1** доказаны вспомогательные утверждения о gr-полупервичных правых градуированных кольцах Голди. Основной результат **раздела 3.2** — следующая теорема.

Теорема 3.2.2. *Рассмотрим следующие условия на градуированное кольцо R:*

(1) R — gr-полупервичное правое градуированное кольцо Голди;

(2) кольцо R gr-полупервично, gr-несингулярно справа и gr-конечномерно справа;

(3) кольцо R gr-несингулярно справа и gr-конечномерно справа;

(4) кольцо $Q^{gr}(R)$ gr-несингулярно справа и gr-конечномерно справа;

(5) кольцо $Q^{gr}(R)$ вполне gr-приводимо.

Между условиями (1)–(5) имеются следующие логические связи:

$$(1) \Longleftrightarrow (2) \Longrightarrow (3) \Longleftrightarrow (4) \Longleftrightarrow (5).$$

В **разделе 3.3** доказан ряд результатов о кольце $Q^{gr}_{cl}(R)$ для правого градуированного кольца Голди R, каждый из которых является градуированным аналогом теоремы Голди для полупервичных колец.

Теоремы 3.3.3, 3.3.4, 3.3.5. *Для градуированного правого кольца Голди R кольцо $Q^{gr}_{cl}(R)$ существует и вполне gr-приводимо в каждом из следующих случаев:*

(1) кольцо R e-точно справа и кольцо R_e полупервично;

(2) группа G периодична и кольцо R gr-полупервично;

(3) кольцо R имеет конечный носитель и gr-полупервично.

В **разделе 3.4** доказаны градуированные аналоги третьей теоремы Голди. Градуированное кольцо R назовём *gr-pri-кольцом*, если каждый правый градуиированный идеал в R порождается одним однородным элементом.

Теорема 3.4.2. *Для градуированного кольца R равносильны следующие условия:*

(1) R — gr-полупервичное gr-pri-кольцо;

(2) $R \cong \bigoplus_{i=1}^{n} R_i$, где $n \in \mathbb{N}$ и каждое кольцо R_i — gr-первичное gr-pri-кольцо, причём существует такой элемент $g \in G$, что каждый правый градуированный идеал в каждом кольце R_i содержит порождающий элемент степени g.

При выполнении этих условий кольца $Q^{gr}_{cl}(R_i)$, $i = 1, \ldots, n$, $Q^{gr}_{cl}(R)$

существуют, вполне gr-приводимы и при этом

$$Q_{cl}^{gr}(R) = Q^{gr}(R) = \bigoplus_{i=1}^{n} Q_{cl}^{gr}(R_i) = \bigoplus_{i=1}^{n} Q^{gr}(R_i).$$

Теорема 3.4.3. *Для gr-pri-кольца R равносильны условия:*

(1) R — gr-первичное кольцо;

(2) $R = {}^{h}D_n(\overline{g})^{h^{-1}}$, где D — некоторая правая градуированная область Оре, $n \in \mathbb{N}$, $\overline{g} = (g_1, \dots, g_n) \in G^n$, $h \in G$.

При выполнении этих условий $Q^{gr}(R) = Q_{cl}^{gr}(R) = T_n(\overline{g})$, где T — градуированное тело. Если к тому же группа G абелева, то $R = D_n(\overline{g})$ и $Q^{gr}(D) = T$.

Глава 4 посвящена ортогональному градуированному пополнению. Всюду R — gr-полупервичное кольцо, $Q^{gr} = Q^{gr}(R)$, C — максимальное градуированное подкольцо центра кольца Q^{gr} — градуированный расширенный центроид кольца R. В **разделе 4.1** построено основное булево кольцо $B = B(R)$, относительно которого далее рассматривается ортогональная полнота модулей и колец. Мотивирован выбор кольца B, дано его описание и установлена его ортогональная полнота. В п. 3 **теоремы 4.1.3** доказано, что булева алгебра $(B;\ \leqslant, 0, 1, \wedge, ')$, где $u \wedge v = uv$, $u' = 1 - u$, изоморфна булевой алгебре $(\mathcal{A}nn^{gr}(R);\ \subseteq, 0, R, \cap, ^*)$ аннуляторных градуированных идеалов кольца R.

В **разделе 4.2** введено понятие ортогональной gr-полноты.

Градуированное подмножество T несингулярного C_e-модуля назовём ортогонально *gr-полным*, если множества T_g ортогонально полны для всех $g \in G$. Доказано, что кольцо $Q^{gr}(R)$ ортогонально gr-полно, а также доказан критерий его ортогональной полноты. В случае точной градуировки кольца R критерий приобретает следующую форму.

Теорема 4.2.8. *Если gr-полупервичное кольцо R точно во всех компонентах слева или справа, то кольцо $Q^{gr}(R)$ ортогонально полно в точности тогда, когда выполнено хотя бы одно из условий: группа G конечна или кольцо B конечно.*

В **разделе 4.3** построено ортогональное градуированное пополнение $O^{gr}(R)$ кольца R, дано его поэлементное описание, установлена его связь с ортогональным пополнением кольца R_e при условии полупервичности последнего.

Ортогональным градуированным пополнением $O^{gr}(T)$ градуированного множества $T \subseteq Q^{gr}$ назовём пересечение всех ортогонально gr-полных подмножеств в Q^{gr}, содержащих T.

Предложение 4.3.1. *1.* $O^{gr}(T)_g = \left\{\sum_{\gamma}^{\perp} t_\gamma v_\gamma \,\middle|\, \{t_\gamma\}_\gamma \subseteq T_g, \{u_\gamma\}_\gamma -\right.$ *плотная ортогональная система в* $\left.B\right\}$.

2. Множество $O^{gr}(T)$ *ортогонально gr-полно.*

Предложение 4.3.2. *Для всякого gr-полупервичного кольца* R *градуированное множество* $O^{gr} = O^{gr}(R)$ *является градуированным правым кольцом частных кольца* R*. В частности, кольцо* O^{gr} *gr-полупервично.*

В **разделе 4.4** ортогональное градуированное пополнение применяется к исследованию gr-полупервичных градуированных колец Голди.

Теоремы 4.4.3, 4.4.5. *Пусть* R *— gr-полупервичное правое градуированное кольцо Голди. Тогда*

$$O^{gr}(R) = \bigoplus_{i=1}^{n} R_i,$$

где $R_1, \dots, R_n$ *— gr-первичные правые градуированные кольца Голди.*

Если при этом группа G *абелева, то*

$$Q^{gr}(R) = Q^{gr}(O^{gr}(R)) = \bigoplus_{i=1}^{n} Q^{gr}_{cl}(R_i).$$

В **разделе 4.5** исследуются локализации ортогонально полных gr-полупервичных колец по ультрафильтрам кольца B. Установлена gr-первичность образуемых факторколец. В **разделе 4.6** применение метода ортогональной полноты иллюстрируется на градуированных кольцах с однородным дифференцированием (при котором производные однородных элементов однородны). С однородным дифференцированием d на градуированном кольце R связывается функция δ, переводящая степени однородных элементов в степени их (ненулевых) производных. Данная функция частично определена на группе G, и её область определения, вообще говоря, расширяется при продолжении дифференцирования на кольцо Q^{gr}. С помощью введённой функции удаётся доказать однородность продолженного дифференцирования, что позволяет включить его в сигнатуру кольца и применить метод ортогональной полноты. Доказаны градуированные аналоги теоремы И. Херстейна для первичных колец и её обобщение на полупервичные кольца, полученное К. И. Бейдаром и А. В. Михалёвым.

Теорема 4.6.11. *Пусть* R *— gr-полупервичное кольцо с однородным дифференированием* d *таким, что* $d(x)d(y) = d(y)d(x)$ *для всех* $x, y \in R$*. Предположим, что кольцо* Q^{gr} *ортогонально полно. Тогда существует такой элемент* $u \in B$*, что кольцо* uO^{gr} *коммутативно и ограничение* d *на* $(1-u)O^{gr}$ *— дифференцирование с нулевым квадратом.*

Благодарности

Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю профессору Александру Васильевичу Михалёву за постановку задач, руководство работой и поддержку, а также Виктору Тимофеевичу Маркову, Ирине Николаевне Балабе и Елене Игоревне Буниной за ценные советы и плодотоврные обсуждения. Автор благодарен всему коллективу кафедры высшей алгебры за тёплую атмосферу и полезные обсуждения.

Работы автора по теме диссертации

[1] Канунников А. Л. Градуированные варианты теоремы Голди // Вестник МГУ. Серия 1. Математика, механика. 2011, №3, с. 46–50.

[2] Канунников А. Л. Градуированные варианты теоремы Голди, II // Вестник МГУ. Серия 1. Математика, механика. 2013, №3, с. 47–51.

[3] Канунников А. Л. Порядки в градуированных матричных кольцах // Вестник МГАДА, 2013, №1(20), с. 52–56.

[4] Канунников А. Л. Об одном применении метода ортогональной полноты в теории градуированных колец // Алгебра и логика, 2013, том 52, №2, с. 145–154.

[5] Балаба И. Н., Канунников А. Л., Михалёв А. В. Градуированные кольца частных ассоциативных колец, I // Фундаментальная и прикладная математика, 2012, 2, с. 3–74. *А. Л. Канунникову принадлежат главы 2, 6, 8, 9, 10. И. Н. Балабе принадлежат главы 1, 3, 4, 5, 7. А. В. Михалёву принадлежит введение и общая редакция работы.*

[6] Канунников А. Л. Ортогональное градуированное пополнение градуированно полупервичных колец // Фундаментальная и прикладная математика, выпуск 7, 2013, с. 117–150.