

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА

На правах рукописи
УДК 539.3



Юшутин Владимир Станиславович

**ДИНАМИЧЕСКАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ СТЕНОК КАНАЛА
ПРИ ПРОТЕКАНИИ ПО НЕМУ ФИЗИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНОЙ СРЕДЫ**

01.02.04 — Механика деформируемого твёрдого тела

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва
2013

Работа выполнена на кафедре механики композитов механико-математического факультета Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова.

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, профессор
Георгиевский Дмитрий Владимирович.

Официальные оппоненты: доктор технических наук
Алексеева Софья Июньевна
(Институт машиноведения
им. А.А. Благонравова РАН, Москва),

кандидат физико-математических наук, доцент
Марчевский Илья Константинович
(МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва).

Ведущая организация: Институт проблем механики
им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва.

Защита диссертации состоится 20 декабря 2013 года в 16 часов на заседании совета Д.501.001.91 по защите докторских и кандидатских диссертаций при Московском государственном университете имени М.В. Ломоносова по адресу: 119991, ГСП-1, Москва, Ленинские горы, д. 1, механико-математический факультет, аудитория 12-24.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке механико-математического факультета МГУ (Главное здание, 14 этаж).

Автореферат разослан 15 ноября 2013 года.

Ученый секретарь диссертационного совета,
доктор физико-математических наук,
профессор



Шешенин С.В.

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Механические задачи, связанные с продольным течением сред внутри податливых сосудов, изучались в связи с биологическими процессами. Изменение размеров и формы канала под действием сил со стороны протекающей среды влияет на само течение, перестраивая поля скорости и напряжения, а значит, снова воздействуя на геометрию сосуда. Поэтому проблема течения внутри деформируемого канала является связанной контактной нелинейной задачей.

Взаимодействие сосуда и среды способствует появлению специфичных явлений, таких как схлопывание канала с последующим восстановлением осесимметричной формы, нелинейная зависимость перепада давления от расхода, автоколебания системы.

Эксперименты и теоретические модели течения внутри деформируемого канала, основанные на классических определяющих соотношениях ньютоновской среды, показывают, что самовозбуждаемые колебания могут возникнуть при отсутствии периодического внешнего воздействия. Основными чертами являются устойчивое поведение системы при малом расходе среды, неустойчивость при больших, а также возможность неколебательной потери устойчивости.

Известно, что кровь и другие биожидкости являются неньютоновскими средами. Эксперименты показывают наличие предела текучести, характерного для пластических сред, что объясняется тем, что эритроциты способны собираться в структуры ("монетные столбики"), которые и препятствуют течению при малых сдвиговых напряжениях. Другие работы показывают, что кровь является "псевдопластической" вязкой средой со степенным законом упрочнения. Поэтому становится важным выявить качественные отличия поведения канала при течении по нему неньютоновских сред.

Цель работы состоит в разработке пространственно одномерной осредненной математической модели течения нелинейно-вязкой среды со степенным законом упрочнения, а также модели течения вязкопластической среды Шведова–Бингама внутри деформируемого канала, и исследовании динамической устойчивости стационарного поведения обеих систем.

Основные результаты.

В диссертационной работе исследованы и решены следующие задачи:

- о стационарном течении в упругом канале нелинейно-вязкой среды со степенным законом упрочнения и вязкопластической среды Шведова–Бингама;
- об асимптотическом поведении при большой жёсткости системы, состоящей из упругого канала и степенной среды, либо вязкопластической среды Шведова–Бингама, текущих внутри него;
- о разгоне-торможении вязкопластической среды Шведова–Бингама внутри абсолютно жёсткого цилиндрического канала и об устойчивости этого процесса;
- о времени остановки вязкопластической среды Шведова–Бингама при течении по инерции внутри абсолютно жёсткого канала;
- об устойчивости стенок канала при течении внутри него нелинейно-вязкой среды со степенным законом упрочнения, либо вязкопластической среды Шведова–Бингама.

Научная новизна.

- предложена и апробирована осреднённая пространственно одномерная модель течения нелинейно-вязкой среды со степенным законом упрочнения внутри деформируемого канала.

- предложена и апробирована осреднённая пространственно одномерная модель течения вязкопластической среды Шведова–Бингама внутри деформируемого канала.
- получены условия динамической устойчивости системы при различных реологических свойствах протекающей среды.

Апробация работы. Основные результаты диссертации докладывались на следующих конференциях и научно-исследовательских семинарах:

- Научная конференция "Ломоносовские чтения", секция механики, МГУ имени М.В. Ломоносова, 2009-2013 гг.
- XII Всероссийская школа-семинар "Волновые явления в неоднородных средах", Звенигород, 2010 г.
- XIV Международная конференция "Моделирование и исследование устойчивости динамических систем", Киев, 2011 г.
- XII Всероссийская школа-семинар "Математическое моделирование и биомеханика в современном университете", Дивноморское, 2012 г.
- Конференция-конкурс молодых ученых Института механики МГУ, Москва, 2012 г.
- Аспирантский семинар и научно-исследовательский семинар кафедры механики композитов механико-математического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова под руководством д.ф.-м.н., проф. Б.Е. Победри, 2008-2013 гг.
- Научно-исследовательский семинар им. А.А. Ильюшина кафедры теории упругости механико-математического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова под руководством д.ф.-м.н., проф. Кийко И.А., 2013 г.
- Научно-исследовательский семинар кафедры теории пластичности механико-математического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова под руководством член-корр. РАН, д.ф.-м.н, проф. Ломакина Е.В., 2013 г.
- Научно-исследовательский семинар кафедры волновой и газовой динамики механико-математического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова под руководством акад. РАН, д.ф.-м.н, проф. Нигматулина Р. И., 2013 г.
- Научно-исследовательский семинар "Актуальные проблемы геометрии и механики" на механико-математическом факультете МГУ имени М.В. Ломоносова под руководством д.ф.-м.н., проф. Д.В. Георгиевского, д.ф.-м.н. М.В. Шамолина, д.ф.-м.н., проф. С.А. Агафонова, 2007 г., 2012-2013 гг.
- Международная конференция "Advanced problems in Mechanics", Санкт-Петербург, 2013 г.

Публикации.

Юшутин В.С. Вязкопластические течения по каналам с переменным по длине сечением и деформируемыми стенками //Известия РАН. Серия физическая. 2011. Т.75. №1. С.139-143

Юшутин В.С. Устойчивость деформируемых каналов при течении по ним нелинейно-вязких сред со степенным законом упрочнения //Вестник Московского Университета. Сер.1.Математика и механика. 2012. №4. С. 67-70.

Георгиевский Д.В., Юшутин В.С. Квазистатическое сжатие и растекание асимптотически тонкого нелинейно-вязкопластического слоя // ПМТФ. 2012. Т. 53. № 3. С. 150-157.

Юшутин В.С. Вязкопластические течения по каналам с переменным по длине сечением и деформируемыми стенками //Сборник трудов участников XII Всероссийской школы-семинара "Волновые явления в неоднородных средах". Секция 2. Гидродинамические волны и течения, С.58-60.

Юшутин В.С. Устойчивость течений нелинейно-вязких степенных жидкостей в канале с деформируемыми стенками //Тезисы докладов XIV Международной конференции "Моделирование и исследование устойчивости динамических систем". С. 344.

Юшутин В.С. Течения неньютоновских сред в каналах с деформируемыми стенками. //Тезисы докладов XII Всероссийской школы-семинара "Математическое моделирование и биомеханика в современном университете", С. 114.

Yushutin V.S. Viscous-Plastic Medium Flow in Vessels with Deformable Walls // Sessions of the workshop of the Mathematics and Mechanics Department of Lomonosov Moscow State University. "Urgent problems of geometry and mechanics" named after V. V. Trofimov, Journal of Mathematical Sciences, 161:5 (2009), p. 614.

Yushutin V.S. Non-Newtonian flow in a collapsible tube: does rheology of blood affect stability of a vessel? // Book of abstracts of International Summer School-Conference "Advanced Problems in Mechanics", 2013, p. 116.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, 3 глав, заключения и списка литературы. Общий объем диссертации составляет 86 страниц машинописного текста. Библиография содержит 55 наименований. Рисунки и таблицы нумеруются по главам.

Содержание работы

Во **введении** содержится краткий обзор существующих исследований по тематике диссертации, а также приведена её мотивация, связанная с наличием неньютоновских свойств у биологических сред, протекающих в податливый сосудах живых организмов. Работа посвящена построению и исследованию пространственно одномерных математических постановок (т.е. зависящих лишь от продольной координаты и времени), выявляющих существенные особенности поведения каналов при протекании внутри них сред с различными реологическими свойствами.

Первая глава посвящена течению нелинейно-вязкой степенной среды со степенным законом упрочнения внутри деформируемого канала.

Рассматривается упругий осесимметричный сосуд, ось которого закреплена и совпадает с осью Oz цилиндрической системы координат (рис. 1). Образующая границы задаётся неизвестной функцией $R(z, t)$, где R – радиус окружности, лежащей в сечении $S(z, t)$ поверхности плоскостью $z = \text{const}$ в момент времени t . Предполагается, что несжимаемая среда, текущая внутри канала, является степенной, т.е.

$$\sigma_{ij} = -p \delta_{ij} + 2\mu v_u^{n-1} v_{ij}, \quad (1)$$

где p – давление, $v_u = \sqrt{v_{ij}v_{ij}}$ – квадратичный инвариант тензора скоростей деформаций v_{ij} . Среда обладает двумя материальными константами: μ – динамическая вязкость, n – степенной параметр.

Далее будем считать, что контакт между протекающей средой и стенками канала реализуется посредством следующего соотношения:

$$\Psi(\eta(z, t)) = p(z, t) - p_{ext}(z, t), \quad (2)$$

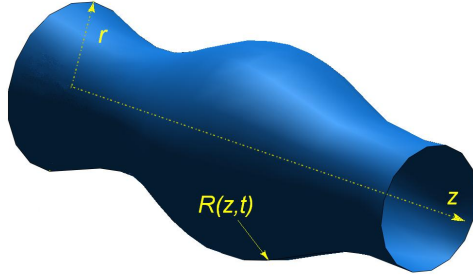


Рис. 1: Осесимметричное деформирование канала

где Ψ – дифференциальный оператор по z и t , $\eta(z, t) = R(z, t) - R_0$ – радиальные перемещения точек канала, $p(z, t)$ и $p_{ext}(z, t)$ – давление в среде и внешнее давление, соответственно. Вид оператора Ψ может определять инерционные, упругие, вязкоупругие и другие свойства стенок канала. Предложенные в диссертации постановки могут учитывать произвольный вид оператора Ψ . Однако все конкретные результаты посвящены самому простому случаю оператора Ψ , соответствующему линейно упругой реакции стенок канала на воздействие:

$$\beta (R(z, t) - R_0) = p(z, t) - p_{ext}, \quad (3)$$

где $\beta = E_s h_s / (1 - \nu_s^2) R_0^2$ – радиальная жёсткость, E_s и ν_s – модуль Юнга и коэффициент Пуассона материала, h_s – толщина стенки канала. Такую модель стенок сосуда можно назвать безынерционным винклеровым основанием, при котором соседние продольные сечения канала не взаимодействуют.

Особенностью является следующая процедура получения математической модели системы. Все соотношения должны быть проинтегрированы по произвольному поперечному сечению $S(z, t)$. В полученных осреднённых уравнениях неизвестны функции, имеющие прозрачный физический смысл: расход (4) через сечение $S(z, t)$, радиус этого сечения $R(z, t)$, среднее давление (5).

$$Q(z, t) = \int_{S(z, t)} v_z(r, z, t) dS \quad (4)$$

$$P(z, t) = \frac{1}{\pi R^2(z, t)} \int_{S(z, t)} p(r, z, t) dS \quad (5)$$

При этом предполагается, что верна гипотеза единого профиля, полагающая, что отношение продольной скорости к своему среднему значению сохраняется от одного поперечного сечения к другому. Профилем продольной скорости называют следующую функцию:

$$s(r, z, t) = \frac{v_z(r, z, t)}{\bar{v}(z, t)}, \quad \bar{v}(z, t) = \frac{1}{\pi R^2(z, t)} \int_{S(z, t)} v_z(r, z, t) dS = \frac{Q(z, t)}{\pi R^2(z, t)} \quad (6)$$

где \bar{v} – среднее интегральное значение продольной скорости.

Гипотеза единого профиля устанавливает, что $s(r, z, t)$ не зависит от продольной координаты z и времени t . Кроме этого, гипотеза подразумевает, что функция s задана в явном виде. Например, из свойств решения задачи Пуазейля о течении среды внутри жёсткого цилиндрического канала следует, что

$$s(x) = \frac{\pi R_0^2}{Q} v_z(x R_0) = \frac{3n+1}{n+1} \left(1 - x^{\frac{n+1}{n}}\right). \quad (7)$$

Окончательно, принимается, что верно следующее представление для продольной скорости:

$$v_z(r, z, t) = \frac{Q(z, t)}{\pi R^2(z, t)} s\left(\frac{r}{R(z, t)}\right), \quad (8)$$

где функция s определяется (7)

В результате процедуры осреднения по сечению получена замкнутая система уравнений для описания течения степенной среды внутри деформируемого канала:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{(3n+1)}{(2n+1)} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{Q^2}{\pi R^2} \right) + \frac{\mu (3n+1)^n 2^{(3-n)/2} Q^n}{\rho n^n \pi^{n-1} R^{3n-1}} + \frac{\pi R^2}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} = 0, \quad (9)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial z} + \frac{\partial(\pi R^2)}{\partial t} = 0, \quad (10)$$

$$\beta (R - R_0) = P. \quad (11)$$

С помощью этой системы аналитически решается стационарная задача течения степенной среды внутри деформируемого канала. Ищется такое распределение по длине радиуса гибкого канала, что возможно стационарное поведение. Система (9)-(11) упрощается и приводится к одному уравнению:

$$\frac{dy(x)}{dx} = \frac{y(x)^{4-3n}}{B(\chi - y(x)^5)}, \quad (12)$$

$$B = \frac{\beta R_0^{3n+1} \pi^n n^n}{\mu q^n 2^{(3-n)/2} (3n+1)^n}, \quad \chi = \frac{2\rho q^2 (3n+1)}{\beta R_0^5 \pi^2 (2n+1)}, \quad (13)$$

$$z = R_0 x,$$

$$R(z) = R_0 y(x).$$

Это уравнение дополняется граничным условием на входе в канал:

$$y(0) = y_0. \quad (14)$$

Решение задачи Коши (12), (14) может быть получено аналитически. Первый интеграл легко находится методом разделения переменных. В результате можно получить:

$$x = B \left(\chi \frac{y^{3n-3} - y_0^{3n-3}}{3n-3} - \frac{y^{3n+2} - y_0^{3n+2}}{3n+2} \right), \quad n \neq 1, \quad (15)$$

$$x = B \left(\chi \left(\ln \frac{y}{y_0} \right) - \frac{y^5 - y_0^5}{5} \right), \quad n = 1. \quad (16)$$

Анализ показывает, что решение существует лишь на конечном промежутке по оси x . Значит, если длина сосуда достаточно мала, то стационарное решение может существо-

вать. Если же длина сосуда больше некоторой величины, зависящей от безразмерных параметров B и χ , то решение не существует. Здесь имеется аналогия со статической потерей устойчивости (дивергенцией).

Затем изучаются асимптотические свойства системы при большой жёсткости канала. Рассматривается система (9)-(11) и ищется её решения в приближении малого параметра. В этой задаче есть три безразмерных параметра :

$$\varepsilon = \frac{R_0}{L}, \quad \text{Re} = \frac{V_0^{2-n} R_0^n \rho}{\mu}, \quad \gamma = \frac{V_0^2 \rho}{R_0 \beta},$$

где V_0 – характерная продольная скорость, L – длина канала, Re – число Рейнольдса, характеризующее вязкость, и безразмерное число γ , характеризующее жёсткость. В интересующем случае жёсткость канала считается большой, поэтому безразмерный параметр γ является малым числом. Процедура асимптотического интегрирования задачи подразумевает разложение всех неизвестных функций в ряды по малому параметру γ :

$$\bar{v}(z, t) = V_0 (v_0(z, t) + \gamma v_1(z, t) + \gamma^2 v_2(z, t) + \dots), \quad (17)$$

$$R(z, t) = R_0 (r_0(z, t) + \gamma r_1(z, t) + \gamma^2 r_2(z, t) + \dots), \quad (18)$$

$$P(z, t) = \rho V_0^2 (p_0(z, t) + \gamma p_1(z, t) + \gamma^2 p_2(z, t) + \dots). \quad (19)$$

Эти разложения подставляются в систему (9)-(11), которая распадается на последовательность подзадач, соответствующих порядку точности, т.е. количеству учтённых в разложениях (17)-(19) членов.

Решение с точностью до членов нулевого порядка соответствует задаче о течении нелинейно-вязкой среды со степенным законом упрочнения в абсолютно жёстком цилиндрическом канале, возможно нестационарном. Искомая тройка $\{v_0, r_0, p_0\}$ имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} r_0(z, t) &= 1, \quad v_0(z, t) = v_0^0(t), \\ p_0(z, t) &= - \left(\frac{dv_0^0}{dt}(t) + \frac{2^{\frac{3-n}{2}} (3n+1)^n}{n^n \varepsilon \text{Re}} (v_0^0(t))^n \right) z + p_0^0(t), \end{aligned}$$

где $v_0^0(t)$ и $p_0^0(t)$ – известные функции, заданные на входе в канал.

Далее в работе находится следующее приближение, с точностью до линейных членов:

$$\begin{aligned} r_1(z, t) &= p_0(z, t), \\ v_1 &= \left(\frac{d^2 v_0^0}{dt^2} + \frac{n 2^{\frac{3-n}{2}} (3n+1)^n}{n^n \varepsilon \text{Re}} (v_0^0)^{n-1} \frac{dv_0^0}{dt} \right) z^2 + v_1^0 + \\ &+ \left(2v_0^0 \frac{dv_0^0}{dt} + \frac{2^{\frac{5-n}{2}} (3n+1)^n}{n^n \varepsilon \text{Re}} (v_0^0)^{n+1} - 2 \frac{dp_0^0}{dt} \right) z, \end{aligned}$$

где $v_1^0 = v_1^0(t)$ – некоторая функция времени, определяемая граничными условиями на входе в канал,

$$\begin{aligned} p_1 &= \frac{(3n+1)^n}{\varepsilon^2 \text{Re}^2 (2n+1)} \cdot \left(-\frac{4(3n+1)^n}{n^{2n-1} 2^n} z^2 + \frac{4\varepsilon \text{Re}}{n^{n-1} 2^{\frac{n-1}{2}}} z + \right. \\ &+ \frac{8(3n+1)^n}{2^n n^{2n}} z^2 - \frac{4\varepsilon \text{Re}}{n^{n-2} 2^{\frac{n-1}{2}}} z + \frac{\varepsilon \text{Re}}{2^{\frac{3-n}{2}} n^n} z + \left. \frac{16(3n+1)^n}{n^{2n-1} 2^n} z^2 + \right) \end{aligned}$$

$$+ \frac{24 (3n + 1)^n}{n^{2n-2} 2^n} z^2 + \frac{\varepsilon \operatorname{Re}}{2^{\frac{3-n}{2}}} n^{n-1} z - \frac{4 (3n + 1)^n}{2^n n^{2n}} z^2) + p_1^0 .$$

Последнее выражение для p_1 выписано для частного случая граничных условий нулевого порядка : $v_0(t) = 1$, $p_0^0(t) = \operatorname{const}$, соответствующих стационарному течению Пуазейля.

Таким образом, решена задача о движении степенной среды внутри деформируемого канала в асимптотическом приближении с линейной точностью по малому параметру.

Во **второй главе** исследуется течение вязкопластической среды Шведова–Бингама внутри деформируемого канала. Предлагается пространственно одномерная осреднённая математическая модель процесса, которая далее применяется к некоторым задачам, как новым, имеющим самостоятельное значение, так и тестовым.

Определяющие соотношения среды Шведова–Бингама имеют вид:

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \left(2\mu + \frac{\sigma_s}{v_u} \right) v_{ij} , \quad (20)$$

где μ – динамическая вязкость, а σ_s – предел текучести при сдвиге. При этом деформации происходят только там, где $\sigma_u^2 \equiv s_{ij}s_{ij} > \sigma_s^2$. В остальных точках области среда движется как твердое тело, в ней отсутствуют деформации.

Предполагается, что при течении среды Шведова–Бингама внутри деформируемых каналов у оси канала движется жёсткое ядро, являющееся телом вращения (рис.2). Скорость ядра не может зависеть от продольной координаты, потому что ядро несжимаемо, и все его точки должны двигаться с одной и той же скоростью. Поэтому в зоне течения вид профиля как функция продольной скорости должен изменяться в продольном направлении. Если предположить, что профиль сохраняет свой вид, как было сделано в модели течения вязких сред, то из-за несжимаемости ядра получится противоречие с условием сохранения расхода .

Уравнение движения среды интегрируется по произвольному сечению, но теперь гипотеза единого профиля модифицируется так, что вид профиля может меняться от сечения к сечению.

Для этого предлагается моделировать течение вязкопластической среды следующими интегральными величинами, относящимися к поперечному сечению: его радиус R , радиус ядра R^* , скорость ядра V , среднее по сечению продольное напряжение N и функция a , характеризующая профиль продольной скорости (рис. 2). Вместо радиуса ядра можно ввести его безразмерный аналог: $\xi = R^*/R$.

Профилем вязкопластического течения внутри канала называется безразмерная функция, определенная в зоне течения выражением $s'(r, z, t) = v_z(r, z, t)/V(z, t)$, то есть отношением продольной скорости к скорости ядра. Использование гипотезы единого профиля в течении вязкопластической среды приводит к несохранению расхода среды в рамках моделирования в интегральном смысле. Поэтому вместо параболы, являющейся решением задачи Пуазейля, для профиля можно ввести кубический многочлен общего вида в зоне течения, введя в ней параметр $x = (r - R^*)/(R - R^*)$ ($s(x, z, t) = s'(r(x), z, t)$):

$$s(x, z, t) = a(z, t)x^3 + a_2(z, t)x^2 + a_1(z, t)x + a_0(z, t) .$$

Заметим, что профиль $s(x, z, t)$ должен удовлетворять условию прилипания на стенках

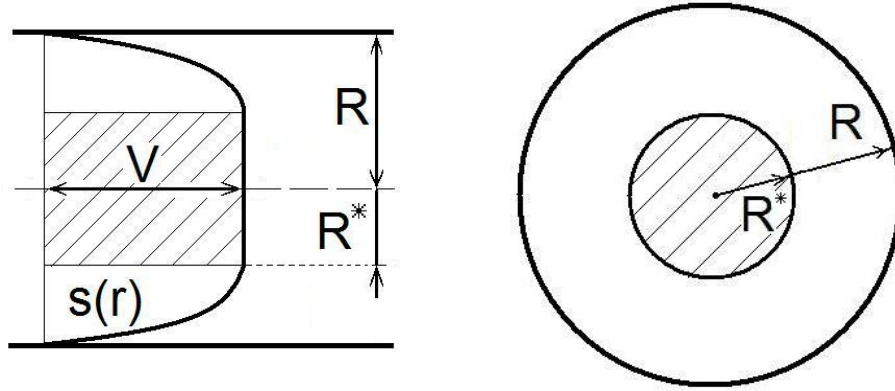


Рис. 2: Профиль продольной скорости (слева) и поперечное сечение канала (справа). Заштрихованная область является жёстким ядром.

канала и условию гладкости на границе с ядром:

$$s(0, z, t) = 1, \quad \frac{ds}{dx}(0, z, t) = 0, \quad s(1, z, t) = 0.$$

Эти три условия накладывают ограничения на четыре функции-коэффициента в кубическом многочлене: $a_0(z, t) = 1, a_1(z, t) = 0, a_2(z, t) = -a(z, t) - 1$. Следовательно, профиль может зависеть от переменных z и t посредством лишь одного коэффициента:

$$s(x, z, t) = a(z, t)x^3 - (a(z, t) + 1)x^2 + 1, \quad x \in [0, 1]. \quad (21)$$

Если $a(z, t) = 0$, то профиль в зоне течения соответствует течению Пуазейля.

Таким образом, вместо гипотезы единого профиля (8), принимаемой в интегральной модели течения вязких сред, предполагается следующее представление:

$$v_z(r, z, t) = V(z, t) s\left(\frac{r - R^*}{R - R^*}, z, t\right), \quad (22)$$

где профиль соответствует (21), а функция V определена на протяжении всего канала как скорость ядра, существующего в каждом сечении.

Заметим также, что расход явно выражается через интегральные величины, поскольку они самостоятельно описывают поле скоростей в каждом сечении:

$$Q = \frac{V\pi R^2}{30} \left((5 + 2a)\xi^2 + (10 + a)\xi + 15 - 3a \right). \quad (23)$$

Принципиально интегральная постановка для вязкопластической среды Шведова–Бингама отличается от постановки для нелинейно-вязкой среды наличием жёсткой недеформируемой области. К трем интегральным функциям были добавлены две дополнительные, характеризующие ядро: его размер и скорость. Поэтому необходимо ввести дополнительные интегральные уравнения, описывающие его поведение. Эти уравнения могут быть получены из законов движения и несжимаемости абсолютно твердого тела, которым и является ядро.

Исследуется вопрос о том, как форма ядра может изменяться при движении вдоль оси. Ядро, как твёрдое тело, движется продольно каналу со скоростью $V(z, t)$. Отсюда очевидна зависимость функции R^* от z и t , так как она задаёт размеры ядра в неподвижной системе координат. Далее, возможно изменение формы ядра без его деформа-

ции. Это происходит, если с поверхности жёсткой зоны частицы отделяются, переходя в зону течения; или же наоборот, частицы из зоны течения приклеиваются к твёрдому телу.

Следовательно, для описания движения ядра применимо уравнение движения твёрдого тела переменного состава – уравнение Мещерского – приводящее к следующему интегральному уравнению на характеристики сечения:

$$\rho \left(\frac{\partial V}{\partial t} + V \frac{\partial V}{\partial z} \right) = \frac{\partial N}{\partial z} - \frac{\sigma_s \sqrt{2}}{R \xi}. \quad (24)$$

В свою очередь, условие несжимаемости твердого ядра можно записать как $\partial V / \partial z = 0$.

Окончательно, система уравнений, описывающая движение среды Шведова–Бингама внутри деформируемого канала, имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{V^2 R^2}{420} \left((40a + 112 - 3a^2) \xi^2 + (168 + 4a - 2a^2) \xi + 5a^2 + 140 - 44a \right) \right) + \frac{\sigma_s \sqrt{2} R}{\rho} + \\ + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{V R^2}{30} \left((5 + 2a) \xi^2 + (10 + a) \xi + 15 - 3a \right) \right) = \frac{2\mu(2-a)V}{\rho(\xi-1)} + \frac{R^2}{\rho} \frac{\partial N}{\partial z}, \end{aligned} \quad (25)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{V R^2}{30} \left((5 + 2a) \xi^2 + (10 + a) \xi + 15 - 3a \right) \right) + \frac{\partial}{\partial t} (R^2) = 0, \quad (26)$$

$$\rho \frac{\partial V}{\partial t} = \frac{\partial N}{\partial z} - \frac{\sigma_s \sqrt{2}}{R \xi}, \quad (27)$$

$$\frac{\partial V}{\partial z} = 0, \quad (28)$$

$$\frac{E_s h_s}{R_0^2 (1 - \nu_s^2)} (R - R_0) + N = 0. \quad (29)$$

Система пяти уравнений (25) - (29) относительно пяти неизвестных функций V , R , ξ , a , N двух переменных z и t моделирует течение вязкопластической среды Шведова–Бингама внутри деформируемого сосуда.

Далее в главе эта математическая модель используется в постановках задач и тестируется на различных примерах.

1) Численно решается задача о стационарном течении вязкопластической среды Шведова–Бингама внутри деформируемого канала. Общая постановка (25) - (29) в этом частном случае принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} \left(\frac{v^2 R^2}{420} \left((40a + 112 - 3a^2) \xi^2 + (168 + 4a - 2a^2) \xi + 5a^2 + 140 - 44a \right) \right) = \\ = -\frac{\sigma_s \sqrt{2} R}{\rho} + \frac{2\mu(2-a)v}{\rho(\xi-1)} - \frac{\beta R^2}{\rho} \frac{dR}{dz}, \end{aligned} \quad (30)$$

$$\frac{dR}{dz} = -\frac{\sigma_s \sqrt{2}}{\beta R \xi}, \quad (31)$$

где вместо a должно быть подставлено его выражение:

$$a = \frac{5}{2\xi^2 + \xi - 3} \left(\frac{6q}{v\pi R^2} - \xi^2 - 2\xi - 3 \right). \quad (32)$$

Здесь q и v – известные константы, определяемые граничными условиями на входе в канал.

Система (30), (31) нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений относительно неизвестных функций $R(z)$, $\xi(z)$ сопровождается граничными условиями на входе в канал:

$$R(0) = R_0, \quad \xi(0) = \xi_0.$$

Выберем тройку характерных величин V_0, R_0, ρ в качестве базисных. Тогда в задаче образуются безразмерные параметры:

$$\gamma = \frac{V_0^2 \rho}{R_0 \beta}, \quad \text{Re} = \frac{V_0 R_0 \rho}{\mu}, \quad \text{Eu} = \frac{\sigma_s \sqrt{2}}{V_0^2 \rho}.$$

Здесь R_0 – характерный поперечный размер канала, $V_0 = v$ – скорость ядра. Будем считать, что на вход в деформируемый канал поступает стационарный поток вязкопластической среды, соответствующий течению Пуазейля. Поэтому $a(0) = 0$ и константы q, v, R_0 и ξ_0 связаны соотношением (32).

Значения безразмерных величин выберем соответствующими течению крови в крупной артерии человека. Результаты численного решения системы обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений (30), (31) представлены на рис. 3.

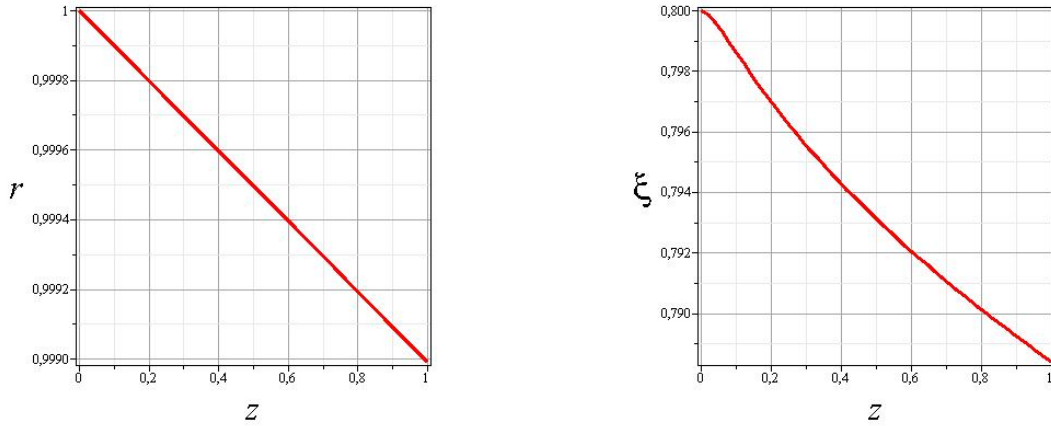


Рис. 3: Безразмерный радиус канала $r(z)$ и радиус ядра жёсткости $\xi(z)$ ($\text{Re} = 200, \text{Eu} = 0.4, \gamma = 2.e - 6, \varepsilon = 0.1$)

2) Другой пример состоит в решении задачи о нестационарном течении вязкопластической среды Шведова–Бингама внутри деформируемого канала в случае асимптотически большой жёсткости канала. Асимптотические разложения имеют следующий вид:

$$V(z, t) = V_0 (v_0(z, t) + \gamma v_1(z, t) + \gamma^2 v_2(z, t) + \dots), \quad (33)$$

$$R(z, t) = R_0 (r_0(z, t) + \gamma r_1(z, t) + \gamma^2 r_2(z, t) + \dots), \quad (34)$$

$$\xi(z, t) = \xi_0(z, t) + \gamma \xi_1(z, t) + \gamma^2 \xi_2(z, t) + \dots, \quad (35)$$

$$a(z, t) = a_0(z, t) + \gamma a_1(z, t) + \gamma^2 a_2(z, t) + \dots, \quad (36)$$

$$P(z, t) = \rho V_0^2 (p_0(z, t) + \gamma p_1(z, t) + \gamma^2 p_2(z, t) + \dots). \quad (37)$$

Приближение нулевого порядка соответствует случаю абсолютно жёстких каналов. В диссертационной работе представлены линейные члены асимптотических разложений интегральных неизвестных по малому параметру γ , обратному безразмерной жёсткости

канала.

3) Также рассматриваются задачи о течении среды Шведова–Бингама внутри абсолютно жёсткого цилиндра. Параметры системы зависят лишь от времени, и решение ищется не зависящим от продольной координаты, так что . Соответствующая система уравнений может быть получена из общей постановки (25) - (29):

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{V(t)R^2}{6} (\xi^2(t) + 2\xi(t) + 3) \right) = \frac{4\mu V(t)}{\rho(\xi(t) - 1)} - \frac{\sqrt{2}\sigma_s R}{\rho} + \frac{R^2}{\rho} k(t), \quad (38)$$

$$\rho \frac{dV(t)}{dt} = k(t) - \frac{\sigma_s \sqrt{2}}{R\xi(t)}. \quad (39)$$

Полученные обыкновенные дифференциальные уравнения описывают нелинейную динамическую систему, параметрами которой являются функции $V(t)$ и $\xi(t)$. Такая система сопровождается начальными условиями $V(0) = V_0$, $\xi(0) = \xi_0$. Функция $\partial N / \partial z(z, t)$ не зависит от продольной координаты и задаётся как внешняя функция-параметр $k(t)$. Тем самым на воображаемых торцах трубы задаются не кинематические характеристики, а силовые.

Если приравнять к нулю правые части системы (38), (39), то можно получить семейство точек двумерной плоскости (V, ξ) , соответствующих течениям Пуазейля с заданным значением $k(t) = \text{const}$. Семейство это представляет собой гладкую кривую и константа k будет её параметризовывать.

Каждая точка этой кривой представляет собой состояние равновесия системы, соответствующее стационарному течению Пуазейля. Динамическая система дифференциальных уравнений исследуется в окрестности положения равновесия. Оказывается, что в малом, рядом с положением равновесия, течение вязкопластической среды под действием перепада давления имеет механическую аналогию с движением осциллятора с вязким трением под действием вынуждающей силы. Показывается, что все собственные значения такой задачи отрицательны:

$$\lambda_{1,2} = - \frac{\xi_0^2 + 8\xi_0 + 3 \pm \sqrt{\xi_0^4 + 64\xi_0^3 + 70\xi_0^2 + 9}}{\text{Re } \xi_0 (1 - \xi_0)^2 (1 + \xi_0)} < 0.$$

4) Численно решается задача о разгоне-торможении вязкопластической среды переменным перепадом давления $k(t)$, когда канал представляет собой абсолютно жесткий цилиндр. Для этого используется система (38) , (39), где задаётся конкретный вид $k(t)$.

Рассмотрим две точки двумерной плоскости (V, ξ) , а точнее, два положения равновесия. Им соответствуют два постоянных перепада давления k_0, k_1 . Разгон-торможение есть переход из одного положения равновесия (V_0, ξ_0) в другое, (V_1, ξ_1) , благодаря функции $k(t)$, меняющей своё значение от k_0 до k_1 .

Введем безразмерные параметры задачи:

$$\text{Re} = \frac{V_0 R \rho}{\mu}, \quad \text{Eu} = \frac{\sigma_s \sqrt{2}}{V_0^2 \rho}, \quad C = \frac{V_1}{V_0}, \quad (40)$$

$$V(t) = V_0 v(\tau), \quad t = T\tau, \quad k(t) = \frac{V_0^2 \rho}{R} \kappa(\tau).$$

Время обезразмерим величиной R/V_0 . Тогда можно показать, что константы выража-

ются следующим образом:

$$\kappa_0 = \frac{(\sqrt{1 + \text{EuRe}} + 1)^2}{\text{Re}}, \quad \kappa_1 = C \frac{(\sqrt{1 + \frac{\text{EuRe}}{C}} + 1)^2}{\text{Re}}. \quad (41)$$

Наглядными являются следующие зависимости перепада давления от времени:

$$\kappa(\tau) = \kappa_1, \quad (42)$$

$$\kappa(\tau) = \kappa_0 + \frac{2}{\pi} (\kappa_1 - \kappa_0) \arctan \frac{\tau}{T}, \quad (43)$$

$$\kappa(\tau) = \frac{\kappa_0 + \kappa_1}{2} + \frac{\kappa_1 - \kappa_0}{2} \cos \pi \left(\frac{\tau}{T} + 1 \right). \quad (44)$$

Для каждого вида изменения перепада давления решение представлено на рис.4 при $\text{Re} = 8$, $\text{Eu} = 3$ и $C = 3$.

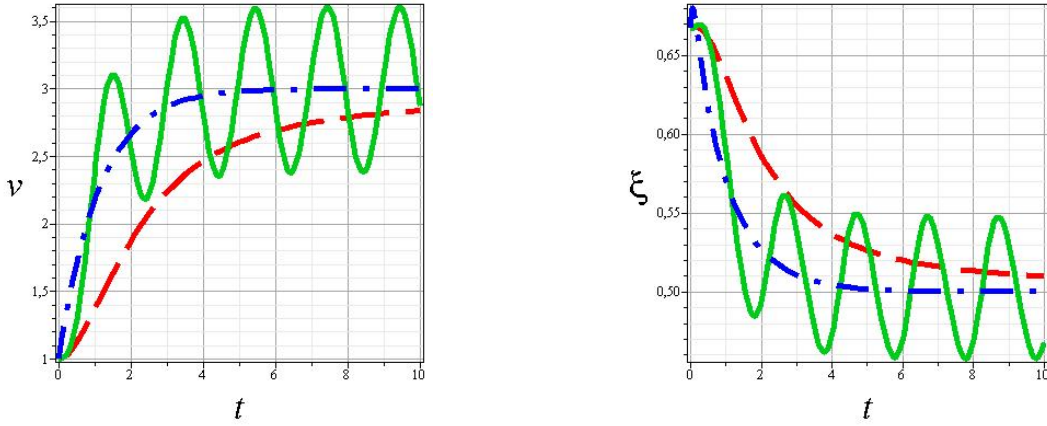


Рис. 4: Безразмерные скорость и радиус ядра жёсткости в зависимости от времени ($\text{Re} = 8$, $\text{Eu} = 3$, $C = 3$). Различные режимы разгона-торможения: штриховая линия - мгновенное изменение перепада давления (42), штрих-пунктирная линия - плавное изменение (43), сплошная линия - гармонически изменяющийся перепад давления (44).

Тестовая задача разгона среды постоянным перепадом давления решена и проведено сравнение с верифицированными результатами. Результаты сравнения показывают хорошую точность интегральной постановки применительно к этой задаче (рис. 5).

5) Известно, что, в отличие от течения ньютоновской среды, среда Шведова–Бингама останавливается за конечное время при движении по инерции, т.е. отсутствии перепада давления. Считается, что в качестве начальных условий в трубе реализовывалось течение Пуазейля, соответствующее перепаду давления κ_0 . Пусть на плоскости параметров (V, ξ) это стационарное течение характеризуется точкой (V_0, ξ_0) . Затем давление скачком пропадает ($\kappa(t) = 0$), и в дальнейшем среда движется с уменьшающейся скоростью из-за вязких сил трения. Через время T^* ядро заполняет всё сечение канала, и его скорость становится нулевой. Требуется оценить T^* .

Эта задача интересна тем, что решение её известно в литературе, и оценка времени остановки сверху имеет следующий вид:

$$\tau_{ex}^* = \frac{\text{Re}}{\lambda_1^2} \ln \left(1 + \frac{\lambda_1^2}{\text{Re Eu}} \sqrt{\frac{5 + 6\xi_0 + 4\xi_0^2}{15}} \right). \quad (45)$$

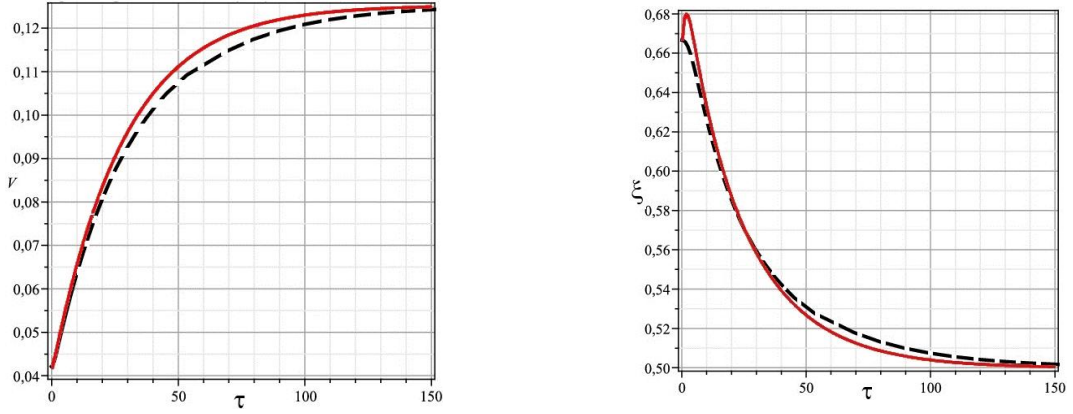


Рис. 5: Безразмерные скорость и радиус ядра жёсткости в зависимости от времени при мгновенном переключении перепада давления ($Re = 8$, $Eu = 3$, $C = 3$). Сплошной линией начерчены результаты интегральной постановки, штриховой - точное решение.

Интегральная постановка (38), (39) приводится к следующему каноническому виду динамической системы:

$$\frac{d\xi(\tau)}{d\tau} = -\frac{Eu Re (\xi^3(\tau) - 3\xi^2(\tau) + 7\xi(\tau) - 3) + 24\xi(\tau)v(\tau)}{\xi(\tau)v(\tau)(1 - \xi^2(\tau))}, \quad (46)$$

$$\frac{dv(\tau)}{d\tau} = -\frac{Eu}{\xi(\tau)}, \quad (47)$$

$$\xi(0) = \frac{Eu Re}{(1 + \sqrt{1 + Eu Re})^2}, \quad (48)$$

$$v(0) = 1. \quad (49)$$

Для оценки времени остановки достаточно разрешить относительно τ^* уравнение

$$\frac{1}{Eu} = \int_0^{\tau^*} \frac{d\tau}{\xi(\tau)}, \quad (50)$$

куда подставлено выражение функции $\xi(t)$, полученное из решения системы (46), (47).

Важны аналитические оценки времени остановки в случае маленького значения предела текучести. Используем процедуру асимптотического разложения системы (46), (47) по малому параметру Eu . Асимптотическое решение с точностью до квадратичных членов даёт приемлемый результат. Действительно, будем считать, что $Eu \ll 1$ и

$$\begin{aligned} v(\tau) &= v_0(\tau) + Eu v_1(\tau) + Eu^2 v_2(\tau) + O(Eu^3), \\ \xi(\tau) &= \xi_0(\tau) + Eu \xi_1(\tau) + Eu^2 \xi_2(\tau) + O(Eu^3). \end{aligned}$$

Использование в качестве $\xi(t)$ асимптотического приближения при малом Eu позволяет разрешить уравнение (50) и получить аналитическую оценку для времени остановки:

$$\tau^* = \frac{Re}{8} \ln \frac{8}{3 Re Eu}. \quad (51)$$

В диссертационной работе проведено сравнение полученной оценки (51) с известной оценкой сверху (45) (рис. 6).

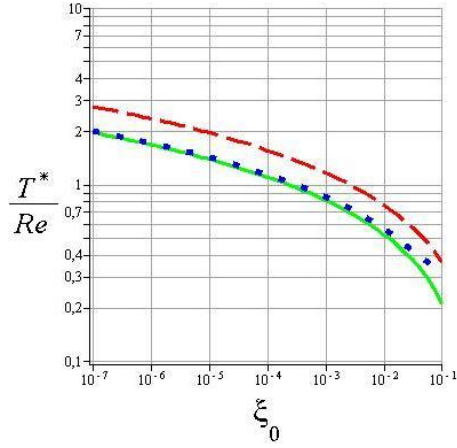


Рис. 6: Время остановки среды Шведова–Бингама, отнормированное на число Рейнольдса. Сплошная линия - интегральная постановка (квадратичное приближение), точки - интегральная постановка (кубическое приближение), штриховая линия - аналитическая оценка сверху. Логарифмическая шкала.

В **третьей главе** рассматриваются вопросы устойчивости деформирования стенок канала при протекании внутри него реологических сред.

1) Изучается устойчивость относительно малых возмущений стационарного поведения системы, состоящей из упругого канала и протекающей внутри него нелинейно-вязкой среды со степенным законом упрочнения. Показывается, что условия устойчивости качественно зависят от показателя степенной среды.

Рассматриваются гармонические возмущения стационарного решения системы (9)-(11). Существование моды с растущей амплитудой означает неустойчивость. Для получения дисперсионного соотношения подставим в систему (9), (10), из которой уже исключено среднее давление, представление параметров системы в виде суммы стационарного процесса и гармонической добавки:

$$Q(z, t) = q + A_1 e^{i(kz - \omega t)}, \quad R(z, t) = R_0 y(x) + A_2 e^{i(kz - \omega t)}.$$

После подстановки уравнения линеаризуются относительно малых неизвестных амплитуд возмущений. Условие существования нетривиального решения этой линейной системы заключается в равенстве нулю её определителя. Дисперсионный закон имеет следующий вид:

$$K\omega^2 + L\omega + M = 0, \quad (52)$$

где $K = K(n, B, \chi) = K_1 + iK_2$, $L = L(k, n, B, \chi) = L_1 + iL_2$, $M = M(k, n, B, \chi) = M_1 + iM_2$ - комплексные функции. Действительные и мнимые части оказываются следующими:

$$K_1 = \frac{2\pi\chi(\chi - 1)}{C^2}, \quad K_2 = 0,$$

$$L_1 = -\frac{12k\chi\left(n + \frac{1}{3}\right)(\chi - 1)}{C(2n + 1)}, \quad L_2 = \frac{(3n + 1)^n \pi^{2-n} 2^{\frac{n}{2} + \frac{3}{2}} ((n - 2)\chi - n)}{CB},$$

$$M_1 = \frac{2k^2(\chi - 1)^2(3n + 1)}{(2n + 1)\pi},$$

$$M_2 = \frac{k(3n + 1)^n \pi^{2-n} 2^{\frac{n}{2} + \frac{1}{2}} ((6 - 6\chi)n^2 + (5\chi + 5)n + 4\chi + 1)}{\pi B n^n (2n + 1)}.$$

В диссертационной работе проводится анализ дисперсионного соотношения (52) на наличие решения ω с положительной мнимой частью. Для нахождения критериев используются ряды Штурма. Полученные аналитически выражения для границ устойчи-

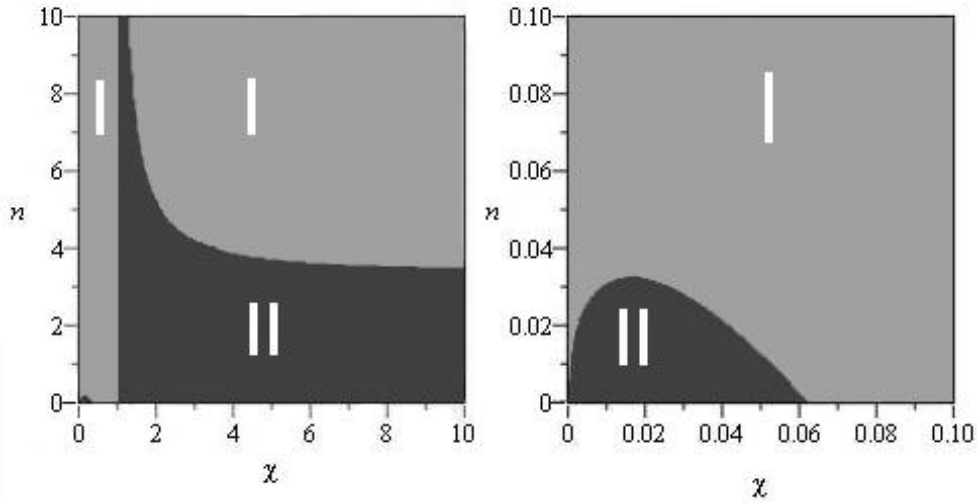


Рис. 7: Области неустойчивости (II) и устойчивости (I) в пространстве безразмерных параметров. Справа - подробный вид окрестности нуля.

ности, в которых участвуют безразмерные параметры ξ и n , представлены на рис. 7.

2) Решается та же задача устойчивости стенок канала, но уже при протекании вязко-пластической среды Шведова–Бингама. Предполагается, что задано течение Пуазейля, и на это движение налагается гармоническое возмущение:

$$a(z, t) = 0 + Ae^{kz-\omega t}, \quad \xi(z, t) = \xi_0 + Be^{kz-\omega t}, \quad R(z, t) = R_0 + De^{kz-\omega t},$$

где A, B, D – неизвестные амплитуды колебаний. Скорость ядра $V(t)$ определяется граничными условиями на входе в канал и не варьируется, а среднее значение напряжений N выражается через радиус сосуда.

Введем следующие безразмерные параметры:

$$C = \frac{V_0 T}{R_0}, \quad \gamma = \frac{V_0^2 \rho}{R_0 \beta}, \quad \text{Re} = \frac{V_0 R_0 \rho}{\mu}, \quad \text{Eu} = \frac{\sigma_s \sqrt{2}}{V_0^2 \rho},$$

где V_0 – скорость ядра в стационарном, невозмущённом процессе. Тогда $\xi_0 = \text{Eu Re} / (1 + \sqrt{1 + \text{Eu Re}})^2$. Дисперсионный закон примет следующий вид:

$$\begin{aligned} & 420 \text{Re} (\xi_0 - 1)^2 \gamma \left(\xi_0 + \frac{3}{2} \right) \text{Eu} \omega^2 + \\ & + 600 i \text{Eu} \left(21 + ik \text{Re} \left(\xi_0 + \frac{11}{10} \right) (\xi_0 - 1)^2 \varepsilon \right) \gamma C \omega - \\ & - i \varepsilon k C^2 (-56 \varepsilon^2 k^2 \xi_0^4 \text{Re} + 10 \varepsilon^2 k^2 \xi_0^3 \text{Re} + 16 \varepsilon^2 k^2 \xi_0^2 \text{Re} + 12 \varepsilon^2 k^2 \xi_0 \text{Re} + \\ & + 6300 \text{Eu} \gamma - 210 i \text{Eu} \varepsilon k \text{Re} \xi_0^3 + 105 i \text{Eu} \varepsilon k \text{Re} \xi_0^2 + 840 \text{Eu} \gamma \xi_0^2 + 3360 \text{Eu} \gamma \xi_0 - \\ & - 315 \text{Eu}^2 \text{Re} \gamma + 18 \varepsilon^2 k^2 \xi_0^5 \text{Re} + 840 i \varepsilon k \xi_0^2 + 420 \text{Eu}^2 \text{Re} \gamma \xi_0 - 210 \text{Eu}^2 \text{Re} \gamma \xi_0^3 + \\ & + 105 \text{Eu}^2 \text{Re} \gamma \xi_0^2 - 152 i \text{Eu} \gamma \varepsilon k \xi_0^2 \text{Re} - 96 i \text{Eu} \gamma \varepsilon k \xi_0 \text{Re} + 120 i \text{Eu} \gamma \varepsilon k \text{Re} + \\ & + 16 i \text{Eu} \gamma \varepsilon k \xi_0^4 \text{Re} - 315 i \text{Eu} \varepsilon k \text{Re} + 420 i \text{Eu} \varepsilon k \text{Re} \xi_0 + 1260 i \varepsilon k \xi_0^3 + \end{aligned}$$

$$+112 iEu \varepsilon k \operatorname{Re} \gamma \xi_0^3) = 0. \quad (53)$$

Показывается, что в отличие от вязких сред стационарное течение вязкопластической среды внутри деформируемого канала является устойчивым при произвольных значениях безразмерных параметров.

Заключение содержит обзор результатов, полученных в работе:

- предложена осреднённая пространственно одномерная математическая модель течения нелинейно-вязкой среды со степенным законом упрочнения внутри упругого канала;
- найдено решение нестационарной задачи о течении степенной среды внутри деформируемого канала в случае асимптотически большой жёсткости канала;
- исследована динамическая устойчивость стенок канала при протекании степенной среды внутри него, и обнаружено качественное отличие условий устойчивости от таковых в случае ньютоновской среды;
- предложена осреднённая пространственно одномерная математическая модель течения вязкопластической среды Шведова–Бингама внутри упругого канала;
- найдено решение нестационарной задачи о течении вязкопластической среды Шведова–Бингама внутри деформируемого канала в случае асимптотически большой жёсткости канала;
- с помощью предложенной модели течения вязкопластической среды Шведова–Бингама внутри упругого канала рассмотрен ряд тестовых задач, причём результаты оказываются согласованными с известными решениями;
- исследована динамическая устойчивость стенок канала при протекании вязкопластической среды внутри него, и показано, что такая система устойчива при любых значениях безразмерных параметров.

Работы автора по теме диссертации

Статьи в журналах, рекомендованных ВАК:

- [1] Вязкопластические течения по каналам с переменным по длине сечением и деформируемыми стенками // Известия РАН. Серия физическая. 2011. т.75. №1. с.139-143
- [2] Устойчивость деформируемых каналов при течении по ним нелинейно-вязких сред со степенным законом упрочнения // Вестник Московского Университета. Сер.1.Математика и механика. 2012. №4. с. 67-70.