Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
"Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова"
Механико-математический факультет

На правах рукописи

Медведев Антон Геннадьевич

Некоторые задачи КАМ-теории для систем Гамильтона с собственным вырождением частот

01.02.01 — теоретическая механика

Автореферат

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва — 2013

Работа выполнена на кафедре теоретической механики и мехатроники механико-математического факультета Федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего профессионального образования “Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова”

Научный руководитель:	Трещев Дмитрий Валерьевич, доктор физико-математических наук, профессор, член-корр. РАН
Официальные оппоненты:	Севрюк Михаил Борисович, доктор физико-математических наук
	Пифтанкин Геннадий Николаевич, кандидат физико-математических наук
Ведущая организация:	Федеральное государственное бюджетное учреждение науки “Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского Российской Академии Наук”

Защита состоится 13 декабря 2013 г. в 16 часов 30 минут на заседании диссертационного совета Д 501.001.22 при МГУ им. Ломоносова по адресу: *119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, Главное здание МГУ, ауд. 16-10.*

С диссертацией можно ознакомиться в читальном зале отдела диссертаций Фундаментальной библиотеки МГУ по адресу: *Ломоносовский проспект, д. 27, Фундаментальная библиотека, сектор А - 8 этаж, к. 812.*

Автореферат разослан 13 ноября 2013 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета Д 501.001.22
при МГУ им. Ломоносова, к.ф.-м.н. Прошкин В.А.

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Рассмотрим функцию Гамильтона $H(p,q)$, определенную на $2n$-мерном многообразии M (считаем функцию и многообразие гладкими). Предположим, что система Гамильтона имеет n первых интегралов $F_1 = H, ..., F_n$. Теорема Лиувилля-Арнольда [3] утверждает, что если:

- скобка Пуассона любых двух интегралов равна нулю $\{F_i, F_j\} \equiv 0$ (т. е. n первых интегралов находятся в инволюции),
- функции F_i независимы на множестве уровня $M_f : \{(p,q) \in M : F_i(p,q) = f_i, \quad i = 1, ..., n\}$ (т. е. n 1-форм $d\,F_i$ линейно независимы в каждой точке M_f).

Тогда:

1. M_f – гладкое многообразие, инвариантное относительно фазового потока с функцией Гамильтона $H = F_1$.
2. Если многообразие M_f компактно и связно, то оно диффеоморфно n-мерному тору $\mathbb{T}^n = \{(\varphi_1, ..., \varphi_n)(\mathrm{mod}\, 2\pi)\}$.
3. Фазовый поток с функцией Гамильтона H определяет на M_f условно-периодическое движение, т. е. в угловых координатах $\varphi = (\varphi_1, ..., \varphi_n)$
$$\frac{d\,\varphi}{d\,t} = \nu, \quad \nu = \nu(f) \in \mathbb{R}^n.$$
4. Канонические уравнения с функцией Гамильтона H интегрируются в квадратурах.

Естественным вопросом является задача о динамике в системе, полученной из вполне интегрируемой в результате малого возмущения. В частности, о существовании инвариантных торов у систем близких к интегрируемым. Если рассматривать простые частные случаи невырожденного нульмерного (положение равновесия) и невырожденного одномерного торов (периодическое решение), то легко показать, что такие объекты сохраняются при малом возмущении исходной системы. Оба случая подробно рассматриваются в классических учебниках по теоретической механике. Для доказательства достаточно применить теорему о неявной функции.

Существенно более сложная задача – сохранение торов размерности выше первой. Этот вопрос волновал классиков небесной механики и наиболее явно был поставлен в работах А. Пуанкаре [17]. Трудности, возникающие в случае двух и более частот, связаны с наличием в рядах теории возмущения малых знаменателей, существенно затрудняющих исследование вопросов сходимости. Наиболее эффективный метод доказательства сходимости рядов теории возмущения в присутствии малых знаменателей был изобретен А. Н. Колмогоровым [11]. Далее метод был усовершенствован В. И. Арнольдом и Ю. Мозером. Набор теорем и методов, возникший в результате развития этого подхода, получил название теории КАМ. Данная диссертация посвящена некоторым новым задачам теории КАМ.

Рассмотрим возмущение интегрируемой гамильтоновой системы с гамильтонианом $H_0(I)$, записанной в переменных "действие-угол":

$$H(I,\varphi,\varepsilon) = H_0(I) + \varepsilon H_1(I,\varphi,\varepsilon), \quad I \in D \subset \mathbb{R}^n, \quad \varphi \in \mathbb{T}^n. \tag{1}$$

Гладкую функцию $\varepsilon H_1(I,\varphi,\varepsilon)$ будем называть возмущением, ε – малая положительная константа. Предположим, что функция $H_0(I)$ – невырождена, т.е.

$$\det \frac{\partial H_0}{\partial I}(I) \neq 0. \tag{2}$$

Наивной классической идеей является введение новой канонической системы координат $(\hat{I},\hat{\varphi})$, в которой функция Гамильтона H зависит только от переменных $\hat{I}$. Соответственно инвариантные торы в возмущенной системе будут иметь уравнение $\hat{I} = const$. Однако, существование таких координат противоречит неинтегрируемости возмущенной системы. Техническим выражением этого обстоятельства является присутствие в рядах Фурье, задающих переход к новым переменным, малых знаменателей $\langle k,\nu\rangle$, где k – целочисленный вектор размерности n, отвечающий коэффициенту Фурье, а $\nu = \frac{\partial H_0}{\partial I}$ – вектор частот. Такие ряды, вообще говоря, не определены при I, задающих резонансный вектор ν, и расходятся при некоторых других ν.

В статье [11] 1954-го года А.Н. Колмогоров предложил схему, позволяющую обойти эту трудность. Предлагалось рассматривать только те торы, частоты которых удовлетворяют диофантовым условиям

$$|\langle k,\nu\rangle| \geq \frac{c}{|k|^\gamma}, \quad k \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\},$$

где $c > 0$ и $\gamma > n-1$. В окрестности таких торов проводится счетное количество канонических замен координат. В ходе каждой замены

порядок малости возмущения повышается квадратично. Квадратичная сходимость позволяет справиться с малыми знаменателями, но только на рассматриваемом торе. Сформулируем теорему Колмогорова:

Теорема 1 *Диофантовый инвариантный n-мерный тор невырожденной вещественно-аналитической системы Гамильтона с n степенями свободы сохраняется при малых вещественно-аналитических возмущениях.*

Эта теорема и ее доказательства В.И. Арнольда [1] и Ю. Мозера [14] (случай гладких функций, а также распространение на случай обратимых систем) положили начало теории Колмогорова-Арнольда-Мозера.

В работах Ю. Пёшеля [16] и Д. Саламона [19] для гладких КАМ-теорем класс гладкости был приближен к оптимальному.

Требование невырожденности функции H_0 может быть ослаблено до невырожденности по Рюссману. Соответствующая КАМ-теорема была независимо опубликована Г. Рюссманом [18], Ю. Сунем и Ч. Ченом [9] и М.Б. Севрюком [21], [22].

В работах В.Ф. Лазуткина [12], А.И. Нейштадта [15] и Н.В. Сванидзе [20] была получена оптимальная оценка на меру множества сохраняющихся торов. Оказывается, что в случае невырожденного H_0 n-мерные торы в возмущенной системе с n степенями свободы заполняют все пространство за исключением множества меры порядка $\sqrt{\varepsilon}$. Соответствующие оценки на меру при ослабленных условиях невырожденности были получены М. Б. Севрюком в работе [22].

КАМ-теорема для случая собственного вырождения частот была сформулирована и доказана В. И. Арнольдом [2]. Особенностью задач подобного рода является то, что часть частот тора в возмущенной системе имеет порядок ε.

В статье “О поведении адиабатического инварианта при медленном периодическом изменении функции Гамильтона” [4] В.И. Арнольдом была рассмотрена автономная система с одной степенью свободы, периодически зависящая от параметра τ. Там же сформулирована теорема о том, что если параметр τ менятся с малой постоянной частотой $\tau = \varepsilon t$, то неавтономная система Гамильтона будет иметь в расширенном фазовом пространстве двумерные инвариантные торы. Одним из основных результатов диссертационной работы является распространение этого результата Арнольда на случай гиперболических торов.

Напомним некоторые определения и основные результаты из теории гиперболических торов. Пусть система Гамильтона с n степенями свобо-

ды имеет l-мерный инвариантный тор $\mathbb{T}^l$, $l < n$. Не вдаваясь в строгие формулировки, дадим качественное определение гиперболического тора

Определение 1 *Инвариантный тор $\mathbb{T}^l$ называется гиперболическим (точнее, частично нормально гиперболическим), если в каждой точке существуют два $(n-l)$-мерных инвариантных относительно линеаризованного фазового потока подпространства в касательном пространстве к тору: устойчивое и неустойчивое. В направлении устойчивого подпространства линеаризованный фазовый поток экспоненциально "сжимает", в направлении неустойчивого – экспоненциально "растягивает".*

Простейшим примером такого тора является верхнее неустойчивое положение равновесия маятника. В этом случае $l = 0$ (нульмерный тор – это точка), а подпространства – касательные к сепаратрисам.

Классические результаты по вопросу сохранения гиперболических диофантовых торов содержатся в работах Ю.Н. Бибикова [5], С. Граффа [10] и Э. Цендера [24]. Эти результаты распространяют теорему Колмогорова на случай гиперболических торов:

Теорема 2 *Диофантовый инвариантный гиперболический тор невырожденной вещественно-аналитической системы Гамильтона сохраняется при малых вещественно-аналитических возмущениях.*

Рассмотрим задачу о "гиперболической надстройке" над случаем собственного вырождения частот. Предполагается, что функция Гамильтона $H(p, q, \tau)$ периодически зависит от параметра τ. Пусть для каждого значения параметра система имеет периодическую гиперболическую орбиту (тор размерности один). Методами КАМ-теории доказывается теорема о существовании в расширенном фазовом пространстве неавтономной системы с гамильтонианом $H(p, q, \varepsilon t)$ (ε — малая, положительная константа) двумерных инвариантных гиперболических торов. Строгая формулировка результата приведена далее. Эта теорема составляет первый основной результат диссертации.

Важной областью исследований является поведение траекторий возмущенной системы Гамильтона в окрестности резонансных торов, т.е. когда частоты соизмеримы с целочисленным вектором.

В качестве одного из первых продвижений в этом направлении можно назвать известную теорему А. Пуанкаре [17], в которой утверждается, что торы, состоящие из периодических решений, разрушаются не полностью. Некоторые из этих решений при возмущении сохраняются

и становятся невырожденными. Более сложный случай возможности существования маломерных торов (размерности два и выше) в окрестности резонансного тора был рассмотрен Д. В. Трещевым в работе [23]. В ней показано, что при определенных условиях общего положения в окрестности невозмущенного резонансного тора при каждом малом значении параметра возмущения существует инвариантный гиперболический тор размерности $n - l$, где n — число степеней свободы, а l — кратность резонанса.

Важно отметить, что маломерные торы имеют в фазовом пространстве нулевую меру, поэтому они невидимы при численном моделировании.

Одной из задач данной диссертационной работы является описание механизмов возникновения торов полной размерности, не являющихся стандартными КАМ-теоремами; доказательство их существования и оценка их меры в окрестности резонанса. Перейдем к описанию численного эксперимента, указывающего на существование таких торов.

Рассмотрим симплектическое отображение

$$(y, x) \mapsto (y_+, x_+), \qquad y \in \mathbb{R}^2, \quad x \in \mathbb{T}^2, \tag{3}$$

$$y_+ = y - \varepsilon\, \partial V/\partial x, \quad x_+ = x + y_+, \qquad V = V(x). \tag{4}$$

Пусть потенциал V имеет вид

$$V = a_1 \cos(x_1 + \varphi_1) + a_2 \cos(x_2 + \varphi_2) + a_3 \cos(x_1 - x_2 + \varphi_3),$$

где $a_1, a_2, a_3, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varepsilon$ — константы.

Зададим $a_j \sim 1$, $\varphi_j \sim 1$ и величину возмущения $\varepsilon \sim 1/10$. С помощью компьютерной программы изучим проекции на плоскость $\mathbb{R}^2 = \{y\}$ типичных траекторий рассматриваемого симплектического отображения. Отметим, что поскольку отображение (3) коммутирует со сдвигами $y \mapsto y + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}^2$, можно перейти к фактор системе с компактным фазовым пространством $\mathbb{R}^2/2\pi\mathbb{Z}^2$. Другими словами, можно считать, что y — точка тора $\mathbb{T}^2$. Будем варьировать начальные условия и отмечать типы встречающихся картинок.

Итак, основные типы картинок следующие:

1. Как и следовало ожидать, наиболее часто встречаются проекции стандартных КАМ-торов. Они занимают все фазовое пространство за исключением множества меры порядка $\sqrt{\varepsilon}$. Мы можем наблюдать такие торы при случайно заданных начальных условиях с вероятностью $1 - C_1\sqrt{\varepsilon}$, где C_1 — положительная константа. Типичные примеры проекций КАМ-торов изображены на рис. 1.

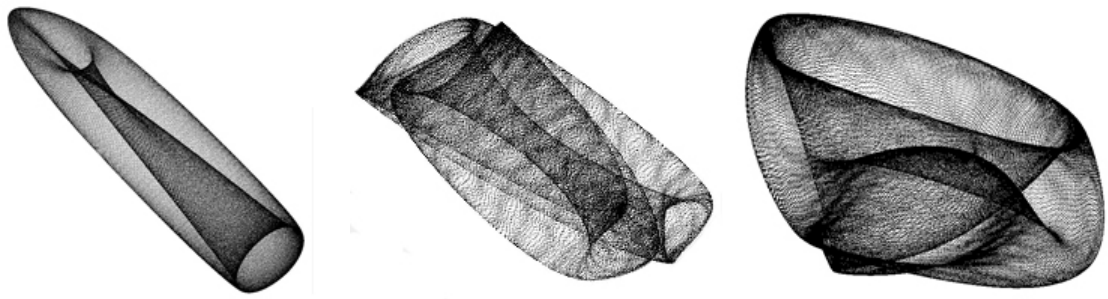

Рис. 1: КАМ-торы

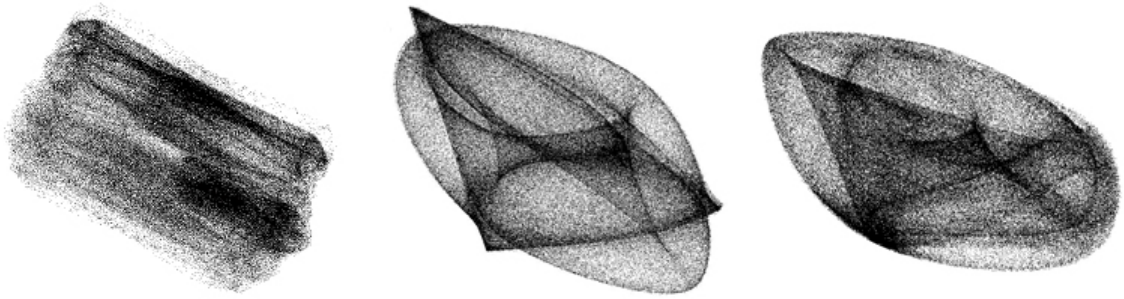

Рис. 2: Хаотические траектории

2. Варьируя начальные условия, можно получить траектории с хаотической динамикой (рис. 2). Эти траектории близки к предыдущим, но имеют размытую структуру. При увеличении возмущения такие траектории полностью теряют очертания и могут заполнять значительную долю пространства действий $\mathbb{T}^2$. Если $\varepsilon > 0$ мало, то вероятность попасть в область хаоса при случайных начальных условиях не превосходит величин порядка $\sqrt{\varepsilon}$.

3. Еще один тип траекторий, который удается наблюдать — это "замкнутые ленты". Примеры таких траекторий можно видеть на рис. 3. Упоминание похожих объектов есть в классическом учебнике [3] В. И. Арнольда. В добавлении 8 Арнольд предлагает рассмотреть распад резонансного тора, на котором число частот на 1 меньше полного (то есть n-мерный вектор частот, где любой $(n-1)$-мерный набор частот диофантов). Далее предлагается усреднить возмущение по $(n-1)$-мерным частотам и рассмотреть полученную консервативную систему с одной степенью свободы. Частота колебаний консервативной системы будет порядка $\sqrt{\varepsilon}$. Автор говорит о возможности доказательства методами КАМ-теории существования в окрестности резонанса торов, имеющих $n-1$ быструю частоту порядка 1 и одну медленную порядка $\sqrt{\varepsilon}$. В нашем исследовании мы будем руководствоваться планом, предложенным В. И.

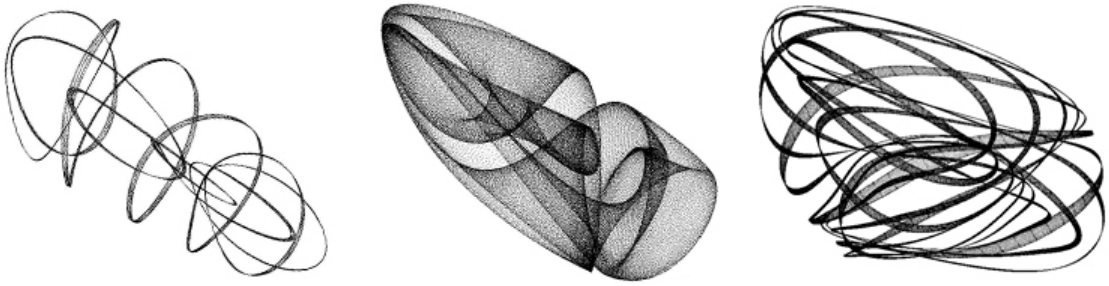

Рис. 3: Торы в окрестности резонанса, “замкнутые ленты”

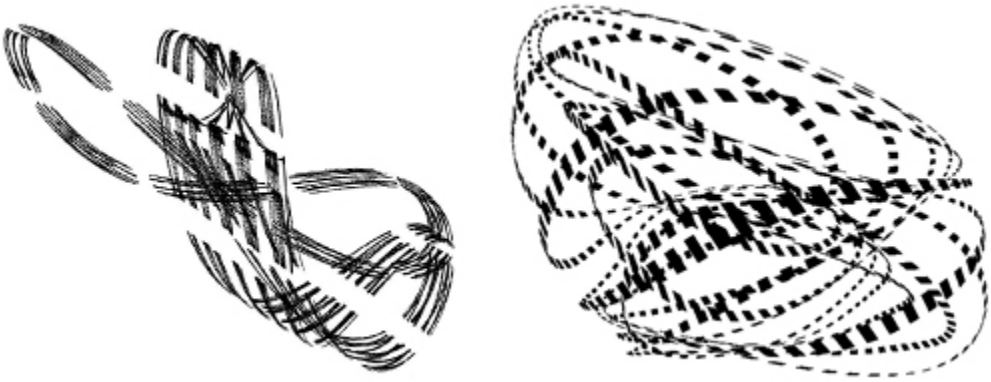

Рис. 4: Торы вокруг устойчивого периодического решения

Арнольдом. Помимо доказательства существования таких торов, мы дадим оценку на их меру в окрестности резонанса. Будет показано, что мера этого множества — вся резонансная область[1] за исключением множества относительной меры порядка $\sqrt{\varepsilon}$. Значит, вероятность увидеть “замкнутую ленту” $\sim \sqrt{\varepsilon}$ (область, в которой существуют рассматриваемые торы, несколько отличается от окрестности в классическом понимании этого термина, подробности см. далее).

4. Значительно реже чем стандартные КАМ-торы и “замкнутые ленты” удается наблюдать траектории, представляющие собой набор плотно заполненных “пятен” на плоскости $\mathbb{R}^2 = \{y\}$, см. рис. 4. Данный тип траекторий — инвариантные торы, расположенные около устойчивого в линейном приближении периодического решения. В нашем случае эти торы лежат в резонансной области, соответствующей резонансу кратности два. Так как мера этой области порядка ε, то вероятность увидеть этот тип траекторий не превосходит $C_2\varepsilon$ для некоторой положительной

[1] мера этой области для каждого типичного резонанса кратности один $\sim \sqrt{\varepsilon}$ и быстро убывает с ростом порядка резонанса

константы C_2.

Вторым основным результатом диссертации является КАМ-теорема, показывающая существование в окрестности резонанса торов из п.3 и дающая оценки на меру таких торов в окрестности резонанса. Так как одна частота получаемых торов мала вместе с возмущением, то КАМ-теорема относится классу задач о системах с собственным вырождением частот.

Цель работы. Целью диссертации является исследование вопросов существования инвариантных гиперболических торов у систем Гамильтона с медленно меняющимся параметром. Также целью работы является теоретическое обоснование (формулировка и доказательство соответствующей КАМ-теоремы) результатов численных эксериментов, описанных выше и изучение поведения систем Гамильтона в окрестности резонанса.

Основные результаты. Основными результатами диссертации являются две КАМ-теоремы (строгие формулировки см. далее):

1. Теорема о сохранении двумерных гиперболических торов в системах Гамильтона с медленно меняющимся параметром.

2. Теорема о существовании у систем Гамильтона в окрестности резонанса кратности один торов полной размерности и об оценке меры таких торов.

Научная новизна и достоверность результатов. Основные результаты диссертации являются новыми. В работе присутствуют полные и строгие доказательства. Второй результат подтверждается численными экспериментами.

Методы исследования. Основные теоремы диссертации доказываются методами КАМ-теории.

Теоретическая и практическая научная ценность. Работа носит теоретический характер. Результаты диссертации могут быть использованы при изучении траекторий движения механических и физических систем, в задачах теории возмущений, в исследованиях, проводимых в МГУ имени М.В.Ломоносова, Математическом институте имени В.А.Стеклова РАН, Институте прикладной математики имени М.В.Келдыша РАН, Институте проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН.

Апробация работы. Результаты диссертации докладывались на семинарах кафедры теоретической механики и мехатроники МГУ, на кон-

ференции “ЛОМОНОСОВ-2013”, на международной конференции по математической теории управления и механике (в г. Суздаль) в 2013 г.

Публикации. Результаты диссертации опубликованы в одной статье (в рецензируемом журнале), а также в виде тезисов докладов на двух международных конференциях. Одна статья принята к публикации в рецензируемом журнале и будет опубликована в начале 2014 года. Ссылки приведены в конце автореферата.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка литературы, содержащего 45 наименований. Объем диссертации 124 страницы.

Обзор содержания диссертации

Во введении описана предметная область диссертации, дан обзор литературы и известных результатов, отвечающих тематике задач диссертации. Там же сформулированы основные результаты.

Первая глава. В первой главе формулируются определения из теории гиперболических торов, формулируются и доказываются технические леммы, необходимые в дальнейшем. А также доказывается обобщение теоремы 2 на случай инвариантного определения гиперболического тора.

Вторая глава. Глава два содержит один из двух основных результатов данной диссертационной работы — теорему о сохранении гиперболических торов в системах Гамильтона с медленно меняющимся параметром.

Рассмотрим систему Гамильтона (M, ω, H) с гамильтонианом $H(v, \tau)$, где (M, ω) — вещественно-аналитичное симплектическое многообразие размерности $2n$, $v \in M$, а $\tau \bmod 2\pi$ пока считается параметром. Предположим, что система обладает следующими свойствами:

- функция $H(v, \tau)$ 2π-периодична по параметру τ и вещественно-аналитична по всем аргументам,
- существует интервал энергии (h_1, h_2), такой, что при всех $h \in (h_1, h_2)$ и всех τ система имеет периодическую гиперболическую орбиту $\mathbb{T}^1_{h,\tau}$ (с ненулевой частотой), вещественно-аналитично зависящую от h и τ.

Итак, имеем семейство цилиндров N_τ, расслоенных на периодические гиперболические орбиты

$$N_\tau = \bigcup_{h\in(h_1,h_2)} \mathbb{T}^1_{h,\tau}. \tag{5}$$

Напомним определение гиперболической орбиты:

Определение 2 *Периодическая орбита автономной гамильтоновой системы называется гиперболической, если все ее мультипликаторы, кроме двух тривиальных, равных единице, лежат вне единичной окружности.*

Рассмотрим расширенное фазовое пространство $M\times\mathbb{T}$, $(v,\tau)\in M\times\mathbb{T}$. Для любого значения энергии из интервала $h_0\in(h_1,h_2)$ в расширенном фазовом пространстве существует двумерный тор $\mathbb{T}^2_{h_0}$, расслоенный на периодические решения

$$\mathbb{T}^2_{h_0} = \bigcup_{\tau\in[0,2\pi]} \mathbb{T}^1_{h_0,\tau} \subset M\times\mathbb{T}. \tag{6}$$

Для наглядности можно представить себе цилиндр

$$\tilde{N} = \bigcup_{h_0\in(h_1,h_2)} \mathbb{T}^2_{h_0} \subset M\times\mathbb{T},$$

состоящий из двумерных торов (см. рис. 5). Энергия меняется вдоль образующей цилиндра.

Определение 3 *Пусть $\nu(h,\tau)$ — частота, соответствующая орбите $\mathbb{T}^1_{h,\tau}$. Величину $\langle\nu\rangle(h) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\nu(h,\tau)\,d\tau$ будем называть средней частотой для тора $\mathbb{T}^2_h$.*

Определение 4 *Пусть $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0)$ — малый параметр, $\nu\in\mathbb{R}$. Вектор частот (ν,ε) называется диофантовым, если*

$$|\nu l_1+\varepsilon l_2| > \frac{\varepsilon}{(|l_1|+|l_2|)^2}, \qquad \forall l_1,l_2\in\mathbb{Z}, |l_1|+|l_2|\neq 0. \tag{7}$$

Рассмотрим “неавтономное” возмущение исходной системы, положив $\tau=\varepsilon t$. Функция Гамильтона примет вид $H(v,\varepsilon t)$. Сформулируем основную теорему:

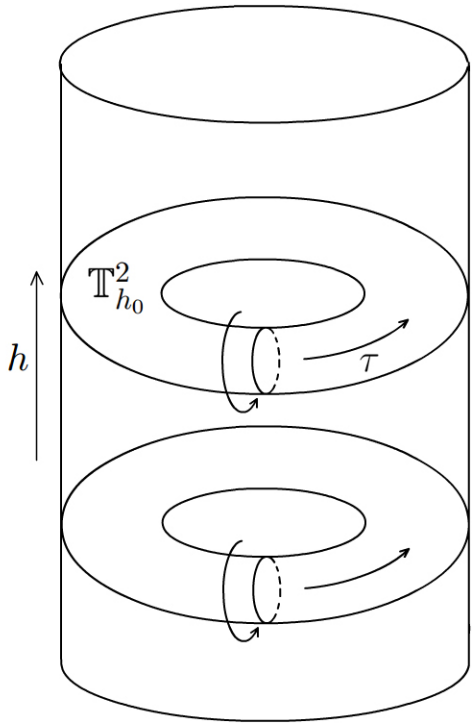

Рис. 5: Цилиндр $\tilde{N}$

Теорема 3 *Пусть для некоторого $h_0 \in (h_1, h_2)$ выполнены следующие условия:*

1. $\int_0^{2\pi} \frac{\partial \nu}{\partial h}(h_0, \tau)\, d\tau \neq 0$,
2. *функция $H(v, \tau)$ является вещественно-аналитичной в окрестности тора $\mathbb{T}^2_{h_0}$.*

Тогда существует положительная константа $\varepsilon_0 > 0$ такая, что для любого $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, для которого вектор частот $(\langle\nu\rangle(h_0), \varepsilon)$ удовлетворяет системе неравенств (7), возмущенная неавтономная система с гамильтонианом $H(v, \varepsilon t)$ имеет вещественно-аналитичный двумерный инвариантный гиперболический тор с частотой $(\langle\nu\rangle(h_0), \varepsilon)$.

В работе [8] С.В. Болотина и Д.В. Трещева дается инвариантное определение гиперболического тора, обобщающее традиционное координатное определение. Сформулируем аналогичное определение для неавтономного случая, когда одной из угловых координат тора является время.

Определение 5 *Тор K называется гиперболическим, если существуют два гладких подрасслоения $E^{s,u}$ в $T_K M$ таких что:*

1. *размерность слоев каждого подрасслоения равна $n - l + 1$,*

2. *$E^{s,u}$ инвариантны относительно линеаризованного фазового потока:*

$$Dg^t(w)E^{s,u}_w = E^{s,u}_{g^t(w)}, \qquad w \in K, \quad t \in \mathbb{R},$$

3. *линеаризованный фазовый поток является сжимающим на E^s и растягивающим на E^u, то есть существуют положительные константы C и λ, для которых выполнено:*

$$|Dg^t(w)|_{E^s_w}| \le Ce^{-\lambda t}, \qquad w \in K, \quad t \ge 0,$$

$$|Dg^{-t}(w)|_{E^u_w}| \le Ce^{-\lambda t}, \qquad w \in K, \quad t \ge 0.$$

E^s называется устойчивым подрасслоением, E^u - неустойчивым.

Дальнейшее содержание второй главы можно условно разделить на два раздела:

1. Приведение функции Гамильтона (выбор координат) к максимально удобному виду для формулировки КАМ-теоремы.

2. Доказательство существования тора методами КАМ-теории.

В окрестности множества $\tilde{N}$ существует система координат $(I, X, Z_s, Z_u, T) \in \mathbb{R} \times \mathbb{T} \times \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{T}$, где Z_s, Z_u — в линейном приближении координаты на E^s_w и E^u_w, а T — время. В этой системе координат гамильтониан и симплектическая структура имеют вид:

$$H = G(I) + \langle Z_s, \Omega(X,T)Z_u\rangle + \varepsilon H_1(I, X, Z_s, Z_u, T) + O_3(I, Z_s, Z_u), \tag{8}$$
$$\omega = \tfrac{1}{\varepsilon} dI \wedge dX + dZ_s \wedge dZ_u.$$

По X и T функции периодичны с периодом 2π. Матрица $\Omega(X,T)$ обладает свойством ν-положительной определенности, отвечающим за гиперболичность (подробнее см. в тексте диссертации, а также в работе С.В. Болотина и Д.В. Трещева [8]).

При $\varepsilon H_1 = 0$ система имеет инвариантный тор $\{Z_u = Z_s = 0, I = 0\}$. Оставшаяся часть главы два посвящена описанию КАМ-процедуры и доказательству ее сходимости. Процедура состоит из счетного числа шагов, в ходе каждого из которых квадратично повышается порядок малости соответствующих членов разложения в ряд по I, Z_s, Z_u слагаемого εH_1.

Третья глава. В этой главе формулируется и доказывается второй основной результат диссертации — теорема о существовании у систем Гамильтона в окрестности резонанса кратности один торов полной размерности и об оценке меры таких торов.

Рассмотрим систему Гамильтона близкую к интегрируемой

$$\dot{X} = \partial H/\partial Y, \quad \dot{Y} = -\partial H/\partial X, \qquad Y \in \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^{n+1}, \quad X \in \mathbb{T}^{n+1}, \quad (9)$$

$$H = H_0(Y) + \varepsilon H_1(Y, X) + O(\varepsilon^2), \quad \varepsilon \geq 0, \quad \omega = dY \wedge dX. \quad (10)$$

Пусть система имеет резонансную гиперповерхность Σ вида (здесь ограничимся поверхностями частного вида, в диссертации рассмотрен общий случай)

$$\Sigma = \Big\{ Y \in \mathcal{D} : \frac{\partial H_0}{\partial Y_{n+1}}(Y) = 0 \Big\}.$$

Вектор частот $\nu(Y) = \frac{\partial H_0}{\partial Y}(Y)$ резонансный. Соответствующий резонанс — $(0, \ldots, 0, 1)$. Предположим, что в окрестности Σ имеем $\frac{\partial^2 H_0}{\partial Y_{n+1}^2}(Y) \neq 0$. Тогда можно разрешить уравнение Σ относительно Y_{n+1}

$$\Sigma = \{ Y \in \mathcal{D} : Y_{n+1} = G(Y_1, \ldots, Y_n) \}.$$

В координатах (y, x, p, q), где

$$y = (y_1, \ldots, y_n) = (Y_1, \ldots, Y_n), \quad p = \varepsilon^{-1/2}(Y_{n+1} - G(y)),$$
$$x = (x_1, \ldots, x_n) = \big(X_1 + G'_{y_1} q, \ldots, X_n + G'_{y_n} q\big), \quad q = X_{n+1},$$

резонансная поверхность Σ имеет простое уравнение $\{p = 0\}$.

Симплектическая структура и гамильтониан принимают вид

$$\omega = dy \wedge dx + \sqrt{\varepsilon}\, dp \wedge dq,$$
$$\Lambda(y) + \varepsilon\big(\tfrac{1}{2} A(y) p^2 + u(y, q)\big) + \varepsilon U_1(y, x, q) + \varepsilon^{3/2} U_2(y, p, x, q, \sqrt{\varepsilon}), \quad (11)$$

где

$$\Lambda(y) = H_0(y, G(y)), \quad A(y) = \frac{\partial^2 H_0}{\partial Y_{n+1}^2}(y, G(y)).$$

Функции u, U_1 и U_2 получаются из разложения Гамильтониана в ряд и усреднения по x. Эти преобразования подробно описаны в главе 3 диссертации. С точностью до $\varepsilon U_1 + \varepsilon^{3/2} U_2$ мы имеем интегрируемую систему, представляющую из себя сумму натуральной системы с одной степенью свободы и периодическим потенциалом в координатах p, q (гамильтониан $\frac{1}{2} A(y) p^2 + u(y, q)$) и n-мерного ротатора (гамильтониан $\Lambda(y)$).

Отметим, что переменные y являются первыми интегралами (при $U_1 = U_2 = 0$). Если $u(y, q) = -cosq$, то в качестве системы с одной степенью свободы получаем математический маятник. Для краткости будем эту систему называть маятником и в общем случае.

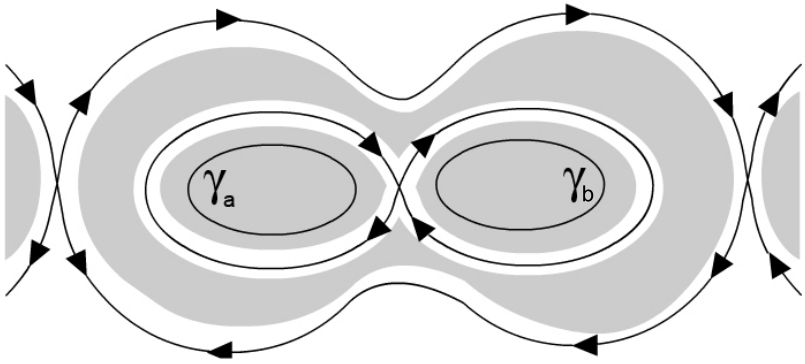

Рис. 6: Фазовый портрет “маятника”. Область $\mathcal{D}_o$ при $\{y = \mathrm{const}\}$ закрашена серым цветом, γ_a и γ_b — траектории, соответствующие одному уровню энергии.

Нас интересует область $\mathcal{D}_{os}$, в которой “маятник” $\frac{1}{2}A(y)p^2 + u(y,q)$ совершает колебательные движения. Для каждого y рассмотрим экстремальные значения “потенциала” u:

$$u(y, q_{\min}(y)) = \min_{q\in\mathbb{T}} u(y,q), \quad u(y, q_{\max}(y)) = \max_{q\in\mathbb{T}} u(y,q). \tag{12}$$

Тогда $\mathcal{D}_{os}$ задается неравенствами

$$\mathcal{D}_{os} = \big\{(y,p,x,q) : u(y,q_{\min}) < \frac{1}{2}A(y)p^2 + u(y,q) < u(y,q_{\max})\big\}. \tag{13}$$

Мера области $\mathcal{D}_{os}$ в исходных переменных Y, X имеет порядок $\sqrt{\varepsilon}$, это следует из формулы $Y_{n+1} = \sqrt{\varepsilon}p + G(y)$.

Легко видеть, что в $\mathcal{D}_{os}$ система “ротатор + маятник” имеет инвариантные $(n+1)$-мерные торы $\mathbb{T}^{n+1}_{y,\gamma}(\varepsilon)$, где γ — замкнутая кривая на плоскости (p,q), соответствующая компоненте связности уровня энергии маятника, характеризующая колебательную составляющую движения. Пример фазового портрета маятника изображен на рис. 6. Символами γ_a и γ_b обозначены две траектории, соответствующие одному уровню энергии.

Необходимо отступить от сепаратрис маятника (подробнее см. в диссертации). Соответствующая область $\mathcal{D}_0$ при $y = const$ закрашена на рис. 6 серым цветом.

Оказывается, большинство из торов $\mathbb{T}^{n+1}_{y,\gamma}(\varepsilon)$ не разрушаются, а в слегка деформированном виде существуют в основной системе с гамильтонианом (11). Сформулируем основной результат третьей главы:

Теорема 4 *Предположим, что система с гамильтонианом (11) вещественно-аналитична. Пусть $\varepsilon_0 > 0$ достаточно мало. Тогда для любого $\varepsilon \leq \varepsilon_0$ большинство торов $\mathbb{T}^{n+1}_{y,\gamma}(\varepsilon) \subset \mathcal{D}_0$ сохраняются при возмущениях и существуют в основной системе. Для некоторой константы $C > 0$, не зависящей от ε, мера множества таких торов в $\mathcal{D}_0$ не менее чем $\mu(\mathcal{D}_0) - C\varepsilon$.*

Замечание 1 *Так как мера $\mathcal{D}_0$ в исходных координатах Y, X имеет порядок $\sqrt{\varepsilon}$, то относительная мера сохраняющихся торов - вся область $\mathcal{D}_0$, за исключением множества относительной меры порядка $\sqrt{\varepsilon}$.*

Так как одна частота рассматриваемого тора имеет порядок $\sqrt{\varepsilon}$, то задача принадлежит к классу КАМ-теорем для систем с собственным вырождением частот.

Оставшаяся часть третьей главы посвящена доказательству теоремы 4.

С помощью предварительных преобразований в области $\mathcal{D}_0$ вводится система координат $(\hat{y}, I, \hat{x}, \varphi) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{T}^n \times \mathbb{T}$, где $\hat{y}$ — локальные координаты на резонансной поверхности, $\hat{x}$ — угловые координаты, отвечающие нерезонансным фазам, а пара (I, φ) — переменные "действие-угол" для маятника с гамильтонианом $\frac{1}{2}A(y)p^2 + u(y, q)$. В этих координатах гамильтониан и симплектическая структура принимают вид:

$$\Lambda(\hat{y}) + \varepsilon h(\hat{y}, I) + \varepsilon \hat{V}(\hat{y}, I, \hat{x}, \varphi, \sqrt{\varepsilon}), \quad \langle \hat{V} \rangle_x = O(\sqrt{\varepsilon}), \tag{14}$$

$$d\hat{y} \wedge d\hat{x} + \sqrt{\varepsilon} dI \wedge d\varphi, \tag{15}$$

где функции $\Lambda, h, \hat{V}$ вещественно-аналитичны. Функция $\hat{V} = U_1 + \sqrt{\varepsilon} U_2$.

Дальнейшее доказательство представляет собой построение последовательности замен координат, повышающих порядок малости функции $\hat{V}$. В отличии от задачи, рассмотренной в главе два, где показывается существование одного тора, в главе три мы хотим оценить меру всех торов. В ходе каждой замены координат область D_0 будет уменьшаться, мы будем удалять из нее малые окрестности резонансов. Показано, что суммарная относительная мера всех удаляемых резонансных полос имеет порядок $\sqrt{\varepsilon}$.

Заключение. В заключении сформулированы основные результаты диссертации.

Личный вклад соискателя. Результаты первой и второй глав получены лично соискателям. Результат третьей главы получен соискателем совместно с А. И. Нейштадтом и Д. В. Трещевым. Постановка задачи,

ее формализация и план проведения КАМ-процедуры принадлежат А. И. Нейштадту и Д. В. Трещеву. Вклад соискателя состоит в подробном описании КАМ-процедуры и в доказательстве ее сходимости.

Благодарности. Выражаю благодарность своему научному руководителю Дмитрию Валерьевичу Трещеву за всестороннюю поддержку при написании данной диссертационной работы, а также всему коллективы кафедры теоретической механики и мехатроники МГУ имени М. В. Ломоносова за полезные обсуждения, замечания и советы.

Публикации по теме диссертации

1. А. Г. Медведев, “Гиперболические торы в системах Гамильтона с медленно меняющимся параметром”, Матем. сб., 204:5, 2013, 45–66

2. А. Г. Медведев, “Сохранение гиперболических торов в системах Гамильтона”, Матем. заметки, 95:2, 2014 (принята в печать)

3. А. Г. Медведев, “Гиперболические торы в системах Гамильтона с медленно меняющимся параметром”, материалы Международного молодежного научного форума “ЛОМОНОСОВ-2013” / Отв. ред. А.И. Андреев, А.В. Андриянов, Е.А. Антипов, М.В. Чистякова. [Электронный ресурс], М.: МАКС Пресс, 2013, 1 электрон. опт. диск (DVD-ROM)

4. А. Г. Медведев, А. И. Нейштадт, Д. В. Трещев, “Лагранжевы торы в окрестности резонанса системы Гамильтона близкой к интегрируемой”, тезисы докладов Международной конференции по математической теории управления и механике, Суздаль 2013 г., с. 166

Литература

[1] В. И. Арнольд, “Доказательство теоремы А. Н. Колмогорова о сохранении условно-периодических движений при малом изменении функции Гамильтона”, УМН, 18:5(113),1964, с. 13–40

[2] В. И. Арнольд, “Малые знаменатели и проблемы устойчивости движения в классической и небесной механике”, УМН, 18:6(114),1963, с. 91–192

[3] В. И. Арнольд, *Математические методы классической механики*, УРСС, М., 2003

[4] В. И. Арнольд, “О поведении адиабатического инварианта при медленном периодическом изменении функции Гамильтона”, Докл. АН СССР, 142:4, 1962, с. 758–761

[5] Ю. Н. Бибиков, “Усиление одной теоремы Мозера”, Докл. АН СССР, 213:4, 1973, с. 766–769

[6] N. Brännström, V. Gelfreich, “Drift of slow variables in slow-fast Hamiltonian systems”, Phys. D, 237:22, 2008, p. 2913–2921

[7] H. W. Broer, G. B. Huitema, and M. B. Sevryuk, Families of quasi-periodic motions in dynamical systems depending on parameters, Nonlinear dynamical systems and chaos (Groningen, 1995), Progr. Nonlinear Differential Equations Appl., vol. 19, Birkhäuser, Basel, 1996, p. 171–211

[8] S. V. Bolotin, D. V. Treschev, “Remarks on the definition of hyperbolic tori of Hamiltonian systems”, Regul. and Chaotic Dynamics, 5:4, 2000, p. 401–412

[9] Ch.-Q. Cheng and Y.-S. Sun, “Existence of KAM tori in degenerate Hamiltonian systems”, J. Differential Equations 114 (1994), no. 1, 288–335

[10] S. M. Graff, “On the conservation of hyperbolic invariant tori for Hamiltonian systems”, J. Differential Equations, 15:1, 1974, p. 1–69

[11] А.Н. Колмогоров, “ О сохранении условнопериодических движений при малом изменении функции Гамильтона”, Докл. АН СССР, 98:4, 1954, с. 527-530

[12] В. Ф. Лазуткин, “К теореме Мозера об инвариантных кривых”, В сб.: Вопр. динамич. теории распростр. сейсмич. волн., вып. 14., Л.: Наука, 1974, с. 109–120

[13] A. G. Medvedev, A. I. Neishtadt, D. V. Treschev, “Lagrangian tori near resonances of near-integrable Hamiltonian systems”, arXiv:1311.0132 (http://arxiv.org/abs/1311.0132)

[14] J. Moser, “On invariant curves of area-preserving mappings of an annulus”, Nachr. Akad. Wiss. Göttingen Math.-Phys. Kl. II, 1962, p. 1–20

[15] А. И. Нейштадт, “Оценки в теореме Колмогорова о сохранении условно-периодических движений”, ПММ., 45:6, 1981, с. 1016–1025

[16] J. Pöschel, “Über invariante Tori in differenzierbaren Hamiltonshen Systemen”, Bonner Mathematische Schriften, 120, Universität Bonn Mathematisches Institut, Bonn, 1980

[17] А. Пуанкаре, *Новые методы небесной механики*, Избранные труды. Т. 1. М.: Наука, 1971

[18] H. Rüssmann, “Nondegeneracy in the perturbation theory of integrable dynamical systems”, Number theory and dynamical systems (York, 1987), London Math. Soc. Lecture Note Ser., vol. 134, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1989, pp. 5–18

[19] D. Salamon, “The Kolmogorov-Arnold-Moser theorem”, ETH-Zürich, 1986 (preprint), 44 p.

[20] Н. В. Сванидзе, “Малые возмущения интегрируемой динамической системы с интегральным инвариантом”, Краевые задачи математической физики. 10, Сборник работ, Тр. МИАН СССР, 147, 1980, с. 124–146

[21] М. Б. Севрюк, “Инвариантные торы гамильтоновых систем, невырожденных в смысле Рюссмана”, Докл. РАН, 346:5, 1996, с. 590–593

[22] M. B. Sevryuk, “KAM-stable Hamiltonians”, J. Dynam. Control Systems, V. 1, N. 3, 1995, 351–366

[23] Д. В. Трещев, “Механизм разрушения резонансных торов гамильтоновых систем”, Матем. сб., 180:10, 1989, с. 1325–1346

[24] E. Zehnder, “Generalized implicit function theorems with applications to some small divisor problems, II”, Comm. Pure Appl. Math. 29:1, 1976, p. 49–111