МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

На правах рукописи

УДК 539.3

Мищенко Александр Васильевич

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИЧЕСКОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ И РАЗРУШЕНИЯ ТВЕРДЫХ ТЕЛ В ОДНОМЕРНОМ ПРИБЛИЖЕНИИ МЕТОДОМ РАЗДЕЛЕНИЯ ПО ФИЗИЧЕСКИМ ПРОЦЕССАМ

Специальность 01.02.04 – механика деформируемого твердого тела

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-
математических наук,
профессор Киселев
Алексей Борисович

Москва - 2013

Работа выполнена на кафедре газовой и волновой динамики механико-математического факультета Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова и в Центре фундаментальных и прикладных исследований ВНИИ автоматики имени Н.Л. Духова.

Научный руководитель: *Доктор физико-математических наук, профессор* Киселев Алексей Борисович

Официальные оппоненты: *Доктор физико-математических наук, старший научный сотрудник* Пшеничнов Сергей Геннадиевич

Доктор физико-математических наук, доцент Медведский Александр Леонидович

Ведущая организация: НИИ системных исследований РАН

Защита состоится «20» декабря 2013 г. в 16 часов на заседании диссертационного совета Д 501.001.91 при Московском государственном университете имени М.В. Ломоносова по адресу: 119992, Москва, Ленинские горы, Главное здание МГУ, механико-математический факультет, аудитория 12-24.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке механико-математического факультета МГУ (Главное здание, 14 этаж)

Автореферат разослан «14» ноября 2013 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета Д 501.001.91,
доктор физико-математических наук, профессор

С.В. Шешенин

Общая характеристика работы

Актуальность исследований, проведенных в диссертации, обусловлена необходимостью создания новых численных методов для расширения класса решаемых задач и необходимостью получения точных решений задач механики деформируемого твердого тела, которые могут быть использованы, в частности, для оценки эффективности новых численных методов и тестирования компьютерных программ.

Цель диссертационной работы. Численное и аналитическое исследование одномерных упругопластических задач деформирования и разрушения твердых тел.

Научная новизна. В работе впервые подробно и в полной постановке аналитически исследуются волны нагружения и разгрузки в твердом упругопластическом теле при одноосном деформировании.

Предлагается оригинальный численный метод решения систем уравнений, описывающих модели упругопластического деформирования и разрушения сплошной среды (упругопластическая модель Прандтля-Рейса, упруговязкопластическая модель Соколовского-Пэжины, модель повреждаемой упруговязкопластической среды). Данный метод протестирован на ряде упругопластических задач без учета разрушения. Впервые с помощью данного метода численно исследована задача о плоском соударении тонких пластин с откольным разрушением. Показано, что разработанный численный метод и используемая модель разрушения дают результаты, которые с высокой точностью согласуются с экспериментальными данными по плоскому соударению тонких пластин.

Научная и практическая значимость. Результаты работы могут быть использованы при тестировании новых численных методов и программных комплексов. Предложен новый численный метод, основанный на методе разделения по физическим процессам с использованием метода Годунова на подвижных эйлеровых сетках. Данный метод используется для решения широкого круга задач механики деформируемых сред. Метод положен в основу комплекса прикладных программ "ТИС". В его создании принимали участие И.С. Меньшов, А.Б. Киселев, П.П. Захаров, А.А. Серёжкин, М.И. Климов, А.В. Мищенко, являющиеся сотрудниками механико-математического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова и Центра фундаментальных и прикладных исследований ВНИИ автоматики имени Н.Л. Духова. Данный комплекс успешно применяется в ВНИИ автоматики имени Н.Л. Духова для проведения расчетов динамики упругопластического деформирования сплошной среды.

Достоверность результатов, полученных в диссертационной работе, обусловлена использованием термодинамически корректных моделей сплошных сред, фундаментальных законов механики и апробированных численных методов. Результаты численного решения ряда тестовых задач с высокой точностью согласованы с экспериментальными данными и аналитическими решениями, описание которых приводится в работе.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (гранты № 09-01-00144а и № 12-01-00425а).

Апробация работы. Основные результаты диссертации докладывались на следующих научных конференциях и семинарах:

1. Ломоносовские чтения МГУ. Москва (ноябрь 2011, апрель 2012, апрель 2013).
2. Международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых учёных «Ломоносов-2013», Москва, апрель 2013.
3. XI Забабахинские научные чтения. Снежинск, 16-20 апреля 2012.
4. Advanced Problems in Mechanics. St. Petersburg, July 2-8, 2012.
5. European Congress on Computational Methods in Applying Science and Engineering (ECCOMAS 2012). Vienna, Austria, September 10-14, 2012.
6. XII International Conference on Computational Plasticity. Fundamentals and Applications (COMPLAS XII). Barcelona, Spain. September 3-5, 2013.
7. V-VII научно-технические конференции молодых ученых ВНИИ автоматики имени Н.Л. Духова (март 2011, март 2012, март 2013).
8. Научно-исследовательский семинар кафедры газовой и волновой динамики механико-математического факультета МГУ под руководством академика РАН Р.И. Нигматулина.
9. Научно-исследовательский семинар кафедры механики композитов механико-математического факультета МГУ под руководством профессора Б.Е. Победри.
10. Научно-исследовательский семинар кафедры теории пластичности механико-математического факультета МГУ под руководством член-корр. РАН Е.В. Ломакина.
11. Научно-исследовательский семинар кафедры теории упругости механико-математического факультета МГУ под руководством профессора И.А. Кийко.

На защиту выносятся:

- аналитическое исследование волн нагружения и разгрузки в твердом упругопластическом теле при одноосном деформировании в полной постановке;

- численное исследование задачи о плоском соударении тонких пластин с откольным разрушением методом разделения по физическим процессам.

Публикации. По работе имеется 5 публикаций, в том числе две статьи в журналах из перечня ВАК.

Личный вклад автора состоит в аналитическом исследовании волн нагружения и разгрузки в твердом упругопластическом теле при одноосном деформировании, в участии в разработке численного метода, в адаптации комплекса для расчета представленных в диссертации задач, в проведении расчетов и анализе их результатов.

Содержание работы

Диссертационная работа состоит из введения, двух глав, заключения и списка литературы. В работе содержится 43 рисунка, 81 библиографическая ссылка. Общий объем диссертационной работы составляет 104 страницы.

Во введении приводится краткий обзор численных методов, применяющихся для моделирования процессов упругопластического деформирования и разрушения твердых тел. Обосновываются преимущества предлагаемого численного метода. Также приводится описание рассматриваемых в работе задач упругопластического деформирования и разрушения. Определяются актуальность, новизна и практическая значимость проведенных исследований. Приведен список публикаций автора по теме диссертации, конференций и семинаров, где докладывались основные результаты работы.

В первой главе представлены математическая модель упругопластической среды без учета микроповреждений и разрушения в одномерном приближении, подробное описание используемого численного метода, аналитические решения упругопластических задач без учета разрушения, а также *верификация* (сравнение численных и аналитических решений) на ряде упругопластических задач.

В настоящей работе рассматривается упругопластическое деформирование твердого тела в одномерном приближении, когда все параметры зависят только от времени t и эйлеровой координаты r. В случае одноосной деформации (будем в дальнейшем называть этот случай плоским) r является продольной координатой x, в цилиндрическом и сферическом – радиальной координатой r.

Математическая модель упругопластической среды Прандтля-Рейса без учета микроповреждений и разрушения в случае произвольной симметрии выглядит следующим образом:

- уравнение неразрывности:

$$\dot{\rho}+\rho\left(\dot{\varepsilon}_r+k\dot{\varepsilon}_\theta\right)=0 \tag{1}$$

- уравнение движения:

$$\rho\dot{u}=\frac{\partial\sigma_r}{\partial r}+k\frac{\sigma_r-\sigma_\theta}{r} \tag{2}$$

- уравнение энергии:

$$\rho\dot{e}=\frac{\partial\left(\sigma_r u\right)}{\partial r}+k\frac{\sigma_r u}{r} \tag{3}$$

- определяющие уравнения модели Прандтля-Рейса:

$$\dot{S}_r+\lambda S_r=\frac{4}{3}\mu\left(\dot{\varepsilon}_r-\frac{k}{2}\dot{\varepsilon}_\theta\right) \tag{4}$$

$$\dot{S}_\theta+\lambda S_\theta=\frac{2}{3}\mu H\left(k\right)\cdot\left(\left(3-k\right)\dot{\varepsilon}_\theta-\dot{\varepsilon}_r\right) \tag{5}$$

- критерий пластичности Мизеса:

$$S_u^2=\frac{6+5k-3k^2}{4}S_r{}^2+2k\left(2-k\right)S_rS_\theta+2H\left(k\right)S_\theta{}^2\le\frac{2}{3}Y^2 \tag{6}$$

Здесь и далее используются следующие обозначения:
ρ – плотность материала; u – скорость вдоль оси r; p – давление; $\sigma_r=-p+S_r$, $\sigma_\theta=-p+S_\theta$ – радиальная и кольцевая компоненты тензора напряжений; S_r, S_θ – радиальная и кольцевая компоненты девиатора тензора напряжений; S_u – интенсивность девиатора тензора напряжений; $\dot{\varepsilon}_r=\dfrac{\partial u}{\partial r}$, $\dot{\varepsilon}_\theta=\dfrac{u}{r}$ – радиальная и кольцевая компоненты тензора скоростей деформаций; $e=\xi+\dfrac{u^2}{2}$ – полная удельная энергия на единицу массы; ξ – удельная внутренняя энергия на единицу массы; $H\left(x\right)$ – единичная функция Хевисайда; k – коэффициент симметрии:
$k=0$ – для случая плоской симметрии, $k=1$ – для случая цилиндрической симметрии, $k=2$ – для случая сферической симметрии.

Предел текучести при простом растяжении Y и модуль сдвига μ в данной главе считаются постоянными ($Y=Y_0=const$, $\mu=\mu_0=const$).

Среда предполагается термодинамически двухпараметрической, т.е., три термодинамических параметра (давление, плотность и удельная внутренняя энергия) связаны определенной функциональной зависимостью, которая называется уравнением состояния (УРС). Уравнение состояния служит для замыкания системы дифференциальных определяющих уравнений (1)-(5) и в общем случае имеет вид:

$$p = p(\rho, \xi) \tag{7}$$

В качестве УРС используются следующие уравнения:

1) УРС твердого тела (“логарифмический закон”):

$$p = K_0\left(\ln\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right) + \frac{\alpha_v}{c_v}\xi\right) \tag{8}$$

Здесь K_0 – объемный модуль, α_v – коэффициент объемного расширения, c_v – теплоемкость при постоянном объеме, ρ_0 – плотность недеформированного материала.

2) двучленное УРС:

$$p = (\gamma - 1)\rho\xi + c_0^2(\rho - \rho_0) \tag{9}$$

Здесь γ – показатель адиабаты, c_0 – скорость звука в недеформированном материале.

3) УРС Ми-Грюнайзена:

$$p = \rho_0 c_0^2 f(\delta) + \rho_0 \Gamma_0 \xi, \tag{10}$$

где

$$f(\delta) = \frac{(\delta - 1)\left[\delta - \frac{1}{2}\Gamma_0(\delta - 1)\right]}{\left[\delta - s(\delta - 1)\right]^2}, \quad \delta = \frac{\rho}{\rho_0} \tag{11}$$

Здесь Γ_0 – коэффициент Грюнайзена, s – константа, связывающая скорость ударной волны D и скорость частицы среды u: $D = c_0 + su$.

В материальных соотношениях (4), (5) положим параметр $\lambda = 0$ (гипоупругое приближение) и запишем уравнения для нахождения пластических деформаций. Тогда систему определяющих дифференциальных уравнений (1) - (5) в дивергентном векторном виде можно записать следующим образом:

$$\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial r} + \frac{k}{r}\mathbf{H}_r = \mathbf{H}_M, \tag{12}$$

где $\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho e \\ \rho S_r \\ \rho S_\theta \\ \rho \varepsilon_r^p \\ \rho \varepsilon_\theta^p \end{pmatrix}$ – вектор консервативных переменных, $\mathbf{F} = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p - S_r \\ (\rho e + p - S_r)u \\ \rho u S_r \\ \rho u S_\theta \\ \rho u \varepsilon_r^p \\ \rho u \varepsilon_\theta^p \end{pmatrix}$ – вектор потока,

$$\mathbf{H}_r = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 - S_r + S_\theta \\ (\rho e + p - S_r)u \\ \rho u S_r \\ \rho u S_\theta \\ \rho u \varepsilon_r^p \\ \rho u \varepsilon_\theta^p \end{pmatrix}$$ – вектор симметрии в левой части, $$\mathbf{H}_M = \rho \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{4}{3}\mu_0\left(\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{k}{2}\cdot\frac{u}{r}\right) \\ \frac{2}{3}\mu_0 H(k)\left((3-k)\cdot\frac{u}{r} - \frac{\partial u}{\partial r}\right) \\ \frac{2}{3}\left(\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{k}{2}\cdot\frac{u}{r}\right) - \frac{\dot{S}_r}{2\mu_0} \\ \frac{1}{3}H(k)\left((3-k)\cdot\frac{u}{r} - \frac{\partial u}{\partial r}\right) - \frac{\dot{S}_\theta}{2\mu_0} \end{pmatrix}$$ – вектор правой части

Для численного решения системы используется метод разделения по физическим процессам. Система (12) расщепляется на две подсистемы

$$\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial r} + \frac{k}{r}\mathbf{H}_r = \mathbf{0} \qquad (13)$$

$$\frac{d\mathbf{Q}}{dt} = \mathbf{H}_M , \qquad (14)$$

и, соответственно, расчетный цикл временного шага разбивается на 2 этапа, условно называемые "гидродинамический" (эйлеров) и "упругопластический" (лагранжев).

На первом этапе система уравнений в частных производных (13) решается методом конечного объема на подвижной эйлеровой сетке. Аппроксимация потока производится с помощью метода Годунова, основанном на точном решении задачи о распаде произвольного разрыва.

Следует отметить, что точное решение существует только для двучленного УРС. При использовании в расчете другого уравнения состояния, его необходимо аппроксимировать двучленным. Пусть ρ, p, ξ – значения плотности, давления и внутренней энергии в данной ячейке на некотором временном шаге, ξ_0 – выражение внутренней энергии через те же давление и плотность из двучленного УРС. Тогда неизвестные параметры аппроксимации γ, p_0 и c_0 находятся путем приравнивания внутренних энергий ξ, ξ_0 и их производных по плотности и давлению. Для повышения точности схемы используется метод подсеточного кусочно-линейного восполнения MUSCL. С явным интегрированием по времени это приводит к монотонной схеме второго порядка по времени и координате. Устойчивость схемы обеспечивается выполнением условия Куранта-Фридрихса-Леви.

Решения, полученные на первом этапе, используются в качестве начальных данных на втором. Сетка остается неподвижной. Система обыкновенных дифференциальных уравнений (14) решается двухшаговым методом Рунге-Кутта. На данном этапе ячейка, по сути "замораживается", и рассматриваются происходящие в ней процессы, как в лагранжевой частице.

В предположении одноосной деформации возможно построение аналитических решений для автомодельных задач о волне нагружения и волне разгрузки. Подобные исследования уже проводились, как известно из литературы, но с разного рода упрощающими предположениями. В данной работе приводится подробное исследование в полной постановке. В случае одноосной деформации модель Прандтля-Рейса (уравнения (1) - (5) вместе с критерием пластичности (6)) описывается следующей системой уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \dfrac{\partial (\rho u)}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial (\rho u)}{\partial t} + \dfrac{\partial \left(\rho u^2 + p - S\right)}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial (\rho e)}{\partial t} + \dfrac{\partial \left((\rho e + p - S) u\right)}{\partial x} = 0 \\ \dot{S} = \dfrac{4}{3}\mu_0 \dfrac{\partial u}{\partial x} \\ |S| \le \dfrac{2}{3} Y_0 \end{cases} \tag{15}$$

Здесь и далее x – продольная координата, $S = S_x$ – компонента девиатора напряжений вдоль оси x, которая вследствие интегрирования определяющего соотношения модели (4-е уравнение в системе (15)) с использованием уравнения неразрывности (1-е уравнение в системе (15)), является функцией только плотности:

$$S(\rho) = \begin{cases} \dfrac{2}{3} Y_0, & \text{при } \rho < \rho_Y^- = \rho_0 \exp\left(\dfrac{-2Y_0 + 3S_0}{4\mu_0}\right) \\ S_0 - \dfrac{4}{3}\mu_0 \ln\left(\dfrac{\rho}{\rho_0}\right), & \text{при } \rho_Y^- \le \rho \le \rho_Y^+ \\ -\dfrac{2}{3} Y_0, & \text{при } \rho > \rho_Y^+ = \rho_0 \exp\left(\dfrac{2Y_0 + 3S_0}{4\mu_0}\right) \end{cases}, \tag{16}$$

Здесь ρ_Y^+, ρ_Y^- – плотности материала при переходе в состояние текучести при сжатии и растяжении, соответственно. Индексом "0" обозначено начальное (невозмущенное) состояние, $|S_0| \le 2Y_0/3$.

Распространение ударной волны в твердом теле описывается уравнениями Рэнкина-Гюгонио на скачке, следствиями которых являются два соотношения, определяющие состояние среды за волной. Это – адиабата Гюгонио (АГ)

$$\xi-\xi_0=\frac{1}{2}(\nu-\nu_0)(\sigma+\sigma_0) \tag{17}$$

и линия Михельсона-Релея (МР)

$$\sigma-\sigma_0=(\dot{m})^2(\nu-\nu_0), \tag{18}$$

где $\nu=1/\rho$ – удельный объем, $\dot{m}=\rho(u-D)=\rho_0(u_0-D)$ – интенсивность сжатия (D – скорость волны).

В работе приводится подробный анализ зависимости взаимного расположения кривых АГ и МР от интенсивности сжатия $\dot{m}$. Показано, что существуют три возможных волновых режима нагружения в упругопластическом материале: одноволновой упругий режим, двухволновой режим с упругим предвестником и одноволновой пластический режим. Схематически все эти случаи изображены на рисунке 1. Черная кривая соответствует адиабате Гюгонио, цветные пунктирные линии – линиям Релея-Михельсона для различных волновых режимов.

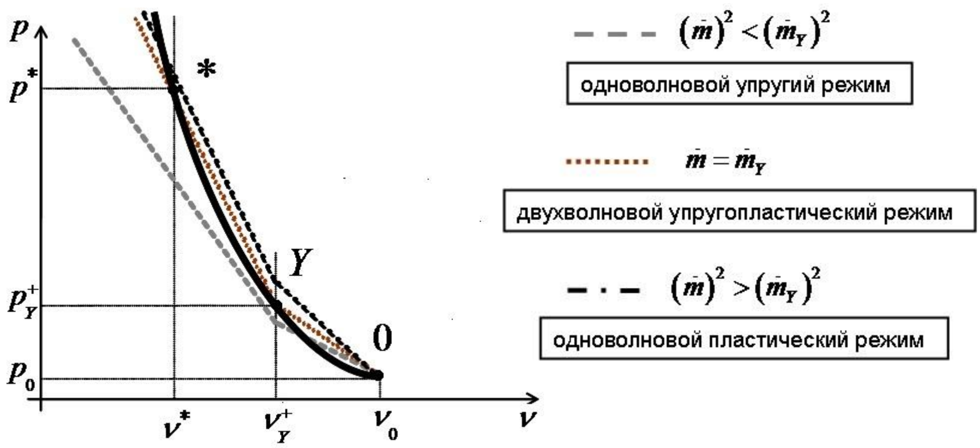

Рис. 1. Взаимное расположение кривых АГ и МР при различных значениях массового расхода. Возможные волновые режимы нагружения.

Волна разгрузки в твердом теле – решение системы уравнений (15), зависящее только от одной автомодельной переменной $\lambda=x/t$.

Напряжение σ и удельный объем ν связаны обыкновенным дифференциальным уравнением:

$$\frac{d\sigma}{d\nu}=\frac{a^2}{\nu^2}, \tag{19}$$

где $$a^2=(u-\lambda)^2=\frac{\dfrac{\partial\xi}{\partial p}\cdot\dfrac{dS}{d\nu}+\dfrac{\partial\xi}{\partial\nu}-\sigma}{\dfrac{\partial\xi}{\partial p}}\nu^2.$$

В результате интегрирования этого уравнения с начальным условием $\sigma|_{\nu=\nu_0} = \sigma_0 = -p_0 + S_0 \quad (\nu \geq \nu_0)$, получается уравнение кривой $\sigma = \sigma(\nu)$, являющейся аналогом изэнтропы в газовой динамике. В виду слабого разрыва данной кривой в точке $\nu = \nu_Y^-$ возможны два волновых режима разгрузки: одноволновой упругий режим и двухволновой упругопластический режим. Схематически это отображено на рисунке 2.

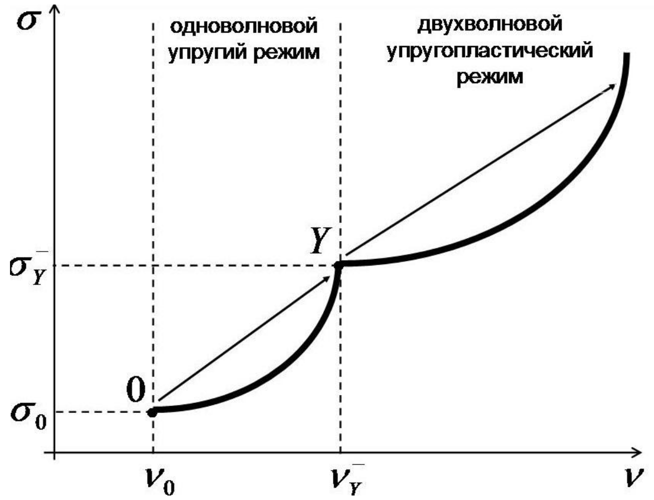

Рис.2. График кривой $\sigma = \sigma(\nu)$ в волне разгрузки.
Возможные волновые режимы разгрузки.

В порядке иллюстрации данного анализа приводятся решения *задач об ударе по жесткой стенке и об ударном растяжении пластины*. В первой задаче полубесконечная пластина налетает на абсолютно жесткую стенку со скоростью u_0, во второй задаче скорость u_0 направлена от стенки. Материал в начальный момент находится в ненапряженном состоянии. В качестве УРС выбран УРС Ми-Грюнайзена. Таким образом, постановки обеих задач выглядят следующим образом:

Начальные условия:
$$\begin{cases} \rho|_{t=0} = \rho_0 \\ u|_{t=0} = \mp u_0 \\ p|_{t=0} = 0 \\ S|_{t=0} = 0 \end{cases}$$

Граничные условия:
$$\begin{cases} u|_{x=0} = 0 \\ \sigma|_{x=l} = 0 \end{cases}$$

Ввиду нелинейной зависимости давления от плотности в УРС Ми-Грюнайзена, полностью аналитически разрешить обе задачи невозможно. В связи с этим, в задаче об ударе для решения алгебраических уравнений используется метод Ньютона, а в задаче о растяжении для решения обыкновенных дифференциальных уравнений используется метод Рунге-Кутта. В таблице 1 приведены константы и критические скорости для трех различных материалов. Здесь $(u_0)_Y^+$ и $(u_0)_*$ – скорости удара, при которых происходит переход в двухволновой упругопластический и одноволновой пластический режимы, соответственно, $(u_0)_Y^-$ – скорость растяжения, при которой происходит переход в двухволновой упругопластический режим.

Таблица 1. Константы материала и рассчитанные критические скорости для задач об ударе по жесткой стенке и ударном растяжении

	алюминий	медь	бериллий
	константы материала		
ρ_0, кг/м^3	2780	8930	1845
Γ_0	2	2	2
s	1,338	1,49	1,124
a_0, м/с	5330	3970	12870
μ, ГПа	27,6	45	151
Y, ГПа	0,29	0,09	0,33
	критические скорости		
$(u_0)_Y^+$, м/с	34,03	4,75	18,13
$(u_0)_*$, м/с	839,38	517,59	3297,2
$(u_0)_Y^-$, м/с	33,79	4,74	18,1

На данных задачах была проведена верификация численного алгоритма. Результаты приведены на рисунках 3 и 4.

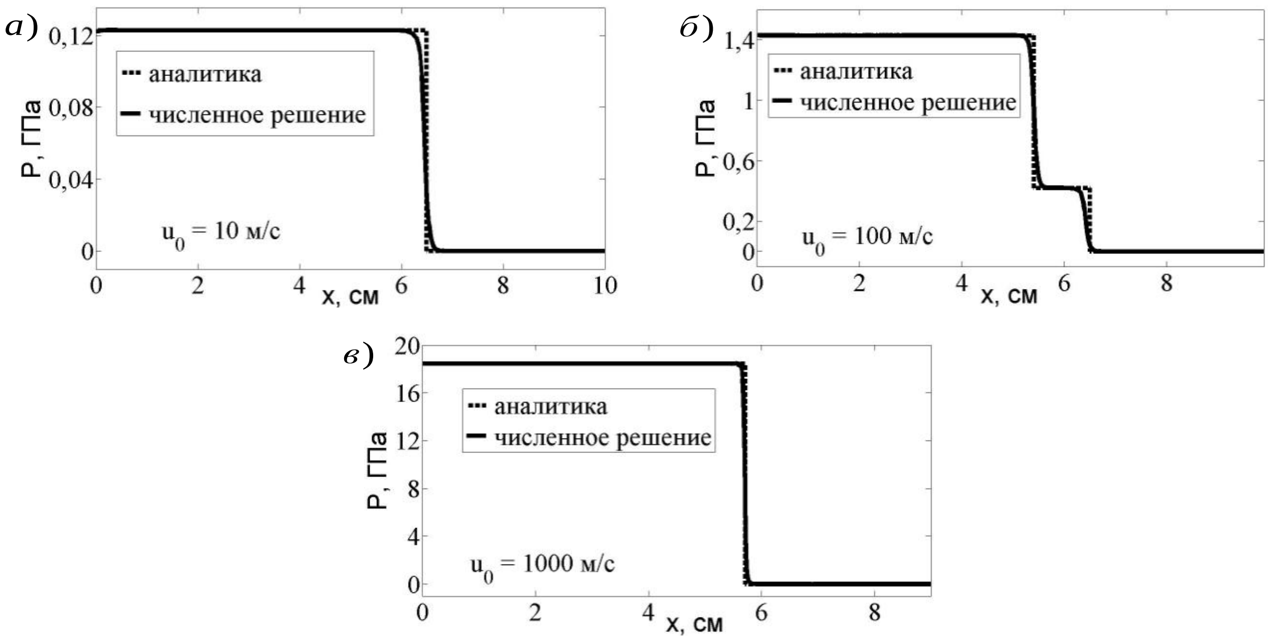

Рис. 3. Распределение давления по координате для трех характерных скоростей удара для алюминия.

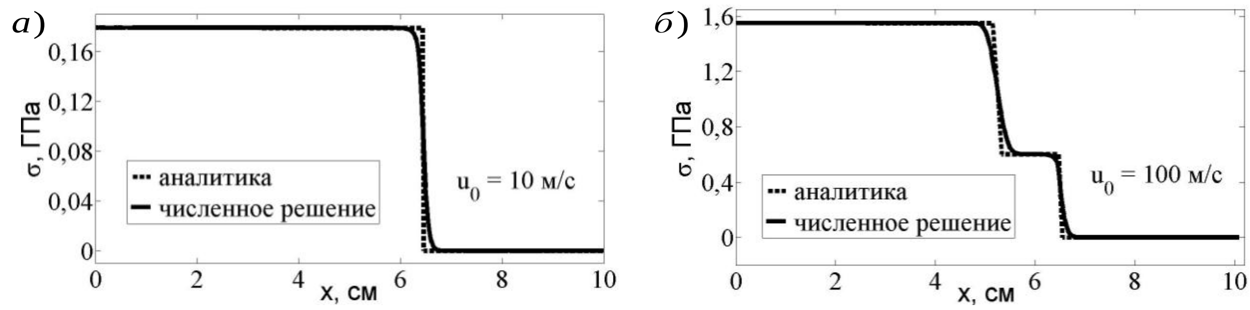

Рис. 4. Распределение напряжения по координате для двух характерных скоростей растяжения для алюминия.

Кроме того, в первой главе проводится верификация на двух одномерных задачах с толстостенными оболочками. Отметим, что под оболочкой в данном случае понимается слой конечной толщины (цилиндрический или сферический), а не используется какая-либо широко распространенная теория оболочек. Это же относится и к задаче о соударении пластин, которая рассматривается в следующей главе. Постановка *задачи о сжатии толстостенной цилиндрической оболочки* выглядит следующим образом.

Начальные условия:
$$\begin{cases} \rho|_{t=0} = \rho_0 \\ u|_{t=0} = -\dfrac{R_i}{r} u_i \\ \sigma_r|_{t=0} = 0 \\ \sigma_\theta|_{t=0} = 0 \end{cases}$$

Граничные условия:
$$\begin{cases} \sigma_r|_{r=R_i} = 0 \\ \sigma_r|_{r=R_e} = 0 \end{cases}$$

В качестве УРС выбран УРС Ми-Грюнайзена, в качестве материала – бериллий. Данная задача решена аналитически (Howell B. P., Ball G. J. A Free-Lagrange Augmented Godunov Method for the Simulation of Elastic-Plastic Solids // J. Comp. Phys. – 2002. – Vol. 175. – Pp. 128-167).

На рисунке 5а изображены зависимости кинетической, внутренней и полной энергии от времени. По графику виден процесс перехода кинетической энергии во внутреннюю, который полностью осуществляется к аналитически рассчитанному моменту остановки оболочки. На рисунке 5б изображены зависимости изменения радиусов оболочки от времени. Оба радиуса к моменту остановки сходятся к своим аналитически рассчитанным значениям.

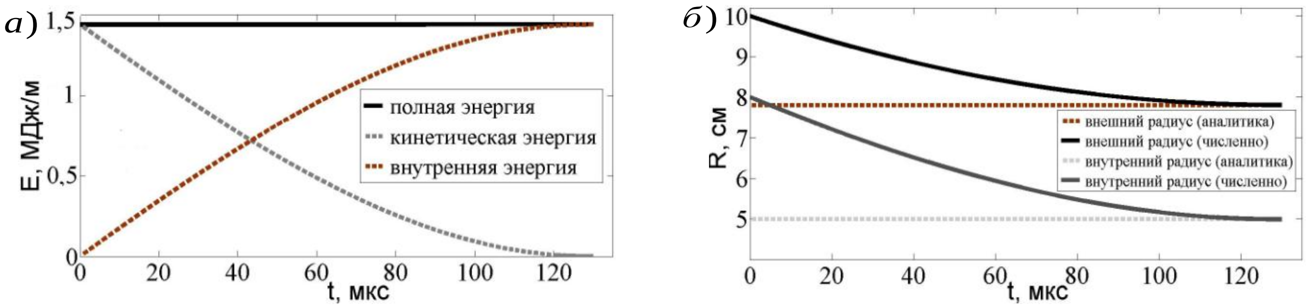

Рис. 5. Зависимость энергии (а) и радиусов (б) цилиндрической оболочки от времени.

Постановка *задачи о расширении толстостенной сферической оболочки* идентична предыдущей задаче, но, при этом начальная скорость материальной точки оболочки направлена от её центра и обратно пропорциональна квадрату расстояния от центра. В данной задаче использовались логарифмический УРС и вязкоупругопластическая модель Соколовского-Пэжины. Ее определяющие соотношения выглядят следующим образом:

$$\begin{cases} \dot{\varepsilon}_\theta^e = H(k)\left(\frac{1}{3}\left(\frac{\partial u}{\partial r}+k\frac{u}{r}\right)+\frac{\dot{S}_\theta}{2\mu}\right) \\ \dot{\varepsilon}_r^e = \frac{1}{3}\left(\frac{\partial u}{\partial r}+k\frac{u}{r}\right)+\frac{\dot{S}_r}{2\mu} \\ \dot{\varepsilon}_r^p = \frac{S_r}{2\eta}\cdot\left(1-\sqrt{\frac{2}{3}}\frac{Y}{S_u}\right)\cdot H\left(S_u-\sqrt{\frac{2}{3}}Y\right) \\ \dot{\varepsilon}_\theta^p = H(k)\frac{S_\theta}{2\eta}\cdot\left(1-\sqrt{\frac{2}{3}}\frac{Y}{S_u}\right)\cdot H\left(S_u-\sqrt{\frac{2}{3}}Y\right) \end{cases} \quad (20)$$

Здесь η – динамическая вязкость, которую в данном случае считаем постоянной ($\eta=\eta_0=const$).

Для расчетов использовался алюминий со следующим набором параметров материала:

$$\rho_0=2780\ \text{кг/м}^3;\ \alpha_v=6{,}72\cdot10^{-5}\ 1/K;\ c_v=924{,}3\ \text{Дж}/(\text{кг}\cdot K)$$
$$K_0=78{,}06\ \text{ГПа};\ \mu_0=27{,}6\ \text{ГПа};\ Y_0=0{,}29\ \text{ГПа};\ \eta_0=700\ \text{Па}\cdot\text{с}$$

На рисунке 6а показаны зависимости энергии от времени. На рисунке 6б представлены зависимости радиусов оболочки от времени. Видно, что численное и аналитическое (Киселев А.Б. К исследованию процесса нестационарного расширения толстостенных сферических и цилиндрических вязкопластических оболочек // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем. Механ. – 2012. – № 6. – С. 20-25.) согласуются с высокой точностью (погрешность порядка $0{,}2$ %).

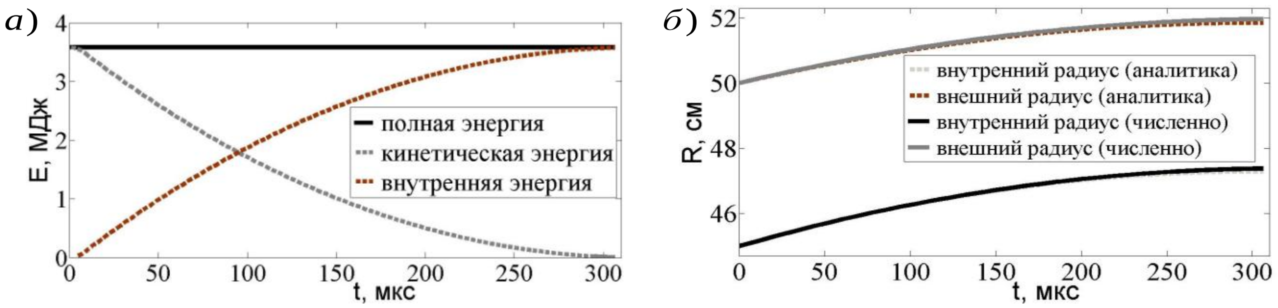

Рис. 6. Зависимость энергии (а) и радиусов (б) сферической оболочки от времени.

Необходимо отметить, что в аналитическом решении предполагается несжимаемость материала, однако, используемый численный метод предназначен для расчета задач, в которых учитывается сжимаемость среды, и рассматриваются волновые процессы. Ввиду этого сравнение численного и аналитического решения будет не совсем корректным, тем не менее, определенное сопоставление можно провести. На рисунке 7 изображены зависимости скоростей границ сферической оболочки от времени. По данным графикам видно, что численные значения скоростей колеблются около аналитических. Колебания обусловлены распространением волн по толщине оболочки (период колебаний в точности совпадает со временем двойного пробега упругой волны по толщине оболочки).

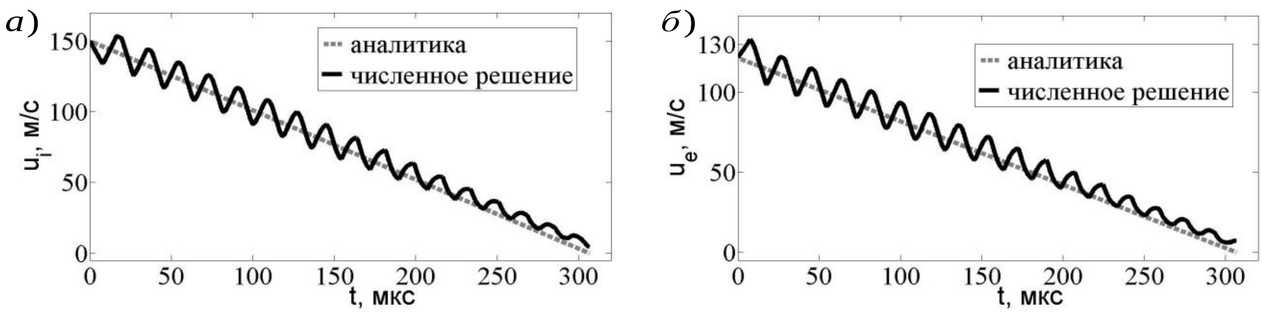

Рис. 7. Зависимость скоростей внутренней (а) и внешней (б) границ сферической оболочки от времени.

Во второй главе представлена используемая математическая модель повреждаемой упруговязкопластической среды (Киселев А.Б. Математическое моделирование динамического деформирования и комбинированного микроразрушения термоупруговязкопластической среды // Вестн. МГУ. Сер. 1. Матем. Механ. – 1998. – № 6. – С. 32-40), корректировка вычислительной схемы при учете повреждаемости и разрушения, а также подробно рассмотрена задача о плоском соударении тонких пластин с откольным разрушением.

Математическая модель повреждаемой упруговязкопластической среды помимо законов сохранения (1) - (3) включает в себя определяющие уравнения модели Соколовского-Пэжины (20). В модели возможен учет упрочнения. В самом простом, линейном, случае имеет место следующая зависимость предела текучести от накопленных пластических деформаций:

$$Y_0 = Y_{00} + \beta\varepsilon_u^p, \tag{21}$$

где $\varepsilon_u^p = \sqrt{\frac{2}{3}\varepsilon_{ij}^p\varepsilon_{ij}^p}$ – интенсивность тензора пластических деформаций, β – параметр упрочнения. В случае одноосного деформирования $\varepsilon_u^p = \left|\varepsilon^p\right|$.

В общем случае микроразрушение материала описывается с помощью двух скалярных параметров поврежденности ω и α. Они характеризуют наличие микроразрушений типа пор сферической формы и типа полос адиабатического сдвига соответственно. В случае одноосного деформирования можно положить $\alpha = 0$. Кинетическое уравнение для нахождения параметра объемной поврежденности ω $\left(0 \le \omega < 1\right)$ выглядит следующим образом:

$$\dot{\omega} = B\left(\frac{\sigma}{1-\omega} - \sigma_*\right)H\left(\frac{\sigma}{1-\omega} - \sigma_*\right) + \omega\frac{\sigma - \sigma^+}{4\eta_0}H\left(\sigma - \sigma^+\right) + \omega\frac{\sigma - \sigma^-}{4\eta_0}H\left(\sigma^- - \sigma\right), \tag{22}$$

где

$\sigma^+ = -\frac{2}{3}Y_0\ln\omega,\ \sigma^- = -\sigma^+$; $B,\ \sigma^* -$ константы материала.

Параметры материала при наличии повреждений меняются следующим образом:

$$K = K_0\left(1-\omega\right),\ \mu = \mu_0\left(1-\omega\right),\ \eta = \eta_0\left(1-\omega\right),\ Y = Y_0\left(1-\omega\right)$$

В качестве критерия начала макроразрушения материала используется критерий предельной удельной диссипации:

$$D = \int_0^{t_*}\frac{1}{\rho}(d_M + d_F)dt = D_*, \tag{23}$$

где $d_M = \sigma_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij}^p$ – механическая диссипация, $d_F = \Lambda\dot{\omega}^2$ – диссипация континуального разрушения; $t_* -$ время начала разрушения; $D_* -$ предельная удельная диссипация; Λ – константа материала.

В качестве уравнения состояния используется УРС твердого тела, который с введением поврежденности преобразуется следующим образом:

$$p = K\left(\ln\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right) + \frac{\alpha_v}{c_v}\xi - B\Lambda\ln\left(1-\omega\right) + \Lambda\frac{\omega^2}{4\eta_0}\right) \tag{24}$$

В дивергентном виде вся система дифференциальных уравнений, описывающих процесс, выглядит следующим образом:

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial \rho}{\partial t}+\dfrac{\partial(\rho u)}{\partial x}=0 \\
\dfrac{\partial(\rho u)}{\partial t}+\dfrac{\partial\left(\rho u^{2}+p-S\right)}{\partial x}=0 \\
\dfrac{\partial(\rho e)}{\partial t}+\dfrac{\partial\left((\rho e+p-S)u\right)}{\partial x}=0 \\
\dfrac{\partial(\rho S)}{\partial t}+\dfrac{\partial(\rho u S)}{\partial x}=2\mu\rho\left(\dfrac{2}{3}\dfrac{\partial u}{\partial x}-\dot{\varepsilon}^{p}\right) \\
\dfrac{\partial\left(\rho \varepsilon^{p}\right)}{\partial t}+\dfrac{\partial\left(\rho u \varepsilon^{p}\right)}{\partial x}=\rho\dfrac{S}{2\eta}\left(1-\dfrac{2}{3}\dfrac{Y}{|S|}\right)H\left(|S|-\dfrac{2}{3}Y\right) \\
\dfrac{\partial(\rho\omega)}{\partial t}+\dfrac{\partial(\rho u\omega)}{\partial x}=\rho\left(B\left(\dfrac{\sigma}{1-\omega}-\sigma_{*}\right)H\left(\dfrac{\sigma}{1-\omega}-\sigma_{*}\right)+\omega\dfrac{\sigma-\sigma^{+}}{4\eta_{0}}H\left(\sigma-\sigma^{+}\right)+\omega\dfrac{\sigma-\sigma^{-}}{4\eta_{0}}H\left(\sigma^{-}-\sigma\right)\right) \\
\dfrac{\partial(\rho D)}{\partial t}+\dfrac{\partial(\rho u D)}{\partial x}=\dfrac{3}{2}S\dot{\varepsilon}^{p}+\Lambda\dot{\omega}^{2}
\end{cases}
$$

Ее решение строится описанным выше способом. Разница лишь в изменении компонент расчетных векторов $\mathbf{Q}$, $\mathbf{F}$ и $\mathbf{H}_M$.

Пусть в некоторой ячейке области выполнился критерий разрушения: $D \geq D_*$. В этом случае считается, что через данную ячейку проходит поверхность разрушения. Для определенности полагаем, что поверхность разрушения проходит через центр ячейки. Тогда исключаем разрушенную ячейку из дальнейшего расчета и производим разбиение данной области на две новых области по центру данной ячейки. На образовавшихся новых границах ставим условие свободной поверхности. Пересчет параметров в соседних ячейках производится с выполнением закона сохранения массы.

Хорошо изученная задача о плоском соударении двух тонких пластин (рис. 8) с откольным разрушением в пластине-мишени наиболее часто используется для определения констант материала в динамических условиях путем сопоставления экспериментальных данных и результатов численного моделирования. Эта задача также является важным валидационным тестом, оценивающим адекватность и эффективность применения, как используемого численного метода, так и выбранной математической модели, описывающей процессы упругопластического деформирования и разрушения. Поскольку толщины пластин малы по сравнению с их размерами, и характерное время процесса соударения порядка времени нескольких пробегов упругих волн по толщине пластины-мишени, задача может быть рассмотрена в одномерной постановке (одноосная деформация) и адиабатическом приближении.

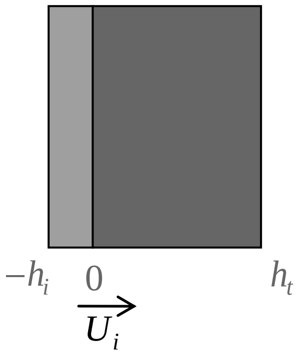

Рис. 8. К задаче о соударении пластин.

Экспериментально данная задача была подробнейшим образом изучена в работах Г.И. Канеля с соавторами для множества различных материалов и скоростей соударения.

Приведем ниже полную математическую постановку данной задачи.

Начальные условия задаются следующим образом.

Ударник: $$\begin{cases} \rho|_{t=0} = \rho_{0i} \\ u|_{t=0} = U_i \\ \sigma|_{t=0} = 0 \end{cases}$$

Мишень: $$\begin{cases} \rho|_{t=0} = \rho_{0t} \\ u|_{t=0} = 0 \\ \sigma|_{t=0} = 0 \end{cases}$$

Здесь и далее параметры с нижним индексом "i" относятся к ударнику, а с индексом "t" – к мишени. Верхними индексами "L" и "R" обозначены, соответственно, левая и правая границы каждой из пластин.

Начальные координаты пластин зададим следующим образом:

$$\begin{cases} x_i^L|_{t=0} = -h_i \\ x_i^R|_{t=0} = x_t^L|_{t=0} = 0 \\ x_t^R|_{t=0} = h_t \end{cases}$$

На левой границе ударника и правой границе мишени ставится условие свободной поверхности:

$$\begin{cases} \sigma_r|_{x=x_i^L} = 0 \\ \sigma_r|_{x=x_t^R} = 0 \end{cases}$$

Условие на контактной границе между пластинами ($x=0$) имеет вид:

$$u|_{x=x_i^R} = u|_{x=x_t^L} = U_c,\ \sigma_r|_{x=x_i^R} = \sigma_r|_{x=x_t^L} = (\sigma_r)_c \text{ при } (\sigma_r)_c < 0$$

$$\sigma_r|_{x=x_i^R} = \sigma_r|_{x=x_t^L} = 0 \text{ при } (\sigma_r)_c > 0$$

Это означает, что пластины находятся в контактном взаимодействии друг с другом до тех пор, пока напряжение на границе является сжимающим.

Как только оно становится растягивающим, происходит отскок пластины-ударника от пластины-мишени. Соответственно, на правой границе ударника и левой границе мишени ставится условие свободной поверхности. Пластины больше не взаимодействуют друг с другом.

Основным результатом экспериментов является измерение зависимости скорости свободной поверхности пластины-мишени от времени. В работе приведены расчеты характерных задач по соударению пластин из алюминия и титана с различными скоростями соударения и толщинами пластин.

На рисунке 9 приведен график сравнения численного расчета и экспериментальных данных для теста по соударению алюминиевых пластин, в котором толщина ударника равна $h_i = 2$ мм, толщина мишени $h_t = 4{,}1$ мм, скорость соударения $U_i = 690$ м/с. Параметры материала выбраны следующими:

$$\rho_0 = 2610 \text{ кг/м}^3;\ c_v = 924{,}3 \text{ Дж/кг} \cdot K;\ \alpha_v = 6{,}72 \cdot 10^{-5} \text{ 1/К};$$
$$K_0 = 71{,}94 \text{ ГПа};\ \mu_0 = 26{,}22 \text{ ГПа};\ Y_{00} = 0{,}18 \text{ ГПа}$$

Динамическая вязкость, коэффициент упрочнения и параметры разрушения для алюминия в данном расчете были подобраны следующим образом:

$$\eta_0 = 78{,}7 \text{ Па} \cdot \text{с};\ \beta = 0{,}5 \text{ ГПа};\ \sigma_* = 0{,}65 \text{ ГПа};$$
$$\Lambda = 9{,}36 \cdot 10^4 \text{ Па} \cdot \text{с};\ B = 9{,}33 \cdot 10^{-3}\ 1/(Па \cdot с);\ D_* = 30 \text{ кДж/кг}$$

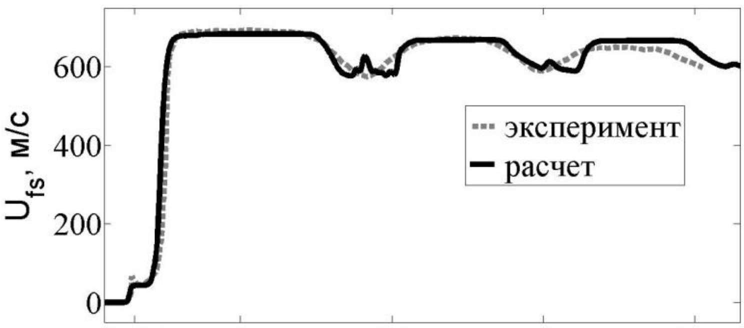

Рис. 9. Скорость свободной поверхности мишени при соударении алюминиевых пластин.

В данном расчете упругий предвестник выходит на свободную поверхность в момент времени $t_e = 0{,}65$ мкс. Разрушение происходит в момент времени $t_* = 1{,}13$ мкс, относительная толщина отколотой части пластины-мишени (откольной тарелки) составляет $h_* = 0{,}47$ ($h_* = 1 - X_*$, где X_* – относительная координата разрушения, $X = \dfrac{x - x_t^L}{x_t^R - x_t^L}$ – текущая относительная толщина пластины-мишени). Таким образом, толщина откольной тарелки составляет чуть менее, чем половину от толщины мишени. Оба этих факта хорошо согласуются с экспериментом. Кроме того, с экспериментом хорошо согласуется и амплитуда колебаний скорости свободной поверхности откольной тарелки. В целом, в данном тесте наблюдается достаточно точное совпадение (погрешность не более $4\,\%$) численного расчета и экспериментального результата по всем основным исследуемым нами аспектам: ударная волна, волна разгрузки и разрушение.

Также был рассмотрен тест с соударением алюминиевой (ударник толщиной $h_i = 2$ мм) и титановой (мишень толщиной $h_t = 10$ мм) пластин со скоростью $U_i = 700$ м/с.

Параметры материала для титана выбраны следующим

$$\rho_0 = 4450\ \text{кг/м}^3;\ \ c_v = 520,7\ \text{Дж/кг}\cdot K;\ \ \alpha_v = 2,52\cdot 10^{-5}\ \text{1/К};$$
$$K_0 = 116,65\ \text{ГПа};\ \ \mu_0 = 38,74\ \text{ГПа};\ \ Y_{00} = 1,08\ \text{ГПа}$$

Динамическая вязкость, коэффициент упрочнения и параметры разрушения для титана в данном расчете были подобраны следующим образом:

$$\eta_0 = 688\ \text{Па}\cdot\text{с};\quad \beta = 0,1\ \text{ГПа};\quad \sigma_* = 3,85\ \text{ГПа};$$
$$\Lambda = 5,33\cdot 10^4\ \text{Па}\cdot\text{с};\ B = 2,74\cdot 10^{-2}\ 1/(\mathit{Па}\cdot c);\ D_* = 50\ \text{кДж/кг}$$

На рисунке 10 приведен график скорости свободной поверхности пластины-мишени. Здесь также можно отметить близкое совпадение экспериментальных данных и численного расчета. В данном расчете упругий предвестник выходит на свободную поверхность в момент времени $t_e = 1,6$ мкс, а разрушение происходит в момент времени $t_* = 2,4$ мкс. Толщина откольной тарелки составляет $h_* = 0,17$ от толщины пластины-мишени.

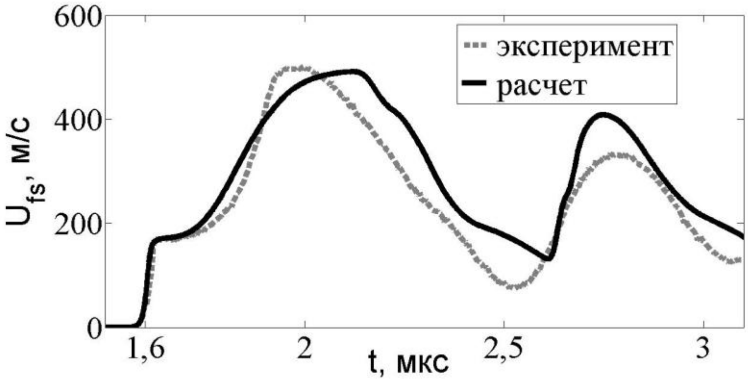

Рис. 10. Скорость свободной поверхности мишени при соударении алюминиевой и титановой пластин.

На рисунках 11а и 11б приведены графики распределения удельной диссипации D и деформации ε по толщине пластины-мишени X в момент разрушения. Видно, что оба графика имеют четко выраженный максимум в точке разрушения.

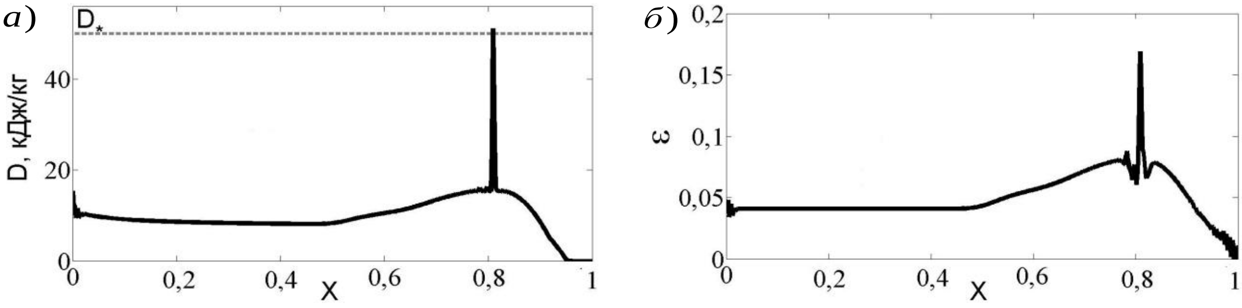

Рис. 11. Распределение удельной диссипации (а) и деформации (б) по толщине пластины-мишени в момент разрушения.

На рисунках 12а и 12б изображены зависимости времени разрушения и относительной толщины откольной тарелки пластины-мишени от скорости удара. Как можно видеть по данным графикам, время разрушения имеет тенденцию к снижению при увеличении скорости удара. Толщина откольной тарелки, в свою очередь, практически не меняется со скоростью удара и составляет приблизительно пятую часть от толщины пластины-мишени.

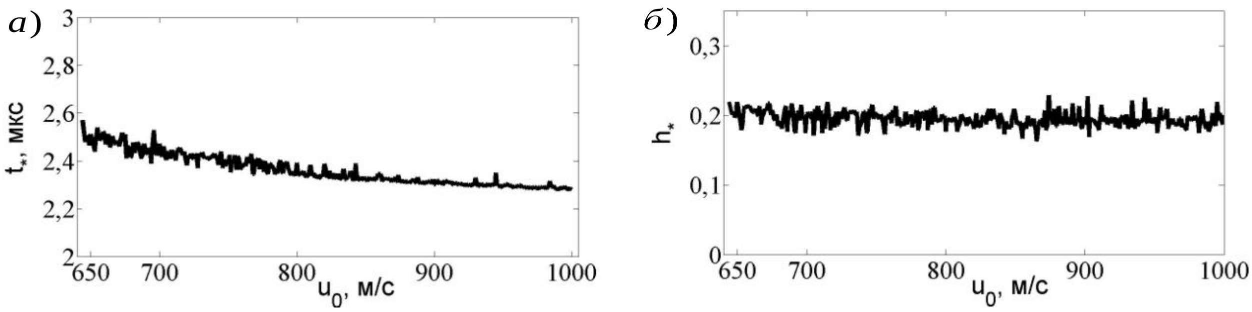

Рис. 12. Зависимость времени разрушения (а) и относительной толщины откольной тарелки (б) от скорости удара.

В заключении приводятся основные результаты работы и выводы:

1) Были впервые подробно и в полной постановке аналитически исследованы волны нагружения и разгрузки в твердом упругопластическом теле при одноосном деформировании. Рассчитаны параметры перехода из одного волнового режима в другой для различных материалов.

2) Предложен новый численный метод расчета упругопластических задач – метод разделения по физическим процессам. Метод успешно верифицирован на одномерных задачах об ударе по жесткой стенке, ударном растяжении пластины, сжатии цилиндрической оболочки и расширении сферической оболочки.

3) Разработанный численный метод и используемая модель повреждаемой упруговязкопластической среды позволяют рассчитывать напряженно-деформируемое состояние и кинематические параметры тонких пластин в задачах плоского соударения последних. А именно: скорость движения тыльной поверхности пластины-мишени, момент откольного разрушения и толщину откольной тарелки. Результаты расчетов с высокой точностью согласуются с экспериментальными данными.

Список публикаций

1. Киселев А.Б., Мищенко А.В. Одномерные упругопластические задачи в плоской постановке. Аналитические и численные решения // Вестн. Моск. ун-та. Сер.1. Матем. Механ. – 2014. – № 2.

2. Меньшов И.С., Мищенко А.В., Серёжкин А.А. Численное моделирование упругопластических течений методом Годунова на подвижных эйлеровых сетках // Математическое моделирование. – 2013. – Т. 25. – № 8. – С. 89-108.

3. Menshov I., Mischenko A., Serezhkin A. An eulerian Godunov-type scheme for calculation of the elastic-plastic flow equations with moving grids // Europ. Congress on Comput. Methods in Appl. Sc. and Eng. (ECCOMAS 2012). J. Eberhardsteiner et. al. (eds.). Vienna, Austria, September 10-14, 2012. CD format, 2012. Article 2164. 20 p.

4. Мищенко А.В., Серёжкин А.А., Меньшов И.С., Киселев А.Б. Метод разделения по физическим процессам для моделирования деформирования и разрушения твердых тел // Забабахинские научные чтения: сб. материалов XI Межд. конф. 16-20 апреля 2012. – Снежинск: Изд-во РФЯЦ-ВНИИТФ, 2012. – С. 306.

5. Киселев А.Б., Меньшов И.С., Мищенко А.В. Программный комплекс «ТИС»: тестирование на задачах динамики твердого тела // Ломоносовские чтения. Научная конф. Секция механики. Апрель 2012 года. Тезисы докладов. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 2012. – С. 90-91.