МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

На правах рукописи

СТАШ Айдамир Хазретович

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА ЧАСТОТ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ И СИСТЕМ

Специальность 01.01.02 — дифференциальные уравнения,
динамические системы и оптимальное управление

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва – 2013

Работа выполнена на кафедре дифференциальных уравнений
механико-математического факультета
Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук, профессор Сергеев Игорь Николаевич
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук, Фурсов Андрей Серафимович профессор кафедры нелинейных динамических систем и процессов управления, факультет вычислительной математики и кибернетики МГУ имени М.В. Ломоносова
	кандидат физико-математических наук, доцент Дементьев Юрий Игоревич заведующий кафедрой высшей математики МГТУ Гражданской авиации
Ведущая организация:	Институт математики НАН Беларуси

Защита диссертации состоится 13 декабря 2013 г. в 16 ч 40 мин на заседании диссертационного совета Д 501.001.85 при Московском государственном университете имени М.В. Ломоносова по адресу: 119991, г. Москва, Ленинские Горы, МГУ им. М.В. Ломоносова, механико-математический факультет, аудитория 16-24.

С диссертацией можно ознакомиться в Фундаментальной библиотеке Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова.

Автореферат разослан 12 ноября 2013 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета
Д 501.001.85 при МГУ
доктор физико-математических наук,
профессор В.Н. Сорокин

Общая характеристика работы

Актуальность темы

Исследование линейных нестационарных систем имеет не только самостоятельное значение, но и служит базой для изучения нелинейных систем по их линейному приближению. Линейные нестационарные системы имеют многочисленные приложения, которые выдвигают ряд новых задач теоретического характера, требующих изучения асимптотических и колебательных свойств решений систем.

Представленная работа является исследованием в области качественной теории линейных дифференциальных уравнений и систем, важнейшими направлениями которой являются теория устойчивости и теория колебаний.

С теорией устойчивости, созданной А.М. Ляпуновым (1892 г.), естественным образом связаны, прежде всего, характеристические показатели Ляпунова решений дифференциальных систем, а также введенные позже показатели Перрона, Боля, Винограда, Миллионщикова и Изобова, отвечающие за разнообразные асимптотические свойства решений систем.

Изучением различных свойств самых разных показателей решений и систем занимались многие математики. Приведем далеко не полный список тех из них, кто внес значительный вклад в эту теорию: Р.Э. Виноград, Б.Ф. Былов, В.М. Миллионщиков, Н.А. Изобов, М.И. Рахимбердиев, И.Н. Сергеев, Е.К. Макаров, Е.А. Барабанов, А.С. Фурсов, А.Н. Ветохин, В.В. Быков, Ю.И. Дементьев и другие. Исчерпывающую (на соответствующий момент) библиографию по этим вопросам можно найти в обзорах[1,2] и монографиях[3,4].

Однако для полного описания реальных природных процессов важна информация не только о росте исследуемых функций, но и об их колебательных свойствах. В теории колебаний немалая роль отводится вопросам колеблемости решений дифференциальных уравнений, восходящим к фундаментальным исследованиям Ж. Штурма (1837–41 гг.) и более поздним исследованиям А. Кнезера (1896–98 гг.).

Исследования по тематике колеблемости успешно продвигались усилиями многих математиков, среди которых необходимо особо отметить В.А.

[1]Изобов Н.А. Линейные системы обыкновенных дифференциальных уравнений / Итоги науки и техники. Математический анализ. 1974. Т.12. С. 71–146.

[2]Изобов Н.А. Исследования в Беларуси по теории характеристических показателей Ляпунова и ее приложениям // Дифференц. уравнения. 1993. **29**. №12. С. 2034–2055.

[3]Былов Б.Ф., Виноград Р.Э., Гробман Д.М., Немыцкий В.В. Теория показателей Ляпунова и ее приложения к вопросам устойчивости. М., 1966.

[4]Изобов Н.А. Введение в теорию показателей Ляпунова. Мн.: БГУ, 2006.

Кондратьева, И.Т. Кигурадзе, Т.А. Чантурия, А.Н. Левина, Н.А. Изобова, Дж.Д. Мирзова, И.В. Асташову и других (обширные библиографии по этому вопросу можно найти, например, в обзоре[5] и монографии[6]). Заметим, что перечисленных авторов в основном интересовали вопросы, связанные с наличием у заданного уравнения или системы хотя бы одного колеблющегося решения, а также с описанием всего множества таких решений или каких-либо дополнительных их свойств. Немало усилий в этих работах было направлено на получение именно коэффициентных признаков существования или отсутствия колеблющихся решений.

В последнее время интерес к таким свойствам решений линейных нестационарных систем, как ограниченность, устойчивость, колеблемость и т. п., возрос в связи с изучением автоколебаний и хаотических режимов, возникающих в различных электронных и лазерных устройствах. В связи с этим, особенно интересной и актуальной представляется задача о нахождении аналогов показателей Ляпунова, отвечающих за колеблемость решений дифференциальных уравнений и систем.

В 2004 г. И.Н. Сергеевым были введены характеристики колеблемости решений линейных однородных дифференциальных уравнений, которые явились весьма эффективным средством для изучения колебательных свойств. Так, в докладе[7] он впервые ввел понятие *характеристической частоты* $\nu(y)$ скалярной функции y, несущее в себе черты усреднения по Ляпунову и позволившее численно измерять колеблемость решений уравнений на полупрямой.

Следует отметить, что *спектры* (множества значений на всех ненулевых решениях) различных показателей n-мерных линейных систем устроены по-разному: спектр показателей Ляпунова состоит ровно из n чисел (с учетом их кратности), тогда как спектр показателей Перрона, вообще говоря, не является конечным и, более того, может совпадать с любым наперед заданным ограниченным и замкнутым сверху измеримым (суслинским) подмножеством числовой прямой.

Что же касается характеристических частот, то их спектры устроены также сложнее, чем спектры показателей Ляпунова. И хотя все ненулевые решения произвольного уравнения первого или второго порядка имеют

[5] Левин А.Ю. Неосцилляция решений уравнения $x^{(n)} + p_1(t)x^{(n-1)} + \cdots + p_n(t)x = 0$ // Успехи матем. наук. 1969. **24**. №2. С. 43–96.

[6] Асташова И.В. Качественные свойства решений дифференциальных уравнений и смежные вопросы спектрального анализа / И.В. Асташова и др.; под ред. И.В. Асташовой — М.: ЮНИТИ–ДАНА, 2012.

[7] Сергеев И.Н. Определение характеристических частот линейного уравнения // Дифференц. уравнения. 2004. **40**. №11. С. 1576.

одну и ту же частоту[8], тем не менее существуют *автономное* линейное однородное уравнение *четвертого* порядка и *периодическое* линейное уравнение *третьего* порядка с континуальными спектрами характеристических частот [9,10].

Таким образом, даже для автономного линейного уравнения спектр характеристических частот не совпадает с множеством *модулей мнимых частей* всех корней соответствующего характеристического многочлена. С ним совпадает, вообще говоря, лишь набор специально выделенных (с использованием процедуры регуляризации по Миллионщикову) *главных значений* частот этого уравнения[8].

В работах[11,12,13] были введены различные модификации характеристических частот, но уже для вектор-функций x, в частности, так называемые *полные* $\sigma(x)$ и *векторные* $\zeta(x)$ частоты. Подсчет последних происходит путем усреднения числа нулей проекции функции x на какую-либо прямую, причем эта прямая выбирается так, чтобы полученное среднее значение оказалось минимальным: если указанная минимизация производится перед усреднением, то получается полная частота $\sigma(x)$, а если после — то векторная частота $\zeta(x)$. Некоторые свойства этих частот описаны в работах[14,15,16,17,18].

Оказалось[17], что на решениях линейных однородных уравнений и систем с ограниченными коэффициентами эти характеристики колебле-

---

[8] Сергеев И.Н. Определение и свойства характеристических частот линейного уравнения // Труды семинара им. И.Г. Петровского. 2006. Вып. 25. С. 249–294.

[9] Горицкий А.Ю. Характеристические частоты линейных комбинаций синусов // Дифференц. уравнения. 2008. **44**. №6. С. 860.

[10] Смоленцев М.В. Существование периодического линейного дифференциального уравнения третьего порядка с континуальным спектром частот // Дифференц. уравнения. 2012. **48**. №11. С. 1571–1572.

[11] Сергеев И.Н. Определение полных частот решений линейного уравнения // Дифференц. уравнения. 2008. **44**. № 11. С. 1577.

[12] Сергеев И.Н. Определение полных частот решений линейной системы // Дифференц. уравнения. 2009. Т. 45. № 6. С. 908.

[13] Сергеев И.Н. Определение характеристик блуждаемости решений линейной системы // Дифференц. уравнения. 2010. Т. 46. № 6. С. 902.

[14] Сергеев И.Н. Сравнение полных частот и показателей блуждаемости решений линейной системы // Дифференц. уравнения. 2010. Т. 46. № 11. С. 1667–1668.

[15] Сергеев И.Н. Колеблемость и блуждаемость решений линейных дифференциальных уравнений малого порядка // Дифференц. уравнения. 2011. **47**. №6. С. 906–907.

[16] Сергеев И.Н. Колеблемость и блуждаемость решений дифференциального уравнения второго порядка // Вестник Моск. ун-та. Серия 1. Матем. Механ. 2011. №6. С. 21–26.

[17] Сергеев И.Н. Характеристики колеблемости и блуждаемости решений линейной дифференциальной системы // Известия РАН. Серия матем. 2012. **76**. №1. С. 149–172.

[18] Сергеев И.Н. Замечательное совпадение характеристик колеблемости и блуждаемости решений дифференциальных систем // Матем. сборник. 2013. **204**. С. 119–138.

мости принимают также лишь конечные значения (при этом полная и векторная частоты решения y линейного уравнения n-го порядка определяются как величины $\sigma(x)$ и $\zeta(x)$ соответственно, где $x = (y, \dot{y}, \ldots, y^{(n-1)})$).

Спектры полных и векторных частот автономных систем, а также уравнений второго порядка были полностью исследованы:

- спектр полной частоты любой *автономной* системы конечен и совпадает с множеством модулей мнимых частей собственных значений задающего ее оператора[14];
- полная и векторная частоты любого решения любой *автономной* системы совпадают[19];
- для любого (не обязательно автономного) линейного *уравнения второго порядка* спектры полной и векторной частот состоят из одного и того же числа, равного характеристической частоте какого-либо его решения[16].

Таким образом, оставался открытым вопрос об описании возможных спектров полных и векторных частот линейных *неавтономных* дифференциальных систем, а также уравнений *более чем второго* порядка. Особенно важно было узнать, во-первых, всегда ли эти спектры конечны и, во-вторых, обладают ли свойствами спектров уравнений второго порядка (т. е. состоят ли из одного элемента):

- спектры полных и векторных частот уравнений третьего порядка;
- спектры полных и векторных частот двумерных систем.

Любое из *крайних* (т. е. наименьшее и наибольшее) значений спектра какой-либо частоты n-мерной однородной дифференциальной системы можно рассматривать как функционал, определенный на линейном топологическом пространстве n-мерных систем с *равномерной* на $\mathbb{R}^+$ топологией. При $n = 2$ сужения этих функционалов на топологическое подпространство уравнений второго порядка (к которым сводятся двумерные системы с помощью канонической замены) непрерывны[16] и, будучи *остаточными*[20], *инвариантны* относительно *бесконечно малых* (т. е. исчезающих на бесконечности) возмущений.

[19]Бурлаков Д.С., Цой С.В. Равенство полной и векторной частот решений линейной автономной системы //Дифференц. уравнения. 2011. **47**. №11. С. 1662–1663.

[20]Сергеев И.Н. К теории показателей Ляпунова линейных систем дифференциальных уравнений // Тр. семинара им. И.Г. Петровского. 1983. Вып. 9. С. 111–166.

В связи с этим возник вопрос: распространяются ли указанные свойства крайних частот с пространства линейных уравнений второго порядка на пространство всех линейных двумерных дифференциальных систем?

Наконец, в докладах[21,22] были введены понятия метрически и топологически *существенных* значений показателей линейных систем. Это позволило начать изучение вопроса о том, достаточно ли мощно, в смысле меры или топологии, множество решений уравнения или системы, на котором заданная частота принимает то или иное значение.

Цель работы

Целью настоящей диссертационной работы является исследование *спектров* полных и векторных частот линейных однородных дифференциальных *уравнений третьего порядка* и линейных однородных дифференциальных *двумерных систем*, а также *непрерывность крайних частот* на множестве линейных однородных двумерных дифференциальных систем, наделенном равномерной топологией.

Методы исследования

В работе применяются аналитические методы качественной теории дифференциальных уравнений, теории возмущений и теории колебаний.

Научная новизна работы

В диссертации получены следующие основные результаты:

- доказано существования линейного однородного дифференциального уравнения третьего порядка и линейной однородной двумерной дифференциальной системы с непрерывными ограниченными коэффициентами, спектры полных и векторных частот которых содержат счетные множества метрически и топологически существенных значений;

- доказано существование линейного однородного дифференциального уравнения третьего порядка с непрерывными неограниченными коэффициентами, спектры характеристической частоты нулей, полной частоты и векторной частоты которого содержат один и тот же отрезок числовой прямой;

[21] Сергеев И.Н. Метрически типичные и существенные значения показателей линейных систем // Дифференц. уравнения. 2011. **47**. №11. С. 1661–1662.

[22] Сергеев И.Н. Топологически типичные и существенные значения показателей линейных систем // Дифференц. уравнения. 2012. **48**. №11. С. 1567–1568.

- доказано существование линейной однородной двумерной дифференциальной системы с периодическими коэффициентами, спектры полной и векторной частот которого содержат один и тот же набор, состоящий из любого конечного наперед заданного числа метрически и топологически существенных значений;

- доказано существование точки в пространстве линейных двумерных дифференциальных систем (наделенном равномерной топологией), в которой ни одна из крайних частот не является ни непрерывной, ни полунепрерывной сверху, ни полунепрерывной снизу, ни даже инвариантной относительно бесконечно малых возмущений.

Теоретическая и практическая ценность

Диссертация носит теоретический характер. Полученные результаты могут быть использованы в дальнейших исследованиях специалистами по качественной теории дифференциальных уравнений.

Апробация работы

Автор выступал с докладами по теме диссертации на следующих научных семинарах:

1) семинар по качественной теории дифференциальных уравнений кафедры дифференциальных уравнений механико-математического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова под рук. проф. И.В. Асташовой, проф. А.В. Боровских, проф. Н.Х. Розова, проф. И.Н. Сергеева (неоднократно: 2011–2013);

2) семинар «Динамические системы и оптимальное управление» кафедры математического анализа и методики преподавания математики факультета математики и компьютерных наук Адыгейского государственного университета под рук. проф. М.М. Шумафова (неоднократно: 2011).

Содержащиеся в диссертации результаты докладывались автором на следующих конференциях:

1) Вторая Международная конференция «Математическое моделирование фрактальных процессов, родственные проблемы анализа и информатики» (г. Терскол, 2012);

2) Девятая Международная научная конференция молодых ученых «Наука. Образование. Молодежь» (г. Майкоп, 2012).

Публикации

По теме диссертации опубликовано 8 работ, в том числе 6 статей в журналах, рекомендованных ВАК. Список работ приведен в конце автореферата. Работ в соавторстве нет.

Структура и объем диссертации

Диссертация состоит из введения, четырех глав и списка литературы. Общий объем диссертации составляет 98 страниц. Библиография включает 90 наименований.

Краткое содержание диссертации

Введение

В кратком введении описывается история вопроса и постановка задачи. Формулируются основные результаты диссертации и указывается их место в теории показателей Ляпунова, теории колеблемости и в современной теории характеристик колеблемости решений линейных однородных дифференциальных уравнений и систем.

Глава 1

В разделе **1.1** вводятся понятия (верхней и нижней) частоты нулей, полной и векторной частот.

Для заданного $n \in \mathbb{N}$ обозначим через $\mathcal{M}^n$ *множество линейных однородных дифференциальных систем*

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}^+ \equiv [0, \infty),$$

каждая из которых отождествляется со своей *ограниченной непрерывной* оператор-функцией $A : \mathbb{R}^+ \to \operatorname{End} \mathbb{R}^n$.

Обозначим через $\mathcal{P}^n$, $\mathcal{T}^n$ подмножества множества $\mathcal{M}^n$, состоящие из *периодических* и *треугольных* систем соответственно. Множество всех ненулевых решений $x : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^n$ системы $A \in \mathcal{M}^n$ обозначим через $\mathcal{S}_*(A)$.

Определение I[11, 12]. Для каждой системы $A \in \mathcal{M}^n$, произвольного решения $x \in \mathcal{S}_*(A)$, вектора $m \in \mathbb{R}^n$ и момента $t > 0$ обозначим через $\nu(x, m, t)$ *число нулей* (возможно, бесконечное) скалярного произведения $(x(\tau), m)$ на промежутке $\tau \in (0, t]$, а *верхней* (*нижней*) *полной* и *векторной частотами* решения x назовем величи́ны

$$\hat{\sigma}(x) \equiv \inf_{m\in\mathbb{R}^n} \varlimsup_{t\to\infty} \frac{\pi}{t}\nu(x,m,t) \quad \left(\check{\sigma}(x) \equiv \inf_{m\in\mathbb{R}^n} \varliminf_{t\to\infty} \frac{\pi}{t}\nu(x,m,t)\right),$$
$$\hat{\zeta}(x) \equiv \varlimsup_{t\to\infty} \inf_{m\in\mathbb{R}^n} \frac{\pi}{t}\nu(x,m,t) \quad \left(\check{\zeta}(x) \equiv \varliminf_{t\to\infty} \inf_{m\in\mathbb{R}^n} \frac{\pi}{t}\nu(x,m,t)\right).$$

В случае совпадения верхней полной (векторной) частоты решения x с нижней будем называть ее *точной* и обозначать просто $\sigma(x)$ (соответственно $\zeta(x)$).

Фиксировав в $\mathbb{R}^n$ базис, естественным образом выделим в множестве $\mathcal{M}^n$ подмножество $\mathcal{E}^n$ систем, задаваемых матрицами вида

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \\ -a_n(t) & -a_{n-1}(t) & \ldots & -a_1(t) \end{pmatrix}$$

и отвечающих *линейным однородным дифференциальным уравнениям* n*-го порядка*

$$y^{(n)} + a_1(t)y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(t)\dot{y} + a_n(t)y = 0, \quad t \in \mathbb{R}^+,$$

каждое из которых, задаваясь своей ограниченной непрерывной вектор-функцией

$$a \equiv (a_1, \ldots, a_n) \colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^n,$$

преобразуется в систему A стандартным переходом[23] от скалярной переменной y к векторной

$$x = \psi^n y \equiv (y, \dot{y}, \ldots, y^{(n-1)})$$

и отождествляется с этой системой.

Множество всех ненулевых решений $y \colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ уравнения $a \in \mathcal{E}^n$ обозначим через $\mathcal{S}_*(a)$.

Определение II[7,24]. Для каждого уравнения $a \in \mathcal{E}^n$, произвольного решения $y \in \mathcal{S}_*(a)$ и момента $t > 0$ обозначим через $\nu(y,t)$ число *нулей* функции y на промежутке $(0;t]$, а *верхней* и *нижней частотами нулей* решения y назовем величи́ны

$$\hat{\nu}(y) \equiv \varlimsup_{t\to\infty} \frac{\pi}{t}\nu(y,t) \quad \text{и} \quad \check{\nu}(y) \equiv \varliminf_{t\to\infty} \frac{\pi}{t}\nu(y,t),$$

причем в случае совпадения значения верхней частоты решения с нижней будем называть это значение *точным*.

[23] Филиппов А.Ф. Введение в теорию дифференциальных уравнений. М.: Едиториал УРСС, 2004.

[24] Сергеев И.Н. Свойства характеристических частот линейных уравнений произвольного порядка // Труды семинара им. И.Г. Петровского. 2013. Вып. 29. С. 414–442.

Величины $\hat{\nu}(y), \check{\nu}(y)$ неотрицательны, конечны[8] и удовлетворяют неравенствам

$$\hat{\nu}(y) \geqslant \check{\nu}(y), \quad y \in \mathcal{S}_*(a).$$

В разделе **1.2** вводятся понятия спектра частоты данной системы, метрической и топологической типичности значения частоты, метрической и топологической существенности значения частоты. Доказываются некоторые утверждения о возможных мощностях множеств типичных и существенных значений спектра.

С каждой из частот $\varkappa$, описанных в определениях I и II, и с каждой системой $A \in \mathcal{M}^n$ (а в случае $\varkappa = \hat{\nu}, \check{\nu}$ только с системой $A \in \mathcal{E}^n$) можно связать функционал

$$\varkappa_A \colon \mathcal{S}_*(A) \to \mathbb{R}^+.$$

Определение III. *Спектром* частоты $\varkappa_A$ системы $A \in \mathcal{M}^n$ назовем область ее значений, а значение частоты $\varkappa$, принадлежащее спектру системы A, назовем:

а) *метрически существенным*[21], если оно принимается на решениях $x \in \mathcal{S}_*(A)$, множество наборов $x(0) \in \mathbb{R}^n$ начальных значений которых содержит множество положительной меры в $\mathbb{R}^n$;

б) *топологически существенным*[22], если оно принимается на решениях $x \in \mathcal{S}_*(A)$, множество наборов $x(0) \in \mathbb{R}^n$ начальных значений которых, пересеченное с некоторым открытым подмножеством $U \subset \mathbb{R}^n$, служит дополнением в U к множеству первой категории Бэра.

Глава 2

В разделе **2.1** строится уравнение третьего порядка с периодическими коэффициентами, спектры частоты нулей, полной и векторной частот которого содержат конечные наборы, состоящие из сколь угодно большого наперед заданного числа. Причем все значения из этих наборов являются точными, а все решения построенного уравнения — периодическими с тем же периодом, что и коэффициенты самого уравнения.

Теорема I. *Для любого $N \in \mathbb{N}$ найдется уравнение $a \in \mathcal{E}^3$ с периодическими коэффициентами, имеющее набор решений $y_1, y_2, \ldots, y_N$ с точными частотами, удовлетворяющими условиям*

$$\sigma(y_i) = \zeta(y_i) \leqslant \nu(y_i), \quad i = 1, 2, \ldots, N,$$

$$\sigma(y_i) \neq \sigma(y_j), \quad \nu(y_i) \neq \nu(y_j), \quad i \neq j.$$

В разделе **2.2** происходит фактическое построение неавтономного уравнения третьего порядка со счетными спектрами частот.

Теорема II. *Существует уравнение* $a \in \mathcal{E}^3$, *имеющее последовательность решений* $y_1, y_2, \ldots$ *с точными частотами, удовлетворяющими условиям*

$$\sigma(y_i) = \zeta(y_i) = \nu(y_i) = 2^{-i}, \quad i \in \mathbb{N},$$

причем все эти значения частот являются существенными (*и метрически, и топологически*).

В разделе **2.3** строится семейство уравнений третьего порядка с непрерывными неограниченными коэффициентами.

Через $\tilde{\mathcal{E}}^n$ обозначим *множество линейных однородных дифференциальных уравнений* n*-го порядка с непрерывными (не обязательно ограниченными) на* $\mathbb{R}^+$ *коэффициентами.* Для каждого решения $y \in \mathcal{S}_*(a)$ любого уравнения $a \in \tilde{\mathcal{E}}^n$ характеристики колеблемости (полная частота, векторная частота и характеристическая частота нулей) определяются так же, как и в определениях I и II.

Для произвольных чисел $\varepsilon > 0$ и $\omega > 1$, связанных соотношением

$$\omega < \sqrt{\frac{1}{1-\varepsilon}},$$

рассмотрим тройку функций

$$z_1(t) = e^{t^2}(\cos t + \varepsilon), \quad z_2(t) = e^{t^2}\cos\omega t, \quad z_3(t) = e^{t^2}\sin\omega t, \qquad t \in \mathbb{R}^+.$$

По этой системе функций восстановим уравнение $a \in \tilde{\mathcal{E}}^3$, для которого они служат решениями.

Для любого значения $\varphi \in \mathbb{R}$ из множества решений построенного уравнения можно выделить однопараметрическое семейство функций вида

$$f_A(t) = (1-A)e^{t^2}(\cos t + \varepsilon) - Ae^{t^2}\cos(\varphi + \omega t), \quad 0 \leqslant A \leqslant 1. \qquad (1)$$

В данном разделе доказывается, что если ω — иррациональное число, то частоты решений (1) уравнения a заполняют весь отрезок $[1, \omega]$.

Теорема III. *Существует уравнение* $a \in \tilde{\mathcal{E}}^3$, *спектры частоты нулей, полной и векторной частот которого содержат один и тот же отрезок числовой оси.*

В отличие от теорем I и II, теорему III принципиально невозможно усилить так, чтобы каждое из указанных в ней значений частот было метрически или топологически существенным.

Глава 3

В разделе **3.1** строится периодическая двумерная система, спектры полной и векторной частот которого содержат один и тот же конечный набор, состоящий из сколь угодно большого наперед заданного числа метрически и топологически существенных значений. Причем все эти значения из этого набора являются точными, а все решения построенной системы — периодическими с тем же периодом, что и коэффициенты самой системы.

Теорема IV. *Для любого $N \in \mathbb{N}$ существует система $A \in \mathcal{P}^2$, имеющая N решений $x_1, \ldots, x_N \in \mathcal{S}_*(A)$ с точными частотами, удовлетворяющими условиям*

$$\sigma(x_i) = \zeta(x_i) = \frac{i}{N}, \quad i = 1, \ldots, N,$$

причем все эти значения полных и векторных частот являются существенными (и метрически, и топологически).

В разделе **3.2** доказывается существование двумерной системы с одним и тем же счетным множеством значений полных и векторных частот ненулевых решений. Все предъявляемые значения частот и в этом случае являются точными и существенными.

Теорема V. *Существует система $A \in \mathcal{M}^2$, имеющая последовательность решений $x_1, x_2, \ldots \in \mathcal{S}_*(A)$ с точными частотами, удовлетворяющими условиям*

$$\sigma(x_i) = \zeta(x_i) = 1 - 2^{-i}, \quad i \in \mathbb{N},$$

причем все эти значения полных и векторных частот являются существенными (и метрически, и топологически).

Глава 4

В разделе **4.1** изучены полностью спектры полных и векторных частот линейных треугольных дифференциальных систем.

Теорема VI. *Для любого решения $x \in \mathcal{S}_*(A)$ любой системы $A \in \mathcal{T}^n$ имеет место следующая цепочка равенств*

$$\zeta(x) = \sigma(x) = 0.$$

В разделе **4.2** даны определения крайних частот линейных дифференциальных систем и инвариантного функционала относительно бесконечно малых возмущений.

По каждой из величин $\varkappa = \hat{\sigma}, \check{\sigma}, \hat{\zeta}, \check{\zeta}$ образуем *крайние* частоты системы $A \in \mathcal{M}^n$, а именно, *младшую* и *старшую* частоты

$$\varkappa_1(A) \equiv \inf_{x \in \mathcal{S}_*(A)} \varkappa(x), \qquad \varkappa_n(A) \equiv \sup_{x \in \mathcal{S}_*(A)} \varkappa(x).$$

В дальнейшем все крайние частоты будем рассматривать как функционалы на *линейном топологическом* пространстве $\mathcal{M}^n$ с естественными для функций линейными операциями и *равномерной* на $\mathbb{R}^+$ топологией, задаваемой *нормой*

$$\|A\| = \sup_{t \in \mathbb{R}^+} |A(t)|.$$

Определение IV[20]. *Для системы $A \in \mathcal{M}^n$ обозначим через $\mathcal{B}(A)$ множество систем $B \in \mathcal{M}^n$, удовлетворяющих условию*

$$\lim_{t \to \infty} |B(t) - A(t)| = 0,$$

при котором возмущение $B - A$ назовем бесконечно малым. Скажем, что функционал, определенный на $\mathcal{M}^n$, инвариантен в точке $A \in \mathcal{M}^n$ относительно бесконечно малых возмущений, если его сужение на множество $\mathcal{B}(A)$ есть константа.

В данном разделе приведен пример точки на множестве двумерных систем в которой ни одна из крайних частот не является непрерывной.

Теорема VII. *В пространстве $\mathcal{M}^2$ существует точка, в которой ни одна из крайних частот не является ни непрерывной, ни полунепрерывной сверху, ни полунепрерывной снизу, ни даже инвариантной относительно бесконечно малых возмущений.*

Автор глубоко признателен научному руководителю доктору физико-математических наук, профессору Игорю Николаевичу Сергееву за постановку задачи, ценные замечания и постоянное внимание к работе.

Работы автора по теме диссертации

Статьи в научных журналах из перечня ВАК

1. Сташ А.Х. О множестве значений полных частот решений линейного уравнения // Дифференц. уравнения. 2011. **47**. №11. С. 1665.

2. Сташ А.Х. Спектры полных и векторных частот линейных дифференциальных уравнений третьего порядка // Дифференц. уравнения. 2012. **48**. №6. С. 908.

3. Сташ А.Х. Спектры полных и векторных частот двумерных линейных дифференциальных систем // Дифференц. уравнения. 2013. **49**. №6. С. 807–808.

4. Сташ А.Х. О существенных значениях характеристик колеблемости решений линейных дифференциальных уравнений третьего порядка// Вестник Адыгейского государственного университета. Сер. Естественно-математические и технические науки. 2013. Вып. 2 (119). С. 9–23.

5. Сташ А.Х. О существовании линейного дифференциального уравнения третьего порядка с континуальными спектрами полной и векторной частот// Вестник Адыгейского государственного университета. Сер. Естественно-математические и технические науки. 2013. Вып. 3 (122). С. 9–17.

6. Сташ А.Х. Свойства полных и векторных частот решений двумерных линейных дифференциальных систем// Дифференц. уравнения. 2013. **49**. №11. С. 1497–1498.

Статьи в других научных журналах и тезисы докладов в материалах научных конференций

7. Сташ А.Х. О множестве значений полных частот решений линейных уравнений третьего порядка// Материалы IX Международной научной конференции молодых ученых «Наука. Образование. Молодежь», 9–10 февраля 2012 г. — Майкоп: Изд-во АГУ, 2012. Т. I. С. 324–328.

8. Сташ А.Х. Спектры полных и векторных частот линейных дифференциальных систем/ Математическое моделирование фрактальных процессов, родственные проблемы анализа и информатики: Материалы Второй Международной конференции молодых ученых, Терскол, 28 ноября – 1 декабря 2012 г. — Нальчик: ООО «Редакция журнала «Эльбрус», 2012. С. 211–212.