МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ имени М. В. ЛОМОНОСОВА

Механико-математический факультет

На правах рукописи

УДК 517.986

ОСИНЕНКО Антон Андреевич

ГАРМОНИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ НА НЕКОТОРЫХ БЕСКОНЕЧНОМЕРНЫХ КЛАССИЧЕСКИХ ГРУППАХ

Специальность 01.01.01 – вещественный, комплексный и функциональный анализ

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва 2013

Работа выполнена на кафедре теории функций и функционального анализа механико-математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук профессор Смолянов Олег Георгиевич
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук Неретин Юрий Александрович (ФГБУН “Институт теоретической и экспериментальной физики”, ведущий научный сотрудник)
	кандидат физико-математических наук Локтев Сергей Александрович (ФГАОУ ВПО “Национальный исследовательский университет “Высшая школа экономики””, доцент факультета математики)
Ведущая организация:	ФГБУН Санкт–Петербургское отделение Математического института имени В.А. Стеклова РАН

Защита диссертации состоится 20 декабря 2013 г. в 16 часов 45 минут на заседании диссертационного совета Д 501.001.85 при Московском государственном университете имени М. В. Ломоносова по адресу: Российская Федерация, 119991, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д. 1, МГУ имени М. В. Ломоносова, механико-математический факультет, аудитория 16-24.
С диссертацией можно ознакомиться в Фундаментальной библиотеке МГУ имени М. В. Ломоносова.
Автореферат разослан 20 ноября 2013 г.

Ученый секретарь диссертационного
совета Д.501.001.85 при МГУ,
доктор физико-математических наук,
профессор

В. Н. Сорокин

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Диссертация посвящена исследованию задач теории представлений "больших" групп, в частности, бесконечномерных унитарной и унитарно-симплектической групп, являющихся индуктивным пределом соответствующих конечномерных групп, естественным образом вложенных друг в друга.

Все неприводимые представления таких групп не могут быть классифицированы разумным образом. Одним из подходов к решению этой проблемы является рассмотрение сферических представлений пары[1] $(G,K) = (K\times K, \mathrm{diag}K\times K)$ — представлений группы G, обладающих выделенным K-инвариантным вектором. В случае рассматриваемых нами групп классы эквивалентности сферических представлений соответствующей (G,K)-пары находятся во взаимно-однозначном соответствии с характерами этой группы — нормированными центральными положительно определенными функциями на ней.

Впервые возможность работы с такого рода группами была показана в работе Тома[2] на примере бесконечной симметрической группы, являющейся индуктивным пределом конечных симметрических групп. Он показал, что множество характеров этой группы параметризуется некоторым подмножеством $\mathbb{R}^\infty\times\mathbb{R}^\infty\times\mathbb{R}$.

В случае бесконечномерной унитарной группы, рассматриваемом в диссертации, аналогичное описание было получено Войкулеску[3] в 1976 году. Он нашел явные формулы для некоторых характеров унитарной группы, однако доказательство того факта, что его список характеров является исчерпывающим, появилось позднее в работах Бойера[4] и Вершика и Керова[5].

[1] G. Olshanski, Unitary representations of infinite-dimensional pairs (G,K) and the formalism of R. Howe, Representations of Lie Groups and Related Topics (A. Vershik and D. Zhelobenko, eds.), Advanced Studies in Contemporary Math. 7, Gordon and Breach Science Publishers, New York etc., 1990, 269-463

[2] E. Thoma, *Die unzerlegbaren, positive–definiten Klassenfunktionen der abzählbar unendlichen, symmetrischen Gruppe*. Math. Zeitschr.,(1964), 40–61.

[3] D. Voiculescu, Representations factorielles de type II_1 de $U(\infty)$, J. Math. Pures et Appl. 55 (1976), 1-20.

[4] R. Boyer, Infinite traces of AF-algebras and characters of $U(\infty)$, J. Operator Theory, 9(1983), 205-236.

[5] А. М. Вершик, С. В. Керов, Характеры и фактор-представления бесконечной симметрической группы, ДАН СССР, 257:5(1981), 1037-1040.

Они независимо заметили, что этот факт следует из результата Эдреи[6] о двусторонних тотально положительных последовательностях.

Вершик и Керов также предложили для симметрической[7] и унитарной[8] групп другой подход, основанный на идее приближения экстремальных характеров нормированными неприводимыми характерами допредельных компактных групп $S(n)$ и $U(N)$ соответственно, позволяющий применять аппарат теории симметрических функций.

Подробное доказательство полноты списка характеров, основанное на асимптотическом методе Вершика и Керова, было дано в большей общности позднее Окуньковым и Ольшанским[9]. Новые способы доказательства предложены также в недавних работах Петрова[10] и Бородина и Ольшанского[11].

Одной из основных задач гармонического анализа на топологической группе K является разложение наиболее естественных представлений данной группы по неприводимым. В случае компактной группы таким представлением является (би)регулярное представление в пространстве $L^2(K, \mu)$, где μ — мера Хаара на K. Разложение этого представления по неприводимым было получено Петером и Вейлем в 1927 году. Рассматриваемые в диссертации группы не являются локально компактными, инвариантной меры на них нет, поэтому конструкция регулярного представления для них неприменима.

Естественные представления таких групп могут быть получены следующими двумя способами. Во-первых, можно построить представления таких групп как индуктивный предел при подходящих вложениях регулярных представлений допредельных компактных групп. Во-вторых, можно вложить G/K в некое объемлющее пространство $\overline{G/K}$ с инвариантной или квазиинвариинтной мерой m, на котором также будет действовать груп-

[6]A. Edrei, On the generating functions of totally positive sequences II, J. Analyse Math., 2(1952), 104-109.

[7]А. М. Вершик, С. В. Керов, Асимптотическая теория характеров симметрической группы, Функциональный анализ и его приложения, 15:4(1981), 15-27.

[8]А. М. Вершик, С. В. Керов, Характеры и фактор-представления бесконечной унитарной группы, ДАН СССР, 267:2(1982), 272-276.

[9]A. Okounkov, G. Olshanski, Asymptotics of Jack polynomials as the number of variables goes to infinity, Int. Math. Res. Notices (1998), no. 13, 641-682.

[10]L. Petrov, The boundary of the Gelfand-Tsetlin graph: New proof of Borodin-Olshanski's formula and its q-analogue, arXiv:1208.3443.

[11]A. Borodin and G. Olshanski, The Young bouquet and its boundary. arXiv:1110.4458.

па G. Стандартная конструкция тогда позволяет определить представление группы G в пространстве $L^2(\overline{G/K},\ m)$.

Вторая конструкция впервые была реализована Пикреллом[12]. Он рассмотрел пару $G = \lim U(2N)$, $K = \lim U(N) \times U(N)$ и построил объемлющее пространство $\overline{G/K}$ как проективный предел грассманианов, а также определил на этом пространстве семейство мер m_s, по которым строятся естественные представления пары $(G,\ K)$. В дальнейшем Неретин[13] перенес эту конструкцию на случай всех десяти $(G,\ K)$-пар, которые являются индуктивными пределами десяти классических серий компактных римановых симметрических пространств.

Для бесконечной симметрической группы обе конструкции были реализованы в работе Керова, Ольшанского и Вершика[14]. Там же, а также в серии работ Бородина и Ольшанского[15], была исследована структура спектральных мер получаемых представлений. Для унитарной группы в работе Ольшанского[16] было построено более богатое семейство представлений, зависящее от двух комплексных параметров. Для нецелых значений параметров эти представления были исследованы в работе Бородина и Ольшанского[17], и было показано, что спектральные меры допускают описание в терминах детерминантных точечных процессов, очень близких к процессам, возникаемым в теории случайных матриц.

Цель работы.

Целью настоящей диссертации является решение некоторых задач гармонического анализа на бесконечномерных классических группах, в частности, исследование естественных представлений бесконечномерных унитарной и унитарно-симплектической группы, а также связанных с этими задачами проблем.

---

[12] D. Pickrell, Measures on infinite dimensional Grassmann manifold, J. Funct. Anal. 70(1987), 323-356.

[13] Yu. A. Neretin, Hua-type integrals over unitary groups and over projective limits of unitary groups, Duke Math. J. 114(2002), 239-266.

[14] S. Kerov, G. Olshanski, and A. Vershik, Harmonic analysis on the infinite symmetric group. Invent. Math. 158 (2004), 551–642.

[15] A. Borodin, G. Olshanski, Point processes and the infinite symmetric group. Parts I-V, arXiv: math/9804086-98404088, math/9810013-9810014.

[16] G. Olshanski, The problem of harmonic analysis on the infinite-dimensional unitary group, J. Funct. Anal. 205 (2003) 464–524.

[17] A. Borodin and G. Olshanski, Harmonic analysis on the infinite–dimensional unitary group and determinantal point processes. Ann. Math. **161** (2005), no.3, 1319–1422.

Научная новизна. Результаты диссертации являются новыми.

В диссертации получены следующие основные результаты:

1. Вычислены спектральные меры естественных представлений T_{zw} бесконечномерной унитарной группы при целых значениях параметров. На основе этого доказана дизъюнктность данных представлений при различных z и w.

2. Доказано существование некоторого семейства вероятностных распределений на границе графа ветвления многочленов Якоби. Эти распределения в некоторых частных случаях являются спектральными мерами естественных представлений бесконечномерных классических групп.

3. Вычислены спектральные меры естественных представлений T_z бесконечномерной унитарно-симплектической группы при целом z.

Методы исследования.

В работе используются различные методы функционального анализа и теории представлений. Для получения результатов, связанных с задачей гармонического анализа на бесконечномерной унитарной и унитарно-симплектических группах, используется асимптотический подход Вершика и Керова, а также формализм, развитый в работе Керова, Ольшанского и Вершика. Для доказательства существования вышеупомянутого семейства мер используется метод аналитического продолжения вырожденных спектральных мер по параметрам.

Теоретическая и практическая ценность. Диссертация носит теоретический характер. Ее результаты и методы могут найти применение в асимптотической теории представлений.

Апробация диссертации. Результаты диссертации докладывались на семинаре кафедры теории функций и функционального анализа “Бесконечномерный анализ и математическая физика” под руководством профессоров О. Г. Смолянова и Е. Т. Шавгулидзе (2009-2013, неоднократно), на семинаре “Представления и вероятность” Независимого Московского университета под руководством профессора Г. И. Ольшанского (2011), на петербургском семинаре по теории представлений и динамическим системам в ПОМИ РАН под руководством профессора А. М. Вершика (2013) и на Международной молодежной научной конференции “Ломоносов-2012”.

Публикации. Результаты диссертации опубликованы в трех статьях в научных журналах, входящих в перечень ВАК. Список работ приведен в конце автореферата [1–3].

Структура диссертации. Диссертация состоит из введения и трех глав. Текст дисертации изложен на 100 страницах. Список литературы содержит 46 наименований.

Содержание работы

Во введении описывается история рассматриваемой проблемы и объясняется происхождение задач, рассматриваемых в диссертации, а также обозначаются основные результаты и методы их получения.

В первой главе диссертации описывается конструкция сферических представлений T_{zw} бесконечномерной унитарной группы и изучается вопрос разложения этих представлений по неприводимым при целых значениях параметров.

В разделе 1.1 сформулированы основные утверждения, касающиеся характеров бесконечномерной унитарной группы $U(\infty)$, которые потребуются в дальнейшем для вычисления спектральных мер представлений T_{zw}.

Бесконечномерная унитарная группа $U(\infty) = \cup_{N\geq 1} U(N)$ является индуктивным пределом унитарных групп $U(N)$, состоящих из унитарных матриц размера $N \times N$. При этом мы отождествляем $U(N)$ с подгруппой в $U(N+1)$ тех матриц, которые оставляют неподвижным $(N+1)$-ый базисный вектор.

Экстремальные характеры $U(\infty)$ параметризуются некоторым подмножеством Ω в $\mathbb{R}^{4\infty+2}$, а теорема 1.1.2 утверждает, что произвольный характер является интегралом от экстремальных по некоторой мере на Ω:

$$\chi(U) = \int_\Omega \chi^{(\omega)}(U) P(d\omega), \quad U \in U(\infty).$$

В этом же разделе вводится основное техническое средство для описания характеров $U(\infty)$ – градуированный граф Гельфанда-Цетлина $\mathbb{GT} = \sqcup \mathbb{GT}_N$, вершинами которого на N-ом этаже являюся упорядоченные наборы $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_N$ из N целых чисел. Такие наборы называются сигнатурами. Две вершины $\lambda \in \mathbb{GT}_n$ и $\nu \in \mathbb{GT}_{N+1}$ соединены ребром (в этом случае мы пишем $\lambda \prec \nu$ или $\nu \succ \lambda$), если выполнены следующие соотношения перемежаемости:

$$\nu_1 \geq \lambda_1 \geq \nu_2 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \nu_N \geq \lambda_N \geq \nu_{N+1},$$

естественным образом возникающие в правиле ветвления характеров унитарных групп:

$$\chi^\nu|_{U(N)} = \sum_{\lambda \prec \nu} \chi^\lambda.$$

Теорема 1.1.3 утверждает, что характеры $U(\infty)$ находятся во взаимно-однозначном соответствии с системами мер P_N на этажах $\mathbb{GT}_N$ графа Гельфанда-Цетлина. При этом меры P_N и P_{N+1} связаны так называемым соотношением когерентности:

$$P_N(\lambda) = \sum_{\nu \in \mathbb{GT}_{N+1},\ \nu \succ \lambda} \frac{\operatorname{Dim}_N \lambda}{\operatorname{Dim}_{N+1} \nu} P_{N+1}(\nu),$$

где $\operatorname{Dim}_N \lambda$ — размерность неприводимого представления унитарной группы $U(N)$, параметризуемого сигнатурой λ. Теорема 1.1.5 показывает, как спектральная мера P характера χ группы $U(\infty)$ может быть восстановлена по соответствующей χ системе мер P_N: P является слабым пределом образов мер P_N при некоторых вложениях $\imath_N$ этажей $\mathbb{GT}_N$ графа Гельфанда-Цетлина в Ω.

В разделе 1.2 приведена конструкция представления T_{zw} как индуктивного предела бирегулярных представлений Reg^N компактных групп $U(N)$ и выделенного K-инвариантного вектора ξ_0, лежащего во всех пространствах H_N представлений Reg^N. Вычисляются коэффициенты $a_{zw;N}(\lambda)$ по характерам ξ^λ группы $U(N)$, откуда находится явная формула для соответствующей представлению T_{zw} когерентной системе мер $P_N(\lambda|z,w)$ на графе Гельфанда-Цетлина.

В разделе 1.3 строится взаимно-однозначное соответствие между коммутантом представления T_{zw} и множеством ограниченных функций на графе Гельфанда-Цетлина, удовлетворяющим условию

$$A(\lambda) = \sum_{\nu \succ \lambda} p_{zw}(\lambda, \nu) A(\nu),$$

где

$$p_{zw}(\lambda, \nu) = \frac{|a_z w(\nu)|^2}{|a_{zw}(\lambda)|^2} \frac{\operatorname{Dim}_N \lambda}{\operatorname{Dim}_{N+1} \nu}.$$

Далее показано, что характеристическая функция подграфа

$$\mathbb{GT}(p,q;r,s) = \{\lambda \in \mathbb{GT} \,|\lambda_p \geq q,\ \lambda_{p+1} < q+1)$$
$$\lambda_{N-r+1} \leq -s,\ \lambda_{N-r} > -s-1\} \subset \mathbb{GT}.$$

графа Гельфанда-Цетлина удовлетворяет этому условию, и из этого выводится разложение представления T_{zw} в случае целых z и w в счетную прямую сумму

$$T_{zw} = \bigoplus_{q-p=z,\, s-r=l,\, p\geq 0,\, r\geq 0} T_{pqrs}$$

некоторых подпредставлений, которые называются блоками. Каждое из представлений T_{pqrs} приводимо, и в дальнейшем находятся спектральные меры этих представлений.

В разделе 1.4 строится изоморфизм между множеством K-инвариантных векторов представления T_{zw} и пространством комплекснозначных функций на графе Гельфанда-Цетлина, удовлетворяющим двум условиям:

(1) Псевдогармоничность: для всех $\lambda \in \mathbb{GT}_N$ выполнено соотношение:

$$f(\lambda) = \sum_{\nu \succ \lambda} f(\nu)(\xi_\nu, \xi_\lambda). \qquad (1)$$

(2) Условие типа Харди: для любого $N = 1, 2, \ldots$

$$||f||^2 := \sup_N \sum_{\lambda \in \mathbb{GT}_N} |f(\lambda)|^2 < \infty.$$

Этот изоморфизм согласован с разложением на блоки: K-инвариантные векторы, лежащие в пространстве представления T_{pqrs}, соответствуют функциям на графе Гельфанда-Цетлина, носитель которых лежит в $\mathbb{GT}(p,q;r,s)$.

С помощью этого изоморфизма в каждом из блоков T_{pqrs} представления T_{zw} строится K-инвариантный вектор v_{pqrs}, а также находится спектральная мера σ_{pqrs} сферического представления $(T_{pqrs},\, v_{pqrs})$. Основным результатом первой главы является теорема 1.4.5.

Теорема. *Пусть $q-p = z$, $s-r = w$, $p, r \geq 0$. Тогда в пространстве H_{pqrs} существует K-инвариантный вектор v_{pqrs} такой, что соответствующая ему функция $f_{pqrs}(\lambda) = f_{v_{pqrs}}(\lambda)$ в пространстве $\mathcal{F}_{pqrs}$ функций на $\mathbb{GT}(p,q;r,s)$ равна*

$$f(\lambda) = D_N f_1(\lambda^1) f_2(\lambda^2) f_3(\lambda^3),$$

где

$$f_1(\lambda^1) = B_{-p;N+w+q}(\lambda^1),$$
$$f_3(\lambda^3) = B_{-r;N+z+s}(\lambda^3),$$
$$f_2(\lambda^2) = a_{q,s;N-r-p}(\lambda^2),$$

$$B_{-p;N}(\lambda) := \frac{(-1)^{|\lambda|}\sqrt{(N-1)^{\downarrow p}(N-2)^{\downarrow p}\dots(N-p)^{\downarrow p}}\,\mathrm{Dim}_p\,\lambda}{(N+\lambda_1)^{\uparrow p}(N+\lambda_2-1)^{\uparrow p}\dots(N+\lambda_p-p+1)^{\uparrow p}},$$

$$n^{\uparrow k} = n(n+1)\dots(n+k-1),$$
$$n^{\downarrow k} = n(n-1)\dots(n-k+1),$$

а D_N выбраны так, что

$$\frac{D_N}{D_{N+1}} = \sqrt{\frac{N!(N+w+q-2p)!(N+z+s-2r)!(N-r-p+2q+2s)!}{(N+2z+2w)!(N-r-p)!(N+w+q)!(N+z+s)!}}. \tag{2}$$

Пусть $\varphi_{pqrs}(g)$ — сферическая функция на группе G, соответствующая вектору v_{pqrs},

$$\varphi_{pqrs}(g) = \frac{(T_{zw}(g)v_{pqrs}, v_{pqrs})}{||v_{pqrs}||^2} = \frac{(T_{pqrs}(g)v_{pqrs}, v_{pqrs})}{||v_{pqrs}||^2},$$

и σ_{pqrs} — спектральная мера на Ω, соответствующая функции φ_{pqrs}.

Тогда носителем меры σ_{pqrs} является множество $\Omega(p,q;r,s)$, и эта мера имеет плотность

$$\frac{V^2(\{\alpha_i^+\})V^2(\{\alpha_k^-\})V^2(\{\beta_j^+\})V^2(\{\beta_l^-\})\prod(1-\beta_j^+-\beta_l^-)^2}{\prod(1+\alpha_i^+)^{2p}\prod(1+\alpha_k^-)^{2r}}$$

относительно меры Лебега на $\Omega(p,q;r,s)$. Здесь и далее в этой главе, если не оговорено противное, индексы i, j, k и l меняются в следующих пределах:

$$1 \le i \le p, \quad 1 \le j \le q, \quad 1 \le k \le r, \quad 1 \le l \le s$$

в случае неотрицательных q и s и в пределах:

$$1 \le i \le p, \quad 1 \le j \le q, \quad 1 \le k \le r, \quad -q+1 \le l \le s$$

в случае отрицательного q (случай отрицательного s рассмативается аналогично), а $V(x)$ для конечного набора чисел $x = x_1, \ldots, x_n$ обозначает определитель Вандермонда:

$$V(x) = \prod_{1 \le i < j \le n} (x_i - x_j).$$

В разделах 1.5 и 1.6 преодолевается техническая трудность, связанная с доказательством цикличности построенного в разделе 1.4 вектора v_{pqrs}. Для этого в лемме 1.5.10 показывается, что для любого неотрицательного эрмитова оператора A в коммутанте представления T_{pqrs} выполнено неравенство

$$(Av_{pqrs}, v_{pqrs}) > 0,$$

из которого легко следует цикличность v_{pqrs}.

Для доказательства леммы 1.5.10 вводится вспомогательная система мер $\mathfrak{M}^{(N)}_{pqrs}(\lambda)$ на графе $\mathbb{GT}(p,q;r,s)$, заданная рекуррентными соотношением

$$\mathfrak{M}^{(N+1)}_{pqrs}(\nu) = \sum_{\lambda : \lambda \prec \nu} \mathfrak{M}^{(N)}_{pqrs}(\lambda) p_{zw}(\lambda, \nu)$$

и начальным условием

$$\mathfrak{M}_{pqrs}(\lambda_{\min}) = 1,$$

где $\lambda_{\min}$ — сигнатура длины $p + r$, у которой первые p компонент равны q, а последние r равны $-s$.

Лемма 1.5.8 утверждает, что образы мер $\mathfrak{M}^{(N)}_{pqrs}$ при вложениях $\imath_N$ носителей $\mathbb{GT}_N(p,q;r,s)$ этих мер в $\Omega(p,q;r,s)$ слабо сходятся к некоторой вероятностной мере $\mathfrak{M}^{(\infty)}_{pqrs}$, абсолютно непрерывной относительно меры Лебега на $\Omega(p,q;r,s)$.

Доказательства технических вспомогательных к лемме 1.5.8 лемм 1.5.5, 1.5.6 и 1.5.7 вынесены в раздел 1.6.

В разделе 1.7 результаты разделов 1.1-1.6 применяются для доказательства дизъюнктности представлений T_{zw} при различных z и w.

Во второй главе, мотивированной задачей гармонического анализа на бесконечномерных классических группах, доказывается существование некоторого семейства вероятностных мер на границе графа ветвления многомерных многочленов Якоби. Эти меры являются аналогом многомерных бета-распределений Эйлера, фигурирующих в интеграле Сельберга, и в некоторых частных случаях являются спектральными мерами сферических представлений бесконечномерных классических групп.

В разделе 2.1 определяются "элементарные" многочлены Якоби, зависящие от двух вещественных параметров a и b:

$$P_\lambda^{a,b}(x_1,\dots,x_N) = \frac{\det_{1\le i,j\le N}[p^{a,b}_{\lambda_j+N-j}(x_i)]}{V(x)}, \qquad \lambda\in\mathcal{V}_N,$$

где $p_l^{a,b}$ — классические многочлены Якоби, ортогональные на отрезке $[-1,1]$ с весовой функцией $(1-x)^a(1+x)^b$, а $\lambda\in\mathcal{V}_N$, где $\mathcal{V}_N$ — множество неотрицательных сигнатур длины N:

$$\mathcal{V}_N = \{\lambda\in\mathbb{Z}^N : \lambda_1\ge\lambda_2\ge\ldots\ge\lambda_N\ge 0\}.$$

Нормированные в единице многомерные многочлены Якоби $\Phi_\lambda^{a,b}$ удовлетворяют следующему правилу ветвления[18]

$$\Phi_\lambda^{a,b}(x_1,\dots,x_{N-1},1) = \sum_{\nu\in\mathcal{V}_{N-1}} \Lambda^N_{N-1}(\lambda,\nu)\Phi_\nu^{a,b}(x_1,\dots,x_{N-1}).$$

При этом коэффициенты Λ^N_{N-1} зависят от параметров a и b и не равны нулю тогда и только тогда, когда существует такое $\mu\in\mathcal{V}_{N-1}$, что

$$\lambda_1\ge\mu_1\ge\lambda_2\ge\ldots\ge\lambda_{N-1}\ge\mu_{N-1}\ge\lambda_N$$

и

$$\mu_1\ge\nu_1\ge\mu_2\ge\ldots\ge\mu_{N-1}\ge\nu_{N-1}\ge 0.$$

Границей графа ветвления многомерных многочленов Якоби является некоторое замкнутое подмножество Ω множества $\mathbb{R}^{2\infty+1}=\mathbb{R}^\infty\times\mathbb{R}^\infty\times\mathbb{R}$.

Как и в случае графа Гельфанда-Цетлина, существует взаимнооднозначное соответствие между вероятностными мерами на границе Ω и когерентными системами вероятностных мер на графе Якоби, задаваемое соотношениями

$$M_N(\lambda) = \int_\Omega M_\infty(d\omega)\Lambda^\infty_N(\omega,\lambda)d\omega, \qquad N=1,2,\ldots, \quad \lambda\in\mathcal{V}_N,$$

[18] A. Okounkov and G. Olshanski, Limits of BC-type orthogonal polynomials as the number of variables goes to infinity. In: Jack, Hall-Littlewood and Macdonald polynomials. Contemp. Math., **417**, pp. 281–318. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2006.

где $\Lambda_N^{\infty}(\omega,\lambda)$ — коэффициенты разложения $\Psi(x_1;\omega)\dots\Psi(x_N;\omega)$ по нормированным в единице многомерным многочленам Якоби:

$$\Psi(x_1;\omega)\dots\Psi(x_N;\omega)=\sum_{\lambda\in\mathcal{V}_N}\Lambda_N^{\infty}(\omega,\lambda)\Phi_\lambda^{a,b}(x_1,\dots,x_N),$$

а $\Psi(x;\omega)$ при каждом $\omega\in\Omega$ — некоторая функция на отрезке $[-1;1]$, задаваемая явной формулой. При этом условие когерентности в данном случае записывается в следующем виде:

$$M_{N-1}(\nu)=\sum_{\lambda\in\mathcal{V}_N}M_N(\lambda)\Lambda_{N-1}^N(\lambda,\nu).$$

В разделе 2.2 определяется семейство z-мер $M_N(\lambda\mid z,z',a,b)$, где оба параметра z и z' лежат в полуплоскости D:

$$D:=\{z\in\mathbb{C}:\operatorname{Re}z>-(1+b)/2\}.$$

Для получения явной формулы для этих мер используется интеграл Сельберга

$$\int_{[0,1]^N}\left(\prod_{i=1}^n x_i^{A_1}(1-x_i)^{A_2}\right)V^2(x)dx_1\dots dx_N$$
$$=S_N(A_1,A_2):=\prod_{j=1}^N\frac{\Gamma(A_1+j)\Gamma(A_2+j)\Gamma(1+j)}{\Gamma(A_1+A_2+N+j)}.$$

В разделе 2.3 формулируется основной результат второй главы — теорема 2.3.1.

Теорема. *Предположим, что параметры z и z' лежат в полуплоскости D. Тогда семейство z-мер $\{M_N(\lambda\mid z,z',a,b):N=1,2,\dots\}$ является когерентным.*

Из этой теоремы и упомянутой выше биекции между вероятностными мерами на границе Ω и когерентными системами вероятностных мер следует, что в случае $z'=\bar z$ меры $M_N(\lambda\mid z,z',a,b)$ определяют некоторую вероятностную меру $M_\infty(d\omega\mid z,z',a,b)$ на пространстве Ω.

В разделе 2.3 доказывается когерентность мер M_N в предположении, что меры M_N когерентны в вырожденном случае, когда параметр z является натуральным числом, а параметр $z\geq z'$ – вещественным. Это делается в два этапа: сначала, фиксируя натуральное z, показывается, что можно избавиться от предположения о вещественности z', потом, фиксируя уже z', показывается, что можно избавиться от предположения о натуральности z. При этом на втором этапе доказательства используется слабая версия теоремы Карлсона, утверждающая, что функция, голоморфная в правой полуплоскости $\operatorname{Re} z > \text{const}$, имеющая полиномиальный рост на бесконечности и обращающаяся в 0 в целых точках, равна нулю тождественно.

В разделах 2.4-2.6 доказывается когерентность системы мер $M_N(\lambda \mid z, z', a, b)$ в вырожденном случае. В случае натурального $z = K$ носителем меры $M_N(\lambda \mid z, z', a, b)$ является множество $\mathcal{V}(K)$ неотрицательных сигнатур, у которых первая координата λ_1 не превосходит K. Носителем же предполагаемой соответствующей граничной меры M_∞ на Ω будет

$$\Omega(K) := \{\omega = (\alpha, \beta, \delta) \in \Omega : \alpha \equiv 0,$$
$$\beta_{K+1} = \beta_{K+2} = \cdots = 0, \quad \delta = \beta_1 + \cdots + \beta_K\},$$

которое можно отождествить просто с подмножеством $[0, 1]^K$. Таким образом, для доказательства когерентности мер $M_N(\lambda \mid z, z', a, b)$ оказывается достаточно доказать следующее равенство

$$M_N(\lambda) = \int_{\omega \in \Omega(K)} M_\infty(d\omega) \Lambda_N^\infty(\omega, \lambda), \qquad N = 1, 2, \ldots, \quad \lambda \in \mathcal{V}_N(K), \quad (3)$$

где

$$M_\infty(d\omega) = \text{const} \cdot (V((1 - \beta_1)^2, \ldots, (1 - \beta_K)^2))^2$$
$$\times \prod_{j=1}^{K} (1 - (1 - \beta_j)^2)^s (1 - \beta_j)^{2b+1} \cdot d\beta_1 \ldots d\beta_K.$$

В разделе 2.4 доказывается следующая явная формула для $\Lambda_N^\infty(\omega, \lambda)$ для $w = (\beta_1, \ldots, \beta_K) \in \Omega(K)$ и $\lambda \in \mathcal{V}_N(K)$:

$$\Lambda_N^\infty(\omega, \lambda) = \prod_{j=1}^{K} \left(\frac{\beta_j (1 - \beta_j)}{2} \right)^N \cdot \mathcal{P}_\lambda^{a,b}(1^N) \cdot \mathcal{P}_\mu^{b,a}(y_1, \ldots, y_K),$$

где

$$y_j = \frac{1 + (1 - \beta_j)^2}{1 - (1 - \beta_j)^2} = \frac{1 + t_j}{1 - t_j},$$

а μ — диаграмма, получаемая взятием дополнением к λ в прямоугольнике $N \times K$ с последующим поворотом на $180°$:

$$\mu = (N - \lambda'_K, \ldots, N - \lambda'_1).$$

Для доказательства этой формулы используется дуальное тождество Коши для многомерных многочленов Якоби.

Таким образом, задача доказательства когерентности мер сводится к вычислению интеграла в правой части равенства (3). В разделе 2.5 описывается способ вычисления данного интеграла, основанный на способе, предложенным Каделлом[19] для вычисления интеграла от многочлена Джека по многомерному бета-распределению. В разделе 2.6 проделывается оставшаяся техническая работа, необходимая для доказательства равенства (3).

В третьей главе снова изучается задача гармонического анализа и исследуются представления T_z бесконечномерной унитарно-симплектической группы. Показывается, что методы, развиваемые в первой главе диссертации, могут быть применены и в этом случае, хотя соответствующие доказательства становятся более трудоемкими.

В разделах 3.1 и 3.2 приводится краткий обзор утверждений, касающихся унитарно-симплектической группы, аналогичных утверждениям разделов 1.1-1.3 для унитарной группы, а также получено разложение на блоки T_{pq}.

В разделе 3.3 строится K-инвариантный вектор v_{pq} в каждом блоке. Основным результатом этой главы является теорема 3.3.4.

Теорема. *Пусть $q - p = z$, $p \geq 0$. Тогда в пространстве H_{pq} существует K-инвариантный вектор такой, что соответствующая ему функция $f_{pq}(\lambda) = f_{v_{pq}}(\lambda)$ в пространстве $\mathcal{F}_{pq}$ функций на $\mathcal{V}(p;q)$ представима в виде*

$$f_{pq}(\lambda) = D_N f_{pq}^{(1)}(\lambda^{(1)}) f_{pq}^{(2)}(\lambda^{(2)})$$

для некоторых D_N, $f_{pq}^{(1)}$ и $f_{pq}^{(2)}$.

Пусть $\varphi_{pq}(g)$ — сферическая функция на группе G, соответствующая вектору v_{pq},

$$\varphi_{pq}(g) = \frac{(T_z(g)v_{pq}, v_{pq})}{||v_{pq}||^2} = \frac{(T_{pq}(g)v_{pq}, v_{pq})}{||v_{pq}||^2},$$

и σ_{pq} — спектральная мера на Ω, соответствующая функции φ_{pq}.

Тогда носителем меры σ_{pq} является множество $\Omega(p,q)$, и эта мера с

[19] K. W. J. Kadell, The Selberg–Jack symmetric functions. Adv. Math. **130** (1997), 33–102.

точностью до константы, зависящей только от p и q, имеет плотность

$$\frac{\prod\limits_{1\le i<j\le p}(\alpha_i+\alpha_j+2)^2(\alpha_i-\alpha_j)^2\prod\limits_{1\le k<l\le q}(\beta_k-\beta_l)^2(2-\beta_k-\beta_l)^2\prod\limits_{k=1}^{q}(1-\beta_k)^2}{\prod\limits_{i=1}^{p}(2+\alpha_i)^{4p}}$$

относительно меры Лебега на $\Omega(p,q)$.

В разделе 3.4 доказывается цикличность построенного вектора v_{pq}. Доказательство трех технических лемм, требуемых для этого, вынесено в отдельный раздел 3.5.

Автор глубоко благодарен Григорию Иосифовичу Ольшанскому за постановку задач, постоянное внимание к работе и плодотворные обсуждения и Олегу Георгиевичу Смолянову за поддержку на всех этапах подготовки диссертации. Также автор благодарен Вадиму Евгеньевичу Горину и Леониду Александровичу Петрову за ценные замечания во время докладов и неформальных обсуждений работы. Наконец, автор благодарен Фонду "Конкурс Мебиуса" за поддержку во время написания диссертации.

Работы автора по теме диссертации

[1] Осиненко А. А., Гармонический анализ на бесконечномерной унитарной группе. Записки научных семинаров ПОМИ им. В. А. Стеклова РАН, 390(2011), 237-285.

[2] Осиненко А. А., Гармонический анализ на бесконечномерной унитарно-симплектической группе. Записки научных семинаров ПОМИ им. В. А. Стеклова РАН, 403(2012), 118-141.

[3] Ольшанский Г. И, Осиненко А. А. Многомерные многочлены Якоби и интеграл Сельберга. Функциональный анализ и его приложения, 46:4(2012), 31-50.

В работе [3] Г. И. Ольшанскому принадлежит постановка задачи и идея доказательства. Строгое обоснование результатов принадлежит диссертанту. Текст статьи был написан совместно.