ФГБОУ ВПО Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова

На правах рукописи

Новиков Дмитрий Вячеславович

Топология особенностей интегрируемых гамильтоновых систем с некомпактными поверхностями уровня

01.01.04 — геометрия и топология

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Москва

2013

Работа выполнена на кафедре дифференциальной геометрии и приложений Механико-математического факультета ФГБОУ ВПО Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова

Научные руководители: Академик РАН, профессор
Фоменко Анатолий Тимофеевич,
доктор физико-математических наук, профессор
Ошемков Андрей Александрович

Официальные оппоненты: **Карасев Михаил Владимирович**,
доктор физико-математических наук, профессор
(ФГАОУ ВПО Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», Факультет прикладной математики и кибернетики, Кафедра прикладной математики),
Воронцов Александр Сергеевич,
кандидат физико-математических наук,
старший научный сотрудник (ФГБУН Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН)

Ведущая организация: ФГБУН Математический институт им. В. А. Стеклова РАН

Защита состоится 20 декабря 2013 г. в 16 ч. 45 мин. на заседании диссертационного совета Д 501.001.84 на базе ФГБОУ ВПО Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова по адресу: Российская Федерация, 119991, г. Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д. 1, МГУ имени М. В. Ломоносова, механико-математический факультет, ауд. 14-08.

С диссертацией можно ознакомиться в Фундаментальной библиотеке ФГБОУ ВПО Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова (Москва, Ломоносовский проспект, д. 27, сектор А).

Автореферат разослан 20 ноября 2013 г.

Ученый секретарь диссертационного совета
Д 501.001.84 на базе ФГБОУ ВПО МГУ,
доктор физико-математических наук, профессор А. О. Иванов

Общая характеристика работы

Актуальность темы

Диссертационная работа посвящена исследованию топологических особенностей интегрируемого случая В. В. Соколова (далее – случай Соколова) на алгебрах Ли $\mathrm{e}(3)$ и $\mathrm{so}(3,1)$. Это гамильтонова система с двумя степенями свободы. Указанные случаи отличаются от большинства известных систем тем, что совместные поверхности уровня гамильтониана и дополнительного интеграла являются некомпактными, а в случае $\mathrm{so}(3,1)$, кроме того, поток гамильтониана является неполным.

Основы теории топологической классификации интегрируемых гамильтоновых систем были заложены А. Т. Фоменко[1]. Указанный новый подход в изучении интегрируемых систем, предложенный А. Т. Фоменко, был затем продолжен А. Т. Фоменко и Х. Цишангом[2]. Ими был открыт топологический инвариант интегрируемых систем (именуемый инвариантом Фоменко-Цишанга). Это граф с числовыми метками, являющийся полным инвариантом таких систем: две системы лиувиллево эквивалентны, если и только если графы Фоменко-Цишанга совпадают. Далее школа А. Т. Фоменко разработала методы вычисления меченых молекул[3]. Бифуркационные диаграммы многих важных интегрируемых систем были вычислены М. П. Харламовым[4].

[1] см., например,
А. Т. Фоменко, "Симплектическая топология вполне интегрируемых гамильтоновых систем", *УМН*, **44**:1(265) (1989),145–173,
А. Т. Фоменко, "Теория Морса интегрируемых гамильтоновых систем", *Докл. АН СССР*, **287**:5 (1986), 1071–1075,
А. Т. Фоменко, "Топология поверхностей постоянной энергии некоторых интегрируемых гамильтоновых систем и препятствия к интегрируемости", *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **50**:6 (1986), 1276–1307,
А. Т. Фоменко, "Теория бордизмов интегрируемых гамильтоновых невырожденных систем с двумя степенями свободы. Новый топологический инвариант многомерных интегрируемых систем", *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **55**:4 (1991), 747–779,
А. Т. Фоменко, "Топологический инвариант, грубо классифицирующий интегрируемые строго невырожденные гамильтонианы на четырехмерных симплектических многообразиях", *Функц. анализ и его прил.*, **25**:4 (1991), 23–35
и др.

[2] см. А. Т. Фоменко, Х. Цишанг, "О топологии трехмерных многообразий, возникающих в гамильтоновой механике", *Докл. АН СССР*, **294**:2 (1986), 283–287

[3] см. А. В. Болсинов, П. Х. Рихтер, А. Т. Фоменко, "Метод круговых молекул и топология волчка Ковалевской", *Матем. сб.*, **191**:2 (2000), 3–42

[4] см. М. П. Харламов, Топологический анализ интегрируемых задач динамики твердого тела, Изд-во

В серии работ А. В. Болсинова и А. Т. Фоменко[5], А. А. Ошемкова[6], П. Е. Рябова[7] и других были найдены классифицирующие инварианты для многих конкретных физических и механических интегрируемых систем. Как правило, в таких системах совместные поверхности уровня интегралов компактны. Результаты теории топологической классификации, полученные школой А. Т. Фоменко, подробно изложены А. В. Болсиновым и А. Т. Фоменко[8].

Однако теория топологической классификации некомпактых систем до сих пор не разработана, например, нет конечного списка атомов данной сложности (даже само понятие сложности в некомпактном случае пока что не определено). Мы надеемся, что результаты настоящей диссертации смогут быть полезны при построении такой теории.

При анализе некомпактных систем приходится сталкиваться с проблемой полноты полей. Полнота является существенным условием в Теореме Лиувилля, в компактном случае она получается автоматически. В отсутствии полноты (а в случае Соколова на $\mathrm{so}(3,1)$ так и происходит) связные компоненты совместной поверхности уровня гамильтониана и дополнительного интеграла не обязательно являются торами, цилиндрами или плоскостями. Аналогичная ситуация наблюдается в случае комплексных гамильтоновых систем с неполными потоками в работе Т. А. Лепского[9].

Заметим, что даже тогда, когда потоки полны, доказательство этого факта может быть нетривиально. Для доказательства полноты нет общих методов, например, критерий того, когда однородное квадратичное поле в $\mathbb{R}^2$ является полным, появился совсем недавно[10]. Автору неизвестны работы, где

ЛГУ, 1988

[5]см., например, А. В. Болсинов, А. Т. Фоменко, “Траекторная классификация геодезических потоков двумерных эллипсоидов. Задача Якоби траекторно эквивалентна интегрируемому случаю Эйлера в динамике твердого тела”, *Функц. анализ и его прил.*, **29**:3 (1995), 1–15

[6]см., например, А. А. Ошемков, “Вычисление инвариантов Фоменко для основных интегрируемых случаев динамики твердого тела”, *Труды семинара по вект. и тенз. анализу*, 25 (1993), 23–109

[7]см., например, П. Е. Рябов, “Бифуркации первых интегралов в случае Соколова”, *ТМФ*, **134**:2 (2003), 207–226

[8]см. А. В. Болсинов, А. Т. Фоменко, Интегрируемые гамильтоновы системы. Геометрия, топология, классификация, РХД, Ижевск, 1999

[9]см. Т. А. Лепский, “Неполные интегрируемые гамильтоновы системы с комлексным полиномиальным гамильтонианом малой степени”, *Матем. сб.*, **201**:10 (2010), 109–136

[10]см. S. Bromberg and A. Medina, “A note on the completeness of homogeneous quadratic vector fields on the plane”, *Qualitative Theory of Dynamical Systems*, **6**:2 (2005), 181–185

приводятся критерии полноты для полиномиальных векторных полей степени > 2. Среди работ, посвященных доказательству полноты потоков, отметим диссертацию А. Ю. Москвина[11], в которой доказано, что полнота потоков интегралов, полученных методом Садэтова, эквивалентна полноте потоков на соответствующей полупростой алгебре Ли.

Другим препятствием при анализе некомпактных систем является то, что в некомпактном случае могут быть некритические бифуркационные значения (например, так оказывается в изучаемом случае Соколова на e(3)). Соответственно для построения бифуркационной диаграммы недостаточно найти критические точки и их образы. Необходимо изучать, как устроена совместная поверхность уровня интегралов.

Сама общая задача определить и классифицировать некомпактные перестройки (по аналогии с компактной классификацией), в рамках которой в настоящей работе проводится исследование случая Соколова, поставлена А. Т. Фоменко.

Цель диссертационной работы

Диссертационная работа имеет следующие основные цели:

1. Исследование топологии случая Соколова на e(3).
2. Исследование топологии случая Соколова на so(3, 1).

Научная новизна

Основные результаты работы являются новыми и заключаются в следующем:

1. для случая Соколова на e(3)

- описана топология изоэнергетических поверхностей гамильтониана (см. стр. 9 автореферата);
- найдены бифуркационные диаграммы отображения, заданного гамильтонианом (см. стр. 8–9 автореферата), и отображения момента (см. стр. 9 автореферата);

[11] см. А. Ю. Москвин, Топология особенностей дробно-рациональных интегрируемых систем, диссертация на соискание звания кандидата физико-математических наук, 2010

- вычислены индексы критических точек дополнительного интеграла на изоэнергетических поверхностях (см. стр. 9–10 автореферата);

- описаны совместные поверхности уровня гамильтониана и дополнительного интеграла (см. стр. 10 автореферата);

- доказана полнота полей $\operatorname{sgrad} H$ и $\operatorname{sgrad} K$, что является важным условием в Теореме Лиувилля (см. параграф 1.6 диссертации).

2. для случая Соколова на $\mathrm{so}(3,1)$

- описана топология изоэнергетических поверхностей гамильтониана (см. стр. 11 автореферата);

- найдены бифуркационные диаграммы отображения, заданного гамильтонианом (см. стр. 10 автореферата), и отображения момента (см. стр. 11 автореферата);

- вычислены индексы критических точек дополнительного интеграла на изоэнергетических поверхностях (см. стр. 11 автореферата);

- описаны совместные поверхности уровня гамильтониана и дополнительного интеграла (см. стр. 12 автореферата);

- доказано, что поток векторного поля, отвечающего гамильтониану, неполон (см. параграф 2.5 диссертации).

Теоретическая и практическая значимость

Полученные в работе результаты имеют теоретическое значение. Предложены методы доказательства полноты полиномиальных векторных полей, анализа топологии гамильтоновых систем с некомпактными поверхностями уровня, в том числе в случае неполноты потоков. Описанные примеры систем с некомпактными особенностями могут быть полезны для построения теории некомпактных особенностей.

Апробация

Основные положения диссертационной работы докладывались

- на конференции «Александровские чтения» (Москва, с 30 мая по 02 июня 2006 г.);

- на конференции «Ломоносовские чтения» (Москва, с 17 по 27 апреля 2006 г.);

- на международной конференции «Differential and Functional Differential Equations 2008» (Москва, с 17 по 24 августа 2008 г.);

- на семинаре в Университете г. Бохум (Германия, май 2008 г.);

- на конференции «Ломоносов» (Москва, с 11 по 15 апреля 2011 г.);

- на семинаре имени В. В. Румянцева по аналитической механике и теории устойчивости под руководством чл.-корр. РАН В. В. Белецкого и проф. А. В. Карапетяна (Москва, 23 октября 2013 г.);

- неоднократно на семинаре «Современные геометрические методы» под руководством акад. А. Т. Фоменко и проф. А. С. Мищенко (мехмат МГУ имени М. В. Ломоносова).

Публикации

По теме диссертации опубликовано 5 печатных работ [1–5], из них 2 в изданиях по перечню ВАК. Работ, написанных в соавторстве, нет.

Объем и структура работы

Диссертация состоит из введения и двух глав. Список использованной литературы содержит 32 наименования. Текст диссертации содержит 106 страниц.

Постановка задачи

Пусть $\mathfrak{g}$ – конечномерная алгебра Ли с базисом $e_1, \ldots, e_n$, а $\mathfrak{g}^\star$ – соответствующая коалгебра с дуальным базисом $\epsilon^1, \ldots, \epsilon^n$, то есть $\epsilon^i(e_j) = \delta^i_j$. Пусть $x_1, \ldots, x_n$ – аффинные координаты на $\mathfrak{g}^\star$, соответствующие базису $e_1, \cdots, e_n$, а c^k_{ij} – структурные константы алгебры Ли $\mathfrak{g}$: $[e_i, e_j] = c^k_{ij} e_k$.

Определение 13. *Скобка Пуассона-Ли на пространстве $\mathfrak{g}^\star$ задается следующей формулой:*

$$\{f, g\}(x) = c_{ij}^k x_k \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial g}{\partial x_j},$$

где f и g - гладкие функции на $\mathfrak{g}^\star$.

Определение 14. *Уравнения*

$$\dot{x}_i = \{x_i, H\},$$

задающие динамическую систему на $\mathfrak{g}^\star$, где H – гладкая функция (гамильтониан) на $\mathfrak{g}^\star$, называются уравнениями Эйлера на коалгебре Ли $\mathfrak{g}^\star$.

Они часто встречаются в механике и физике. Например, различные задачи о движении твердого тела задаются уравнениями Эйлера на коалгебре Ли $\mathrm{e}(3)^\star$.

Определение 15. *Функции, принадлежащие ядру скобки Пуассона-Ли, называются функциями Казимира.*

Рассмотрим следующее семейство скобок Пуассона-Ли на пространстве $\mathbb{R}^6$:

$$\{S_i, S_j\} = \varepsilon_{ijk} S_k, \quad \{S_i, R_j\} = \varepsilon_{ijk} R_k, \quad \{R_i, R_j\} = \varkappa \varepsilon_{ijk} S_k,$$

где S_i и R_i – компоненты трехмерных векторов S и R, ε_{ijk} – знак перестановки $(123) \to (ijk)$, а $\varkappa$ – произвольное действительное число. При $\varkappa > 0 \quad (\varkappa = 1)$ получаем, что скобка соответствует алгебре Ли $\mathrm{so}(4)$, при $\varkappa = 0$ – алгебре Ли $\mathrm{e}(3)$, а при $\varkappa < 0 \quad (\varkappa = -1)$ – алгебре Ли $\mathrm{so}(3,1)$. Функции Казимира:

$$f_1 = \varkappa S^2 + R^2, \quad f_2 = \langle S, R \rangle,$$

где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – скалярное произведение в $\mathbb{R}^3$.

Рассмотрим гамильтонианы вида

$$H = \langle AS, S \rangle + \langle b, S \times R \rangle,$$

где A – постоянная симметричная матрица, $b \neq 0$ – постоянный вектор, $\times$ - векторное произведение.

Новые интегрируемые случаи уравнений Эйлера с квадратичным гамильтонианом и интегралом четвертой степени на этом семействе алгебр Ли были найдены А. В. Борисовым, И. С. Мамаевым и В. В. Соколовым[12].

Случай Соколова:

$$H_1 = -\frac{\varkappa}{\alpha}S_1^2 + \alpha S_2^2 + S_1R_2 - S_2R_1,$$
$$K_1 = Q_3(\varkappa S^2 - R^2) - \alpha Q_1^2 + \frac{\varkappa}{\alpha}Q_2^2 + (\frac{\varkappa}{\alpha} - \alpha)Q_3^2\,, \text{ где } Q = S \times R.$$

Случай Борисова-Мамаева:

$$H_2 = (\alpha - \frac{\varkappa}{4\alpha})S_1^2 + 2\alpha S_2^2 + \alpha S_3^2 + S_1R_2 - S_2R_1,$$
$$K_2 = 4\alpha^2 S_2^2 S^2 + 4\alpha S_2(S_2Q_3 - S_3Q_2) + Q_2^2 + Q_3^2 - S_1^2R^2\,, \text{ где } Q = S \times R.$$

Можно считать, что $\varkappa$ равно 1, -1 или 0. Действительно, замена $R' = \frac{1}{\sqrt{|\varkappa|}}R$ и $\alpha' = \frac{\alpha}{\sqrt{|\varkappa|}}$, при $\varkappa \neq 0$, приводит нас к этому случаю.

Как известно[13], ограничение скобки Пуассона-Ли на орбиты общего положения коприсоединенного представления соответствующей группы Ли задает гамильтонову систему на $M^4_{c,g} = \{\, (S,R) \mid f_1(S,R) = c, f_2(S,R) = g \,\}, c \neq 0$. В нашем случае можно считать, что $c = \pm 1$. Действительно, замена $S = \sqrt{|c|}S'$, $R = \sqrt{|c|}R'$ приводит нас к этому случаю, при этом векторное поле $sgrad\, H$ просто умножается на $\sqrt{|c|}^3$. Здесь существенно, что гамильтониан является однородным. Поэтому в этой работе мы считаем, что $c = 1$.

Кроме того, следуя работе А. А. Ошемкова и Г. Хагигатдуста[14] , без ограничения общности можно полагать, что $g \geqslant 0$, поскольку при замене

$$(S_1, S_2, S_3, R_1, R_2, R_3) \to (-S_1, S_2, S_3, R_1, -R_2, -R_3)$$

f_1, H, K сохраняются, f_2 меняет знак.

[12] см. А. В. Борисов, И. С. Мамаев, В. В. Соколов, “Новый интегрируемый случай на so(4)”, *Докл. РАН*, **381**:5 (2001), 614–615,

В. В. Соколов, “Об одном классе квадратичных гамильтонианов на so(4)”, *Докл. РАН*, **394**:5 (2004), 602–605,

В. В. Соколов, “Новый интегрируемый случай для уравнений Кирхгофа”, *ТМФ*, **129**:1 (2001), 31–37

[13] см., например, В. В. Трофимов, А. Т. Фоменко, Алгебра и геометрия интегрируемых гамильтоновых систем дифференциальных уравнений, Москва-Ижевск: Факториал и изд-во Просперус Удмуртского ун-та, 1995

[14] см. Г. Хагигатдуст, А. А. Ошемков, “Топология слоения Лиувилля для интегрируемого случая Соколова на алгебре Ли so(4)”, *Матем. сб.*, **200**:6 (2009), 119–142

Далее можно считать, что $\alpha > 0$, так как замена $S_1 \to -S_1$, $R_1 \to -R_1$, $\alpha \to -\alpha$ приводит нас к этому случаю.

Как и в работе А. А. Ошемкова и Г. Хагигатдуста[14], при $\varkappa > 0$ можно исследовать только случай $0 < \alpha \leqslant \sqrt{\varkappa}$, так как при замене $S_1 \leftrightarrow S_2$, $R_1 \leftrightarrow R_2$, $\alpha \to \dfrac{\varkappa}{\alpha}$ инварианты f_1, f_2 сохраняются, а гамильтониан и дополнительный интеграл меняют знак (что не влияет на топологию).

Под изучением системы мы понимаем исследование слоения Лиувилля, слоями которого являются связные компоненты совместных поверхностей уровня гамильтониана и дополнительного интеграла. Слоение Лиувилля случая Борисова-Мамаева на e(3) исследовано в работе П. Е. Рябова[7], где указанный случай назван случаем Соколова. Лиувиллево слоение интегрируемой системы Соколова на алгебре Ли so(4) описано в работе А. А. Ошемкова и Г. Хагигатдуста[14], а также в работах Г. Хагигатдуста[15]. В настоящей работе мы будем изучать строение интегрируемого случая Соколова на оставшихся в указанном семействе некомпактных алгебрах Ли e(3) и so(3, 1).

Содержание работы

Во **Введении** приводится постановка задачи, кратко излагаются необходимые понятия, дается обзор полученных результатов.

Глава 1 состоит из 8 параграфов и содержит исследование случая Соколова на e(3).

В первом параграфе кратко излагаются полученные в **Главе 1** результаты.

Во втором параграфе находятся бифуркационные значения гамильтониана. Основной результат параграфа – следующее

Утверждение 1.2.3. *Бифуркационные значения гамильтониана случая Соколова на* e(3) *(при* $\varkappa = 0$*) являются следующими кривыми на плоскости* (g, h)*:*

1. $h = 0$, $g \in \mathbb{R}$*;*

[15]см. Г. Хагигатдуст, “Бифуркационная диаграмма некоторого класса гамильтонианов на алгебре so(4)”, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, 6 (2005), 3–10,
Г. Хагигатдуст, “Топология изоэнергетических поверхностей для интегрируемого случая Соколова на алгебре Ли so(4)”, *Докл. РАН*, **401**:5 (2005), 599–602

2. $h = \dfrac{4\alpha^2 g^2 - 1}{4\alpha}$*,* $g \in \mathbb{R}$*;*

3. $h = -\dfrac{1}{4\alpha}$*,* $g \in \mathbb{R}$*,*

причем точки вида $1-2$ *являются критическими значениями, а точки вида* 3 *– некритическими бифуркационными значениями.*

Третий параграф посвящен исследованию топологического типа изоэнергетической поверхности уровня гамильтониана. Доказывается следующая

Теорема 2. *Топология изоэнергетической поверхности уровня* $Q^3_{g,h}$ *случая Соколова на* e(3) *при регулярных, то есть не принадлежащих бифуркационным значениям гамильтониана* H*,* (g,h) *имеет следующий тип:*

1. $2\mathbb{R}^3$ *при* $h < -\dfrac{1}{4\alpha}$*;*

2. Двумерный диск с тремя дырками, умноженный на $\mathbb{R}$*, при* $h > -\dfrac{1}{4\alpha}$*,* $h \neq \dfrac{4\alpha^2 g^2 - 1}{4\alpha}$*,* $h \neq 0$*.*

В четвертом параграфе находится бифуркационная диаграмма отображения момента для случая Соколова на e(3). В нем доказана следующая

Теорема 5. *Бифуркационная диаграмма отображения момента случая Соколова на* e(3) *состоит из следующих кривых:*

1) луча $k = -h + \alpha g^2$*,* $h \geqslant \dfrac{4\alpha^2 g^2 - 1}{4\alpha}$*,*

при этом в прообразе получаются 2 *критические окружности;*

2) параболы $k = -\alpha h^2 - h$*,* $h \in \mathbb{R}$*,*

при этом в прообразе 2 *критические прямые;*

3) отрезка $k = \dfrac{1}{4\alpha}$*,* $-\dfrac{1}{2\alpha} \leqslant h \leqslant \dfrac{4\alpha^2 g^2 - 1}{4\alpha}$*,*

при $h < -\dfrac{1}{4\alpha}$ *в прообразе будут* 4 *критические прямые, а при* $h > -\dfrac{1}{4\alpha}$ *–* 2 *критические окружности;*

4) луча $k = -h$*,* $h \geqslant -\dfrac{1}{4\alpha}$*.*

При этом типы $(1-3)$ *являются критическими значениями, а тип* 4 *– некритическими бифуркационными значениями.*

Пятый параграф посвящен вычислению индексов критических точек. Его результатом является следующее

Утверждение 1.5.1. *Индексы критических точек случая Соколова на* e(3) *имеют следующий тип:*

1. Прообразы кривой $k = -\alpha h^2 - h$, $h < -\dfrac{1}{2\alpha}$ *имеют индекс 2;*

2. Прообразы кривой $k = -\alpha h^2 - h$, $h > -\dfrac{1}{2\alpha}$ *имеют индекс 1;*

3. Прообразы кривой $k = -h + \alpha g^2$, $h > \dfrac{4\alpha^2 g^2 - 1}{4\alpha}$ *имеют индекс 2;*

4. Прообразы кривой $k = \dfrac{1}{4\alpha}$, $-\dfrac{1}{2\alpha} < h < \dfrac{4\alpha^2 g^2 - 1}{4\alpha}$ *имеют индекс 2.*

В шестом параграфе доказывается полнота векторных полей $\operatorname{sgrad} H$ и $\operatorname{sgrad} K$.

В седьмом параграфе исследуется топологический тип совместной поверхности уровня гамильтониана H и дополнительного интеграла K. Его основной результат – следующая

Теорема 6. *При регулярных, то есть не принадлежащих бифуркационной диаграмме для отображения момента,* (h, k) *совместная поверхность уровня* H *и* K *для случая Соколова на* $\mathrm{e}(3)$ *имеет следующий тип:*

1. Пустое множество над верхней границей бифуркационной диаграммы;

2. Два цилиндра под параболой $k = -\alpha h^2 - h$*;*

3. Четыре цилиндра над параболой $k = -\alpha h^2 - h$*, но под лучом* $k = -h$*;*

4. Два тора над лучом $k = -h$*, но под лучом* $k = -h + \alpha g^2$*.*

Восьмой параграф посвящен описанию перестроек случая Соколова на $\mathrm{e}(3)$.

Глава 2 посвящена исследованию случая Соколова на $\mathrm{so}(3,1)$ и состоит из семи параграфов.

В первом параграфе кратко излагаются полученные в **Главе 2** результаты.

Во втором параграфе находятся бифуркационные значения гамильтониана. Основной результат – следующее

Утверждение 2.2.3. *Бифуркационные значения гамильтониана случая Соколова на* $\mathrm{so}(3,1)$ *(при* $\varkappa < 0$*) являются следующими кривыми на плоскости* (g, h)*:*

1. $h = 0$, $g \in \mathbb{R}$*;*

2. $h = \dfrac{\alpha - \sqrt{(\alpha^2 + \varkappa)(1 - 4\varkappa g^2)}}{2\varkappa}$, $g \in \mathbb{R}$,

причем эти точки являются критическими значениями.

В третьем параграфе находится топологический тип изоэнергетической поверхности уровня гамильтониана. Доказана следующая

Теорема 7. *Изоэнергетическая поверхность* $Q^3_{g,h}$ *для гамильтониана случая Соколова на* $\mathrm{so}(3,1)$, $h \neq 0$, $h \neq \dfrac{\alpha - \sqrt{(\alpha^2+\varkappa)(1-4\varkappa g^2)}}{2\varkappa}$, *диффеоморфна открытому двумерному диску с 3 дырками, умноженному на* $\mathbb{R}$

Четверный параграф посвящен нахождению бифуркационной диаграммы отображения момента. В нем доказана следующая

Теорема 8. *Бифуркационная диаграмма отображения момента случая Соколова на* $\mathrm{so}(3,1)$ *состоит из следующих кусков:*

1) куска параболы $k = \frac{\varkappa}{\alpha}h^2 - h + \alpha g^2$, $h \geqslant \dfrac{\alpha - \sqrt{(\alpha^2+\varkappa)(1-4\varkappa g^2)}}{2\varkappa}$,
при этом в прообразе получаются 2 критические окружности $(0, S_2, 0, Q_1, 0, Q_3)$.

2) параболы $k = -\alpha h^2 - h - \dfrac{\varkappa g^2}{\alpha}$, $h \in \mathbb{R}$,
при этом в прообразе 2 критические прямые $(S_1, 0, 0, 0, Q_2, Q_3)$.

3) отрезка $k = \dfrac{1-4\varkappa g^2}{4\alpha}$, $-\dfrac{1}{2\alpha} \leqslant h \leqslant \dfrac{\alpha - \sqrt{(\alpha^2+\varkappa)(1-4\varkappa g^2)}}{2\varkappa}$,
при этом в прообразе будут 2 критические окружности $(S_1, S_2, S_3, 0, Q_2, \dfrac{q}{2\alpha})$.

4) изолированной особой точки $h = k = 0$.

В пятом параграфе доказано, что гамильтоново векторное поле случая Соколова на $\mathrm{so}(3,1)$ неполно.

В шестом параграфе вычисляются индексы критических точек. Доказано следующее

Утверждение 2.6.1. *Индексы критических точек случая Соколова на* $\mathrm{so}(3,1)$ *имеют следующий тип:*

1. Прообразы кривой $k = -\alpha h^2 - h - \dfrac{\varkappa g^2}{\alpha}$, $h < -\dfrac{1}{2\alpha}$ *имеют индекс 2;*

2. Прообразы кривой $k = -\alpha h^2 - h - \dfrac{\varkappa g^2}{\alpha}$, $h > -\dfrac{1}{2\alpha}$ *имеют индекс 1;*

3. Прообразы кривой $k = \frac{\varkappa}{\alpha}h^2 - h + \alpha g^2$, $h > \dfrac{\alpha - \sqrt{(\alpha^2+\varkappa)(1-4\varkappa g^2)}}{2\varkappa}$ *имеют индекс 2;*

4. Прообразы кривой $k = \dfrac{1-4\varkappa g^2}{4\alpha}$, $-\dfrac{1}{2\alpha} < h < \dfrac{\alpha - \sqrt{(\alpha^2+\varkappa)(1-4\varkappa g^2)}}{2\varkappa}$ *имеют индекс 2.*

В седьмом параграфе найден топологический тип совместной поверхности уровня гамильтониана H и дополнительного интеграла K. Доказана следующая

Теорема 9. *При регулярных, то есть не принадлежащих бифуркационной диаграмме для отображения момента, (h, k) совместная поверхность уровня H и K случая Соколова на $\mathrm{so}(3,1)$ имеет следующий тип:*

1. Пустое множество при $k > -\alpha h^2 - h - \frac{\varkappa}{\alpha} g^2$ и $h < -\frac{1}{2\alpha}$, пустое множество при $k > \dfrac{1 - 4\varkappa g^2}{4\alpha}$, пустое множество при $k > \frac{\varkappa}{\alpha} h^2 - h + \alpha g^2$;

2. Две двумерные сферы с четырьмя проколами каждая при $k < -\alpha h^2 - h - \frac{\varkappa}{\alpha} g^2$, $(h, k) \neq (0, 0)$ при $g \neq 0$;

3. Два двумерных тора при $k > -\alpha h^2 - h - \frac{\varkappa}{\alpha} g^2$ и $k < \frac{\varkappa}{\alpha} h^2 - h + \alpha g^2$.

Основные результаты работы

Основные результаты диссертационной работы заключаются в следующем:

1. для случая Соколова на $\mathrm{e}(3)$ и $\mathrm{so}(3,1)$ найден топологический тип изоэнергетических поверхностей уровня гамильтониана;

2. для случая Соколова на $\mathrm{e}(3)$ и $\mathrm{so}(3,1)$ вычислены индексы критических точек дополнительного интеграла на изоэнергетических поверхностях;

3. для случая Соколова на $\mathrm{e}(3)$ и $\mathrm{so}(3,1)$ построены бифуркационные диаграммы отображения момента;

4. для случая Соколова на $\mathrm{e}(3)$ и $\mathrm{so}(3,1)$ найден топологический тип совместных поверхностей уровня гамильтониана и дополнительного интеграла.

Благодарности

Автор выражает глубокую благодарность академику РАН, профессору А. Т. Фоменко и д. ф.-м. н., профессору А. А. Ошемкову за постановку задачи, постоянное внимание и помощь. Кроме того, хотелось бы выразить признательность д. ф.-м. н., профессору М. П. Харламову за ценные обсуждения и поддержку. Без помощи указанных людей эта работа никогда бы не была написана.

Работы автора по теме диссертации

[1] Д. В. Новиков, “Топологические особенности интегрируемого случая Соколова на алгебре Ли e(3)”, *Матем. сб.*, **202**:5 (2011), 127–160

[2] Д. В. Новиков, “Топология изоэнергетических поверхностей для интегрируемого случая Соколова на алгебре Ли so(3, 1)”, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем. Мех.*, 4 (2011), 62–64

[3] Д. В. Новиков, “Топология новых интегрируемых случаев на алгебрах Ли so(5), so(3, 1), and e(3)”, Тезисы международной конференции по дифференциальным и функциональным дифференциальным уравнениям (DFDE), 2008, 110–111

[4] Д. В. Новиков, “Топологические особенности новых интегрируемых случаев”, Тезисы конференции «Александровские чтения», 2006

[5] Д. В. Новиков, “Топологический анализ интегрируемого случая Соколова”, Материалы конференции «Ломоносов-2011», 2011