**ФГБОУ ВПО
«МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ имени М. В. ЛОМОНОСОВА»**

на правах рукописи

Стрелкова Наталия Павловна

МИНИМАЛЬНЫЕ СЕТИ НА ПОВЕРХНОСТЯХ МНОГОГРАННИКОВ

01.01.04 — геометрия и топология

**АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук**

МОСКВА 2013

Работа выполнена на кафедре дифференциальной геометрии и приложений Механико-математического факультета ФГБОУ ВПО «Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова»

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук, профессор **Тужилин Алексей Августинович**
Официальные оппоненты:	**Гайфуллин Александр Александрович**, доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник (ФГБУН «Математический институт им. В. А. Стеклова Российской академии наук», отдел геометрии и топологии)
	Акопян Арсений Владимирович, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник (ФГБУН «Институт проблем передачи информации им. А. А. Харкевича Российской академии наук», лаборатория № 4)
Ведущая организация:	ФГБУН «Институт математики им. С. Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук»

Защита диссертации состоится 20 декабря 2013 г. в 16^{45} на заседании диссертационного совета Д 501.001.84 на базе ФГБОУ ВПО «Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова» по адресу: 119991, ГСП-1, Москва, Ленинские горы, МГУ, Механико-математический факультет, аудитория 14-08.

С диссертацией можно ознакомиться в Фундаментальной библиотеке ФГБОУ ВПО «Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова» (Москва, Ломоносовский проспект, дом 27, сектор А, 8 этаж).
Автореферат разослан 20 ноября 2013 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
Д 501.001.84 на базе ФГБОУ ВПО МГУ — А. О. Иванов
доктор физико-математических наук,
профессор

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы.

Диссертация посвящена теории экстремальных сетей (это «разветвлённый» аналог геодезических) — одному из активно развивающихся разделов геометрии и топологии. Исследуются геометрические свойства замкнутых локально минимальных сетей на поверхностях выпуклых многогранников и задача описания класса выпуклых многогранников, на поверхности которых существуют такие сети (глава 3). При изучении замкнутых локально минимальных сетей на многогранниках возник естественный вопрос об устойчивости таких сетей. Ответить на этот вопрос удалось в гораздо большей общности — в диссертации доказана теорема об устойчивости локально минимальных сетей в пространствах неположительной кривизны в смысле А.Д. Александрова (глава 2). В дальнейшем замкнутые локально минимальные сети на многогранниках мы будем, для краткости, часто называть просто *минимальными сетями*.

Сетью мы называем геометрическую реализацию (абстрактного) графа, т. е. представление вершин графа точками некоторого пространства, а ребер — кривыми, соединяющими соответствующие точки. Локально минимальные сети представляют собой один из вариантов обобщения понятия геодезической на «разветвлённый» случай. А именно, неформально говоря, сеть называется локально минимальной, если любой её достаточно малый фрагмент является кратчайшей сетью. Локально минимальные сети с границей в евклидовом пространстве возникают при изучении кратчайших сетей (называемых также минимальными деревьями Штейнера).

Кратчайшие и локально минимальные сети. Поиск кратчайшей сети, соединяющей данное множество точек в некотором пространстве — одна из классических задач теории экстремальных сетей, см., например, обзоры в [1,2,3]. Неформально говоря, речь идёт о поиске кратчайшей связной системы дорог, соединяющей данные города, называемые «граничны-

[1] Hwang F. K., Richards D., Winter P. *The Steiners Tree Problem.* // Elsevier Science Publishers. 1992.

[2] Иванов А.О., Тужилин А.А. *Разветвленные геодезические. Геометрическая теория локально минимальных сетей* // Российские математические и научные исследования, Эдвин-Меллен Пресс, 1999. — Т. 5.

[3] А. О. Иванов, А. А. Тужилин, *Геометрия минимальных сетей и одномерная проблема Плато* // УМН. — 1992. — **47**:2(284) — С. 53–115.

ми точками» для искомой кратчайшей сети. При этом дороги не обязаны начинаться и заканчиваться в данных городах, т.е. система дорог может содержать помимо исходных городов (граничных точек) дополнительные перекрёстки (внутренние вершины сети). Задача построения кратчайшей сети в $\mathbb{R}^d$, соединяющей данные n точек, является NP-трудной для всех $d \geqslant 2$ [4]. Очевидно, что кратчайшая сеть не имеет циклов, т.е. является деревом. Несложно доказать следующие локальные свойства кратчайших сетей в евклидовых пространствах: (1) рёбра являются отрезками, (2) вершины имеют степень 1, 2 или 3, (3) в вершинах степени 3 рёбра стыкуются под углами по 120°, а в вершинах степени 2 — под углами не меньше 120° [5]. Эти локальные свойства легко проверить для данной сети и легко строить сети с такими свойствами, но выполнение этих свойств не гарантирует, что сеть является кратчайшей. Можно утверждать лишь, что сеть, обладающая свойствами (1)–(3), является локально минимальной. Существующие алгоритмы точного построения кратчайшей сети в $\mathbb{R}^d$ основаны на построении всевозможных локально минимальных деревьев, соединяющих данное множество точек, и выборе среди них дерева наименьшей длины. При этом экспоненциальная сложность этих алгоритмов обусловлена перебором всевозможных комбинаторных структур локально минимальных деревьев. А для заданной комбинаторной структуры локально минимальное дерево в $\mathbb{R}^d$ с данной границей если существует, то единственно [6], и в случае плоскости его построение может быть выполнено за линейное время с помощью предложенного Хвангом алгоритма [7], представляющего собой улучшение алгоритма Мелзака [8].

Например, для вершин прямоугольника, изображённого на рис. 1, существуют две локально минимальные сети. Пунктирная сеть — короче, она и является кратчайшей сетью, соединяющей четыре данные точки.

---

[4]M. R. Garey, R. L. Graham and D. S. Johnson. Some NP-complete geometric problems. // Proc. 8th Ann. Symp. Theory Comput. — 1976 — P. 10–22.

[5]GilPo68

[6] E. N. Gilbert and H. O. Pollak. *Steiner minimal trees.* // SIAM J. Appl. Math. — 1968 — **16** № 1 — P. 1–29.

[7]Hwang F. K. *A linear time algorithm for full Steiner trees* // Oper. Res. Letter. — 1986. V. 5. — P. 235–237.

[8]Z. A. Melzak. *On the problem of Steiner.* // Canad. Math. Bulletin — 1961 — **4** — P. 143–148.

Кратчайшие сети, а в связи с ними и локально минимальные сети, возникают в приложениях и активно исследуются не только в $\mathbb{R}^d$, но и в других пространствах (см., например, обзор [1]), в том числе на римановых многообразиях [2] и в пространствах ограниченной кривизны в смысле А.Д. Александрова [9,10]. Имеет место следующий критерий [2].

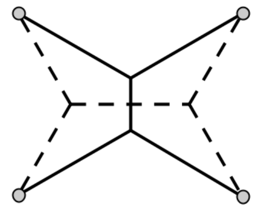


Рис. 1: Две локально минимальные сети, затягивающие вершины прямоугольника.

Теорема 1. *Сеть* Γ *на римановом многообразии локально минимальна тогда и только тогда, когда она (возможно, после перепараметризации) удовлетворяет следующим условиям:*
(1) все ребра — геодезические,
(2) углы между соседними ребрами не меньше $120°$,
(3) все вершины степени 1 *— граничные,*
(4) во всех внутренних вершинах степени 2 *угол между ребрами равен* $180°$.

Устойчивость локально минимальных сетей. В главе 2 диссертации доказывается устойчивость локально минимальных сетей в пространствах А.Д. Александрова неположительной кривизны. Так же, как и в случае геодезических, локально минимальная сеть вообще говоря может допускать глобальную деформацию, уменьшающую ее длину (пример — некратчайшая геодезическая на сфере). Однако известно, что на римановых многообразиях неположительной секционной кривизны (и вообще в пространствах А. Д. Александрова неположительной кривизны) длина геодезической не может быть уменьшена никакой деформацией. Мы докажем, что тем же самым свойством во всех пространствах А. Д. Александрова неположительной кривизны обладают и локально минимальные сети. Этот результат, с одной стороны, обобщает соответствующие результаты о геодезических в таких пространствах, с другой стороны, тесно связан с теоремой о единственности локально минимальных сетей на римановых много-

[9] N. Innami and S. Naya *A comparison theorem for Steiner minimum trees in surfaces with curvature bounded below* // Tohoku Math. J. — 2013 — V. 65 № 1 — P. 131–157.

[10] Dahl J. *Steiner problems in optimal transport.* // Trans. Am. Math. Soc. — 2011 — **363** № 4 — P. 1805–1819.

образиях отрицательной секционной кривизны, доказанной Прониным [11]. В случае евклидовой плоскости результат, аналогичный доказываемому в диссертации, был установлен в [12].

Помимо рассматривавшихся Прониным [11] параметрических деформаций, сохраняющих комбинаторную структуру сети, мы будем рассматривать и деформации, в процессе которых комбинаторная структура может меняться, и докажем, что у локально минимальной сети в пространстве А. Д. Александрова неположительной кривизны существует окрестность, в которой ее нельзя укоротить и деформациями этого второго вида. Отсюда вытекает, что в пространстве А. Д. Александрова неположительной кривизны всякое локально минимальное дерево является кратчайшим среди сетей, содержащихся в некоторой его малой односвязной окрестности.

Замкнутые локальные минимальные сети. Главная цель диссертации — изучение свойств замкнутых локально минимальных сетей на поверхностях выпуклых многогранников. Слово «замкнутая» в этом названии имеет тот же смысл, что и в словосочетании «замкнутая геодезическая», т.е. в отличие от кратчайших сетей и произвольных локально минимальных сетей, рассматривавшихся в главе 2, замкнутая локально минимальная сеть не имеет граничных точек. Из цитировавшегося выше критерия локальной минимальности сети на римановом многообразии вытекает, что замкнутая локально минимальная сеть на многообразии (а так же и на поверхности выпуклого многогранника) — это сеть, все вершины которой имеют степень 3, а рёбра являются геодезическими и стыкуются в вершинах под углами ровно в 120 градусов.

Замкнутые локально минимальные сети на сфере возникают при изучении особенностей мыльных плёнок. А именно, при доказательстве принципов Плато, описывающих эти особенности [13], используется классификация замкнутых локально минимальных сетей на сфере, представляющая собой

[11] Пронин М.В. *Локально минимальные сети на римановых многообразиях отрицательной секционной кривизны* // Вестник Моск. ун-та. Матем. Механ. — 1998. — №5. — С. 12–16.

[12] Иванов А.О., Тужилин А.А. *Геометрия множества минимальных сетей данной топологии с фиксированной границей* // Изв. РАН. Сер. матем. — 1997. — **61**. №6. — С. 119–152.

[13] J.E. Taylor, *The struture of singularities in soap-buble-like and soap-film-like minimal surfaces* // Annals of Mathematics — 1976 — **103** — P. 489–539.

часть классификации «геодезических сетей с одинаково устроенными вершинами» на сфере, сделанной в работе [14].

Помимо сферы, замкнутые локально минимальные сети были классифицированы на поверхностях плоских торов [15]. С помощью двулистных накрытий классификация сетей со сферы и плоских торов переносится на проективную плоскость [16] , поверхности равногранных тетраэдров [17] и на бутылки Клейна с плоской метрикой [16]. Известны также примеры замкнутых локально минимальных сетей на поверхностях постоянной отрицательной кривизны и на правильных многогранниках (поверхностях платоновых тел) [16].

Результаты главы 2 показывают, что замкнутая локально минимальная сеть на поверхности выпуклого многогранника имеет следующий физический смысл. Её можно представлять себе как сеть, сделанную из эластичного материала, допускающего расщепления в вершинах, и натянутую на многогранник так, что она «не соскальзывает» с его поверхности.

Результаты о свойствах замкнутых локально минимальных сетей на произвольных выпуклых многогранниках, полученные в диссертации, являются, с одной стороны, продолжением исследования таких сетей в локально плоских пространствах. С другой стороны, рассматриваемая задача является обобщением задачи о замкнутых геодезических и квазигеодезических на выпуклых поверхностях [18,19,20].

Отметим, что один из основных вопросов, рассматриваемых в диссертации — о существовании замкнутой минимальной сети на данном многограннике — открыт уже в случае, когда в качестве замкнутой локально

[14] A.Heppes. *Isogonal spherischen netze* // Ann. Univ. Sci., Budapest, Sect. Math. — 1964 — **7** — P. 41–48.

[15] И. В. Птицына, А. О. Иванов, А. А. Тужилин *Классификация замкнутых минимальных сетей на плоских двумерных торах* // Матем. сб. — 1992 – **183** №12 — с. 3–44.

[16] А. О. Иванов, А. А. Тужилин, *Теория экстремальных сетей* // Москва-Ижевск, Институт компьютерных исследований, 2003.

[17] И. В. Птицына *Классификация замкнутых локально минимальных сетей на тетраэдрах* // Матем. сб. — 1994 — **185** №5 — С. 119–138.

[18] А. Д. Александров *Внутренняя геометрия выпуклых поверхностей* ОГИЗ, Москва–Ленинград, 1948.

[19] А. В. Погорелов *Квази-геодезические линии на выпуклой поверхности* // Матем. сб. — 1949. — **25**(67):2 — С. 275–306.

[20] Galperin G. *Convex polyhedra without simple closed geodesics.* // Regul. Chaotic Dyn. — 2003 — **8** №1 — P. 45-58.

минимальной сети рассматривается замкнутая геодезическая, а в качестве многогранника — (неравногранный) тетраэдр [21].

С комбинаторной точки зрения замкнутая локально минимальная сеть на выпуклом многограннике представляет собой 3-валентный плоский граф, все грани которого не более чем шестиугольные. Существует богатая литература, посвящённая изучению (с комбинаторной точки зрения) таких графов на сфере, и двойственных к ним графов, т.е. триангуляций сферы, а также вложений различных регулярных (т.е. с заданными ограничениями на степени вершин и граней) графов в другие поверхности [22,23]. Интерес к этой теме связан в том числе и с большим числом приложений в химии, кристаллографии и других естественных науках. Упомянем один из наиболее популярных случаев: 3-валентные графы на сфере, имеющие только пяти- и шестиугольные грани, в химии называются фуллеренами и используются для моделирования молекулярных структур [24].

Для нас интересно, что при изучении и классификации (с комбинаторной точки зрения) вложений регулярных графов в поверхности часто используются различные геометрические реализации таких графов. Например, Тёрстон [25] для классификации комбинаторных триангуляций сферы использует локально плоские комплексы, склеенные из одинаковых правильных треугольников по правилам, задаваемым данной триангуляцией сферы, и в результате параметризует триангуляции сферы наборами из 20 целых чисел. Целый ряд параметризаций регулярных графов (в том числе обобщения идей Тёрстона) описаны в работе [26]. А упоминавшаяся выше классификация замкнутых локально минимальных сетей на плоских торах почти ничем не отличается от комбинаторной классификации вложений 3-

[21] В. Ю. Протасов, *Замкнутые геодезические на поверхности симплекса* // Матем. сб. — 2007 — **198**, №2 — С. 103–120.

[22] M. Deza, M. Dutour Sikirić *Geometry of chemical graphs. Polycycles and two-faced maps.* // Encyclopedia of Mathematics and its Applications — **119**. — Cambridge: Cambridge University Press, 2008.

[23] M. Deza, M. Dutour Sikirić, *Zigzag and central circuit structure of* $(\{1,2,3\},6)$*-spheres* // Taiwanese J. Math. — 2012 — **16** № 3 — P. 913–940.

[24] P.W. Fowler and D.E. Manolopoulos *An Atlas of Fullerenes* // Clarendon Press, Oxford. 1995.

[25] W.P. Thurston, *Shapes of polyhedra and triangulations of the sphere* // The Epstein birthday schrift, Geom. Topol. Monogr. — 1998 — **1** — P. 511–549.

[26] M. Dutour Sikirić, *Complex parametrization of triangulations on oriented maps* // Ars Mathematica Contemporanea — 2013. — №6. — P. 69–81.

валентных 6-регулярных (т.е. только с шестиугольными гранями) графов в тор, сделанной независимо в [27] и [28]: любой такой граф может быть реализован как замкнутая локально минимальная сеть на некотором плоском торе, только в случае сетей появляется вопрос о том, на каких именно (с точки зрения метрики) плоских торах реализуется минимальная сеть данной комбинаторной структуры.

В диссертации рассмотрена задача о реализации плоских графов как замкнутых локально минимальных сетей на выпуклых многогранниках и полностью описаны всевозможные комбинаторные структуры и длины рёбер, которые может иметь такая сеть.

В частном случае, когда все рёбра сети имеют одну и ту же длину, замнутые локально минимальные сети двойственны триангуляциям выпуклых многогранников на правильные треугольники, рассматривавшимся Тёрстоном [25]. Существенно, что изучение минимальных сетей не сводится к изучению таких триангуляций, в частности потому, что на многограннике может существовать минимальная сеть, но не существовать минимальной сети с равными длинами рёбер.

Цель работы.

Цель работы состоит в изучении геометрических свойств замкнутых локально минимальных сетей на поверхностях выпуклых многогранников и описании класса выпуклых многогранников, на поверхности которых существуют замкнутые локально минимальные сети.

Основные методы исследования.

В диссертации применяются методы геометрии и топологии. Используется техника работы с внутренней геометрией на поверхности выпуклых многогранников и методы теории пространств А.Д. Александрова неположительной кривизны.

Автором диссертации вводится новый подход к исследованию замкнутых локально минимальных сетей на выпуклых многогранниках, основан-

[27] A. Altshuler *Construction and enumeration of regular maps on the torus* // Discrete Math. — 1973 — V. 4, № 3 — P. 201–217.

[28] S. Negami, *Uniqueness and faithfullness of embedding of toroidal graphs* // Discrete Math. — 1983 — **44** — P. 161–180.

ный на рассмотрении системы разрезов и применении теорем А.Д. Александрова о выпуклых многогранниках.

Научная новизна.

Результаты диссертации являются новыми. В диссертации получены следующие основные результаты:

1. Доказана устойчивость локально минимальных сетей в пространствах Александрова неположительной кривизны (теорема 3, стр. 11 автореферата).

2. Получено новое необходимое условие существования замкнутой локально минимальной сети на многограннике. Показано, что это условие сильнее известного ранее необходимого условия, но по-прежнему не является достаточным (теоремы 17, 18, 19, стр. 14 автореферата).

3. Описаны всевозможные комбинаторые структуры и длины рёбер минимальных сетей на выпуклых многогранниках (теорема 7, стр. 13 автореферата).

4. Доказано существование простых замкнутых локально минимальных сетей на открытом всюду плотном подмножестве пространства выпуклых многогранников с кривизнами вершин, кратными 60 градусам (теорема 21, стр. 18 автореферата).

Апробация результатов.

Результаты диссертации докладывались на следующих семинарах и конференциях:

- семинаре «Современные геометрические методы» под руководством акад. А.Т. Фоменко, проф. А.С. Мищенко, проф. А.В. Болсинова, доц. А.А. Ошемкова, доц. Е.А. Кудрявцевой (МГУ, 11 ноября 2009 года)

- на международной конференции «Метрическая геометрия поверхностей и многогранников», посвященная 100-летию со дня рождения Н.В. Ефимова, (Москва, 20 августа 2010 года)

- на Международной научной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов-2011» (МГУ, 12 апреля 2011 года)
- на семинаре «Узлы и теория представлений» под руководством В.О. Мантурова, Д.П. Ильютко, И.М. Никонова (МГУ, 13 декабря 2011 года)
- на научной конференции «Ломоносовские чтения» (МГУ, 16 ноября 2011 года)
- на семинаре «По геометрии в целом» под руководством проф. И.Х. Сабитова (МГУ, 20 апреля 2012 года)
- на международной конференции «Александровские чтения» (МГУ, 23 мая 2012 года)
- на семинаре летней школы Международной лаборатории «Дискретная и вычислительная геометрия» им. Б.Н. Делоне (Ярославль–Красный холм, 30 июля 2012 года)
- семинаре «Дифференциальная геометрия и приложения» под руководством академика А.Т. Фоменко (МГУ, 11 марта 2013 года)
- на семинаре «Экстремальные сети» под руководством профессора А.О. Иванова и профессора А.А. Тужилина (МГУ, 2008–2013 гг.)

Публикации.

Основные результаты диссертации опубликованы в работах [1–4], список которых приведен в конце автореферата. Из этих работ первые три — в журналах из перечня ВАК.

Структура диссертации.

Диссертация объемом 84 страницы состоит из введения, трёх глав, разбитых на подразделы, и списка литературы из 39 наименований.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

В первой главе вводится понятие сети и локально минимальной сети, формулируются определения и предварительные результаты, необходимые для работы с этими объектами.

Обыкновенной сетью мы называем объединение образов конечного семейства вложенных спрямляемых кривых, попарно не имеющих общих точек, за исключением общих концов.

Сеть (сеть-отображение) типа G — это произвольное непрерывное отображение $\Gamma\colon T_G \to X$, где T_G — топологический граф, т.е. топологическое пространство, склеенное из отрезков в соответствии со структурой абстрактного графа G.

Интуитивно обыкновенные сети иногда удобно представлять себе как картинки, нарисованные на поверхности, а сети-отображения — как сети из нитей, натянутые на поверхность.

Во вложенном случае сеть-отображение и её образ (обыкновенная сеть) однозначно задают друг друга. При первом чтении результатов диссертации можно иметь в виду любое из этих двух определений сети.

Локально минимальная сеть — это, неформально говоря, сеть, любая достаточно малая часть которой является кратчайшей сетью.

Сеть Γ мы будем называть *ε-устойчивой*, если любая сеть, полученная из Γ деформацией внутри ε-окрестности образа сети Γ, имеет не меньшую длину, чем сеть Γ. При замене слов «не меньшую» на слово «большую» получается определение *строго ε-устойчивой сети*. Сеть (*строго*) *устойчива*, если она (строго) ε-устойчива для некоторого $\varepsilon > 0$.

Во второй главе рассматриваются пространства А.Д. Александрова неположительной кривизны. В разделе 2.1 сформулированы и прокомментированы две теоремы об устойчивости локально минимальных сетей в этих пространствах, а в разделе 2.2 даны доказательства этих теорем.

В разделе 2.1.1 формулируется теорема об устойчивости локально минимальных сетей в пространствах А.Д. Александрова неположительной кривизны. Легко доказать, что всякая устойчивая сеть в локально односвязном метрическом пространстве является локально минимальной. Обратное утверждение в общем случае неверно, например, всякая некратчайшая геодезическая на сфере не устойчива.

Теорема 3. *Локально минимальная сеть в полном пространстве неположительной кривизны в смысле А. Д. Александрова ∞-устойчива, а в пространстве строго отрицательной кривизны — строго ∞-устойчива. Локально минимальное дерево строго ∞-устойчиво в любом пространстве неположительной кривизны.*

Этот результат можно рассматривать как обобщение аналогичного факта для геодезических в пространствах неположительной кривизны.

Пронин [11] в случае полных римановых многообразий строго отрицательной кривизны доказал, что среди сетей, получающихся параметрической деформацией из данной сети, существует не более одной локально минимальной. Наше доказательство теоремы 3 очень во многом повторяет рассуждения Пронина [11]. По сути мы используем все те же соображения выпуклости метрики, но для пространств более общего вида. Однако наш результат и теорема из статьи [11] отличаются не только видом пространств, но и доказываемыми свойствами. Определим для компактных локально односвязных пространств два свойства.

Свойство A. Все локально минимальные сети в данном пространстве строго ∞-устойчивы.

Свойство B. В данном пространстве никакая локально минимальная сеть не может быть деформацией переведена в другую локально минимальную сеть.

Наша теорема 3 утверждает, что все пространства строго отрицательной кривизны обладают свойством A, а результат Пронина [11] по сути заключается в том, что все римановы многообразия строго отрицательной секционной кривизны обладают свойством B.

В диссертации показано, что из свойства A всегда вытекает свойство B. Возможно, обратная импликация тоже верна и свойства A и B равносильны, однако автору диссертации доказать этот факт не удалось.

В разделе 2.1.2 формулируется теорема об устойчивости относительно последовательности деформаций.

Третья глава посвящена замкнутым локально минимальным сетям на поверхностях выпуклых многогранников, которые мы для краткости называем **минимальными сетями**. Хотя замкнутые геодезические естественно считать частным случаем минимальных сетей, мы будем рассматривать лишь сети, отличные от замкнутой геодезической.

Используется следующее определение минимальной сети на выпуклом многограннике, эквивалентное общему определению замкнутой локально минимальной сети (несложное доказательство эквивалентности можно найти, например, в [16]).

Определение минимальной сети. *Минимальная сеть на выпуклом многограннике* — это связная сеть со следующими свойствами: (1) все её рёбра — геодезические, (2) каждая вершина имеет степень 3, (3) угол между смежными рёбрами равен 120°.

Полный угол вершины многогранника — это сумма углов граней многогранника при этой вершине. *Кривизной вершины многогранника* называется величина, равная 2π минус полный угол в этой вершине.

В разделе 3.1 даются определения и предварительные результаты, необходимые для работы с внутренней геометрией на поверхности выпуклых многогранников. В разделе 3.2 формулируются все результаты третьей главы. Там же приводятся комментарии и короткие доказательства. Более длинные доказательства вынесены в раздел 3.3.

Из дискретной формулы Гаусса-Бонне вытекает следующая лемма [16].

Лемма 3.5. *Для n-угольной ячейки минимальной сети сумма кривизн попавших в эту ячейку вершин многогранника равна*

$$\sum_v k(v) = 2\pi - \frac{\pi n}{3}.$$

Минимальная сеть на выпуклом многограннике состоит из не более чем шестиугольных ячеек. Шестиугольные ячейки не содержат вершин многогранника.

Из леммы легко вытекает следующее **необходимое условие на кривизны** многогранника.

Теорема 6. *Для того, чтобы на выпуклом многограннике существовала минимальная сеть, необходимо, чтобы множество V его вершин можно было разбить на несколько подмножеств $V = V_1 \sqcup \ldots \sqcup V_s$ так, что сумма кривизн вершин в каждом подмножестве V_i кратна $\frac{\pi}{3}$ и меньше 2π, т.е. равна одному из чисел $\frac{\pi k}{3}$, $k = 1, \ldots, 5$.*

В диссертации доказано, что это необходимое условие не является достаточным уже в случае тетраэдров (теорема 19 ниже).

Реализация плоских графов как минимальных сетей на многогранниках (раздел 3.2.2 диссертации). Если забыть про длины рёбер и углы между ними, то минимальная сеть на многограннике — это одна из возможных реализаций на сфере некоторого плоского графа. Попробуем пойти в обратном направлении. Рассмотрим произвольный плоский граф с вершинами степени 3 и не более чем шестиугольными гранями. Припишем каждому ребру некоторый вес — положительное число. Зададимся целью построить многогранник, на котором этот граф был бы реализован как минимальная сеть, длины рёбер которой равны весам соответствующих рёбер графа.

Теорема 7. *Для взвешенного плоского графа (G, w) существует выпуклый многогранник, на котором (G, w) реализуется как минимальная сеть, тогда и только тогда, когда (G, w) обладает свойствами:*

(1) *степень каждой вершины равна трём;*

(2) *всякая грань является не более чем шестиугольной;*

(3) $w(v_1v_2) + w(v_2v_3) = w(v_4v_5) + w(v_5v_6)$ *для любой нумерации* $v_1 \ldots v_6$ *последовательных вершин любой шестиугольной грани;*

(4) $w(v_1v_2) < w(v_2v_3) + 2w(v_3v_4) + w(v_4v_1)$ *для любой нумерации* $v_1 \ldots v_4$ *последовательных вершин любой четырёхугольной грани;*

(5) $w(v_1v_2) < w(v_3v_4) + w(v_4v_5)$ *для любой нумерации* $v_1 \ldots v_5$ *последовательных вершин любой пятиугольной грани.*

Здесь через $w(v_iv_j)$ обозначен вес ребра с концами v_i и v_j, входящего в рассматриваемую грань.

Для любого плоского графа G весовая функция, принимающая на каждом ребре значение 1, удовлетворяет условиям 3–5, откуда вытекает

Следствие 1. *Для всякого 3-валентного плоского графа G, все грани которого не более чем шестиугольные, существует выпуклый многогранник, на котором G реализуется как минимальная сеть.*

Система разрезов, новое необходимое условие (раздел 3.2.5 диссертации). В диссертации вводится понятие *системы разрезов* — набора точек, геодезических и многоугольников на поверхности многогранника, обладающего специальными свойствами, которые мы здесь не будем описывать. Система разрезов существует не на всяком многограннике. В диссертации доказано, что каждой минимальной сети на многограннике соответствует некоторая система разрезов, поэтому имеет место следующее необходимое условие.

Теорема 17. *Если на выпуклом многограннике есть минимальная сеть, то на этом многограннике существует система разрезов.*

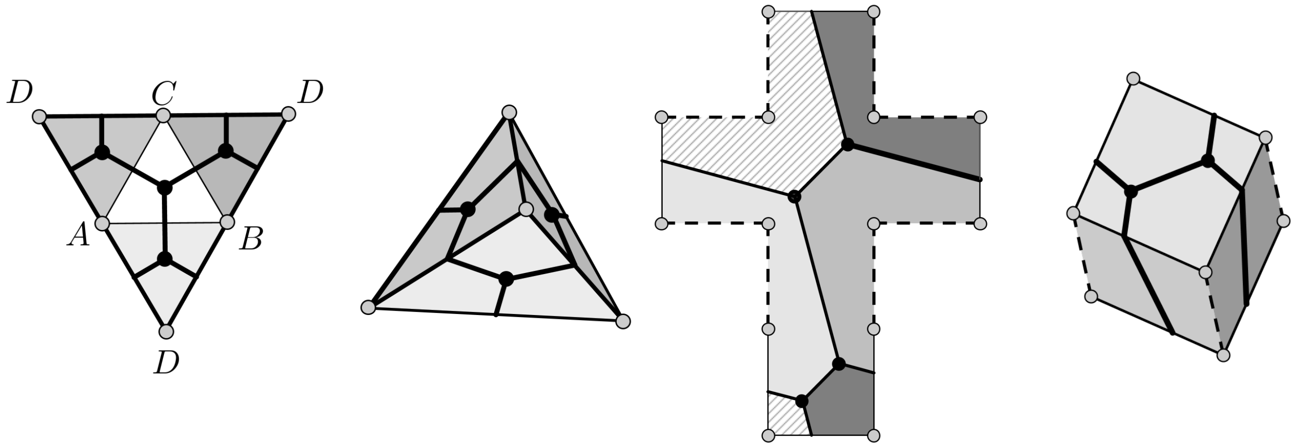
Это необходимое условие сильнее, чем необходимое условие из теоремы 6: существуют тетраэдры, не имеющие системы разрезов, но удовлетворяющие условию на кривизны, именно они и упоминались выше в качестве контрпримера к достаточности необходимого условия на кривизны.

Теорема 19. *Минимальной сети нет на любом тетраэдре $ABCD$, удовлетворяющем следующим условиям на кривизны вершин, длину ребра CD и площадь поверхности S (сумму площадей граней)*
(1) $k(A) = \frac{2\pi}{3}$, $k(B) = \frac{5\pi}{3}$, $\frac{\pi}{3} < k(D) < \frac{\pi}{2}$, $\frac{7\pi}{6} < k(C) < \frac{4\pi}{3}$;
(2) $\frac{S}{|CD|^2} < \frac{1}{4}$.

Однако наше новое необходимое условие по-прежнему не является достаточным.

Теорема 18. *Существует многогранник, имеющий систему разрезов, хотя на нём нет ни одной минимальной сети.*

Для доказательства рассматривается многогранник, напоминающий очень вытянутый прямоугольный параллелепипед.



Простая минимальная сеть на правильном тетраэдре и непростая минимальная сеть на кубе.

Сведение задачи к простым минимальным сетям (раздел 3.2.6 диссертации). Минимальная сеть называется *простой*, если в каждой своей нешестиугольной ячейке она содержит ровно одну вершину многогранника. На рисунке приведён пример простой минимальной сети на правильном тетраэдре и непростой минимальной сети на кубе.

Простой минимальной сети всегда соответствует система разрезов, состоящая из всех вершин многогранника (в этой системе разрезов нет ни геодезических, ни многоугольников — только точки).

Минимальной сети на кубе, изображённой на рисунке выше, соответствует система разрезов, состоящая из четырёх «вертикальных» рёбер куба, т.е. тех рёбер, которые не пересекаются с минимальной сетью (они отмечены пунктиром).

Теорема 20. *Для каждой системы разрезов M_{cut} на многограннике P существует и единственен многогранник $P_S(M_{cut})$ такой, что для любой минимальной сети N на многограннике P, которой соответствует система разрезов M_{cut}, существует простая минимальная сеть на многограннике $P_S(M_{cut})$, изометричная сети N.*

Например, в случае куба и системы разрезов, рассмотренной в примере выше, многогранником $P_S(M_{cut})$ будет дважды покрытый квадрат.

В доказательстве теоремы 20 показано, что развёртку многогранника $P_S(M_{cut})$ можно построить конструктивно. Таким образом, для изучения минимальных сетей на данном многограннике P можно рассмотреть всевозможные системы разрезов на P, для каждой системы разрезов M_{cut}

построить соответствующий многогранник $P_S(M_{cut})$ и на нём изучить простые минимальные сети. Затем перенести полученные результаты обратно на многогранник P. При этом, вообще говоря, не все простые минимальные сети, реализующиеся на $P_S(M_{cut})$, реализуются на P, верно только утверждение в обратном направлении.

Эта конструкция принципиально сводит задачу поиска произвольных минимальных сетей на данном многограннике P к задаче поиска простых минимальных сетей на некотором семействе многогранников $\mathcal{S}(P)$. Вторая задача в некотором смысле проще первой, поскольку простые минимальные сети существуют лишь на многогранниках, все кривизны которых кратны $\frac{\pi}{3}$. К сожалению, гарантировать, что семейство $\mathcal{S}(P)$ конечно, мы не можем, поскольку существуют многогранники с бесконечным числом систем разрезов (например, куб).

Факты и гипотезы о существовании минимальных сетей на многогранниках (разделы 3.2.7–3.2.8 диссертации). Поскольку необходимое условие на кривизны (теорема 6) не является достаточным (теорема 19), возникает вопрос о достаточности следующего более сильного условия (не являющегося необходимым).

Гипотеза 1. *Если кривизны всех вершин многограника кратны $\frac{\pi}{3}$, то на этом многограннике существует минимальная сеть.*

В диссертации показано, что это верно в случае многогранников с тремя вершинами (дважды покрытых треугольников, раздел 3.2.3) и четырьмя вершинами (тетраэдров, раздел 3.2.4). Из существования *простой* минимальной сети на многограннике следует, что кривизна каждой вершины многогранника делится на $\frac{\pi}{3}$. Следующая гипотеза — усиление гипотезы 1.

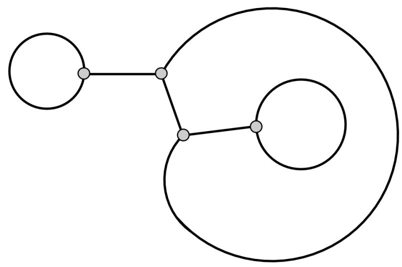
Гипотеза 2. *Если кривизны всех вершин многограника кратны $\frac{\pi}{3}$, то на этом многограннике существует простая минимальная сеть.*

Справедливость этой гипотезы ранее была известна только для равногранных тетраэдров. В диссертации она доказана в случае многогранников с тремя вершинами и в случае тетраэдров с кривизнами $\{\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\}$.

Теорема 22. *На любом тетраэдре с кривизнами* $\{\frac{5\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\}$ *существует простая минимальная сеть, а именно, всегда существует минимальная сеть, реализующая плоский граф, изображённый на рис. 3.7.*

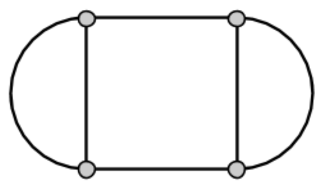
Сеть, существование которой устанавливается в доказательстве, имеет наименьшую длину среди сетей на данном тетраэдре, имеющих тип, изображённый на рис. 3.7, и содержащих внутри каждой своей пятиугольной ячейки одну вершину тетраэдра кривизны $\frac{\pi}{3}$, а внутри каждой одноугольной ячейки — одну вершину кривизны $\frac{5\pi}{3}$.

Интуитивно доказательство основано на следующих физических соображениях. Минимальная сеть «натянута на многогранник и не соскальзывает с его поверхности». Ясно, что на любом многограннике можно нарисовать сколько угодно неминимальных сетей. Естественно спросить: а что происходит с соответствующими сетями из эластичных нитей, т.е. «куда» они «соскальзывают»? Соскальзывая, сеть сокращает свою длину, и если в некоторый «регулярный» момент соскальзывание прекратится, то это будет означать, что сеть достигла локального минимума длины, т.е. превратилась в минимальную сеть!



3.7. Сеть такого типа реализуется на всех тетраэдрах с кривизнами $\{\frac{5\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\}$.

Однако чаще такое соскальзывание заканчивается тем, что рёбра сети «наезжают» на вершины многогранника, переходят через них, и, в конце концов, вся сеть оказывается внутри одной грани, где и сжимается в точку — абсолютный минимум длины. Если же удаётся показать, что на данном многограннике «соскальзывание» должно «остановиться», то это значит, что на данном многограннике существует минимальная сеть. Неформально говоря, именно это и удалось показать в доказательстве теоремы 22.



3.8 Сеть такого типа существует НЕ на всех тетраэдрах с кривизнами $\{\frac{4\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\}$.

Следующую теорему 21 можно рассматривать как новый аргумент «в пользу» гипотезы 2.

Теорема 21. *Пусть $\mathcal{P}(k_1, \ldots, k_n)$ — множество многогранников с n вершинами и кривизнами $\frac{k_1\pi}{3}, \ldots, \frac{k_n\pi}{3}$, где $k_i \in \mathbb{Z}, k_i \geqslant 0$. Тогда множество многогранников, имеющих простую минимальную сеть, открыто и всюду плотно в $\mathcal{P}(k_1, \ldots, k_n)$.*

Открытость и всюду плотность здесь понимается относительно топологии на $\mathcal{P}(k_1, \ldots, k_n)$, порождённой следующим отношением. Два многогранника с n занумерованными вершинами *ε-близки* , если их можно расположить в $\mathbb{R}^3$ так, что расстояния между соответствующими вершинами меньше ε.

Автор благодарит своего научного руководителя, профессора А. А. Тужилина, и профессора А. О. Иванова за постановку задачи, постоянную поддержку и внимание к работе, а также весь коллектив кафедры дифференциальной геометрии и приложений за тёплую атмосферу и конструктивные обсуждения.

ПУБЛИКАЦИИ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

[1] Стрелкова Н. П. *Замкнутые локально минимальные сети на поверхностях выпуклых многогранников* // Моделирование и анализ информационных систем. — 2013. — Т. 20, №5. — С. 116–145.

[2] Стрелкова Н. П. *Замкнутые локально минимальные сети на поверхностях тетраэдров* // Матем. сб. — 2011. — Т. 202, №1. — С. 141–160.

[3] Стрелкова Н. П. *Реализация плоских графов как замкнутых локально минимальных сетей на выпуклых многогранниках* // Доклады РАН. — 2010. — Т. 435, №4. — С. 1–3.

[4] Стрелкова Н. П. *Устойчивость локально минимальных сетей* // Труды семинара по векторному и тензорному анализу с их приложениями к геометрии, механике и физике. — 2013. — Т. 29. — С. 148–170.