МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ имени М. В. ЛОМОНОСОВА

Механико-математический факультет

На правах рукописи

УДК 519.21

Липатов Максим Евгеньевич

СТАЦИОНАРНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ БЛУЖДАНИЯ НА ГРУППАХ ЛИ И КОСЫЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ

01.01.05 – теория вероятностей и математическая статистика

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва — 2013

Работа выполнена на кафедре теории вероятностей механико-математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова.

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, профессор
Оселедец Валерий Иустинович

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук, профессор
Буфетов Александр Игоревич
ведущий научный сотрудник
Математический институт
имени В. А. Стеклова РАН

доктор физико-математических наук, профессор
Рыжиков Валерий Валентинович
Московский государственный университет
механико-математический факультет
кафедра теории функций и
функционального анализа

Ведущая организация: Институт проблем передачи информации им. А. А. Харкевича РАН

Защита диссертации состоится 20 декабря 2013 г. в 16 часов 45 минут на заседании диссертационного совета Д 501.001.85 при Московском государственном университете имени М. В. Ломоносова по адресу: 119991, ГСП-1, Москва, Ленинские горы, МГУ, механико-математический факультет, аудитория 16-24.

С диссертацией можно ознакомиться в Фундаментальной библиотеке МГУ имени М. В. Ломоносова (Ломоносовский пр-т, 27, сектор А, 8 этаж).

Автореферат разослан 19 ноября 2013 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета Д 501.001.85 при МГУ,
доктор физико-математических наук,
профессор В. Н. Сорокин

Общая характеристика работы

Актуальность темы.

Диссертация относится к области эргодической теории и посвящена изучению коциклов над сохраняющими вероятностную меру автоморфизмами со значениями в различных группах Ли $\mathcal{G}$ или, другими словами, стационарных случайных блужданий на $\mathcal{G}$. Коциклы над автоморфизмами со значениями в измеримых группах, действующих на измеримых пространствах, естественным образом порождают косые произведения, с рассмотрением которых тесно связано изучение коциклов.

Представляют интерес вопросы классификации коциклов относительно отношения когомологичности, среди которых отметим следующие:

- нахождение канонической формы, к которой можно привести произвольный коцикл со значениями в некоторой группе;
- исследование когомологичности коциклов со значениями в некоторой группе коциклам со значениями в подмножествах этой группы[1,2,3,4,5,6];
- нахождение и исследование когомологических инвариантов коциклов[6,7,8].

Главы 1 и 2 настоящей диссертации посвящены первому из обозначенных выше кругу вопросов. В этом направлении имеются следующие результаты. Циммером показано[9], что любой коцикл со значениями в связной

[1] Zimmer R. J., Compactness conditions on cocycles of ergodic transformation groups, *J. London Math. Soc.* (2), **15**:1 (1977), 155–163.

[2] Feldman J., Moore C. C., Ergodic equivalence relations, cohomology, and von Neumann algebras. I,II, Trans. Amer. Math. Soc., **234**:2 (1977), 289–359.

[3] Zimmer R. J., On the cohomology of ergodic group actions, *Israel J. Math.*, **35**:4 (1980), 289–300.

[4] Schmidt K., Amenability, Kazhdan's property T, strong ergodicity and invariant means for ergodic group actions, *Erg. Th. Dyn. Sys.* **1**:2 (1981), 223–236.

[5] Рыжиков В. В., О когомологичности коциклов, отвечающих эргодическим косым произведениям, *Функц. анализ и его прил.*, **30**:1 (1996), 84—86.

[6] Arnold L., Nguyen Dinh Cong, Oseledets V. I., Jordan normal form for linear cocycles, *Random Op. Stoch. Eq.,* **7**:4 (1999), 303–358.

[7] Schmidt K., *Cocycles of Ergodic Transformation Groups*, Macmillan Lectures in Mathematics, **1**, Macmillan Company of India, Delhi, 1977.

[8] Arnold L., Nguyen Dinh Cong, Oseledets V. I., The essential range of a nonabelian cocycle is not a cohomology invariant, *Israel J. Math.*, **116**:1 (2000), 71–76.

[9] Zimmer R. J., Induced and amenable ergodic actions of Lie groups, *Ann. Sci. École Norm. Sup.* (4), **11**:3 (1978), 407–428.

полупростой вещественной группе Ли $\mathcal{G}$ с конечным центром когомологичен коциклу со значениями в аменабельной подгруппе. Мур описал[10] все максимальные аменабельные подгруппы в таких группах $\mathcal{G}$, удовлетворяющие так называемому условию изотропной связности, показав, что они представляют собой $2^{\operatorname{rk}_{\mathbb{R}}\mathcal{G}}$ классов сопряженных подгрупп, два из которых – класс максимальных компактных подгрупп и класс минимальных параболических подгрупп. Справедливы также аналоги результатов Циммера и Мура для произвольных связных локально компактных групп[10,11].

Рассмотрим случай $\mathcal{G} = GL(l, \mathbb{R})$. Из мультипликативной теоремы Оселедца[12] (МЭТ) следует, что всякий линейный коцикл при определенном условии интегрируемости когомологичен блочно-диагональному коциклу, каждый блок на диагонали которого имеет одноточечный ляпуновский спектр.

В работе [6] для той же группы $\mathcal{G}$ доказывается, что всякий коцикл когомологичен блочно-треугольному коциклу с неприводимыми блочно-конформными подкоциклами на диагонали. Данная теорема (о жордановой нормальной форме линейного коцикла) является уточнением МЭТ в том смысле, что позволяет уточнить структуру коцикла внутри подпространств Оселедца. При этом условие интегрируемости в ней не требуется. В работах Оселедца[13] и Тьеллена[14] аналогичные теоремы были получены при $l = 2$ с помощью метода барицентров. В первой главе настоящей работы с помощью этого метода мы получаем классификацию коциклов со значениями в полупростых группах Ли вещественного ранга 1 (по поводу классификации коциклов со значениями в группе Лоренца см. также работу Циммера[15]), а во второй главе обобщаем этот метод для получения вышеупомянутого результата статьи [6] и его комплексного варианта. В отличие от подхода, основанного на применении леммы Фюрстенберга[6] (или ее аналога[15]), метод барицентров позволяет в явном виде найти сопрягаю-

[10] Moore C. C., Amenable subgroups of semi-simple groups and proximal flows, *Israel J. Math.*, **34**:1-2 (1979), 121–138.

[11] Zimmer R. J., *Ergodic theory and Semisimple Groups*, Birkhäuser, Boston Basel Stuttgart, 1984.

[12] Оселедец В. И., Мультипликативная эргодическая теорема. Характеристические показатели Ляпунова динамических систем, *Тр. ММО*, **19**, 1968, 179—210.

[13] Oseledets V. I., *Classification of GL(2,R)-valued cocycles of dynamical systems*, Report 360, Institut für Dynamische Systeme, Universität Bremen, 1995.

[14] Thieullen Ph., Ergodic reduction of random products of two-by-two matrices, *J. Anal. Math.*, **73**:1 (1997), 19–64.

[15] Zimmer R. J., Ergodic Theory and the Automorphism Group of a G-Structure, in *Group Representations, Ergodic Theory, Operator Algebras, and Mathematical Physics*, Mathematical Sciences Research Institute Publications, **6** (1987), 247–278.

щую случайную матрицу, приводящую коцикл к каноническому виду.

В связи с проблемой классификации линейных коциклов следует также упомянуть следующие два результата: Гиваршем и Рожи доказано[16], что «вполне неприводимые» коциклы с независимыми приращениями, удовлетворяющие условию интегрируемости из МЭТ, когомологичны блочно-диагональным коциклам с конформными блоками; по теореме же Оселедца–Песина об ε-редукции[17] всякий коцикл при условии интегрируемости когомологичен блочно-диагональному коциклу, блоки которого сколь угодно близки по норме к конформным.

В качестве примеров применения классификации коциклов можно привести доказательство «жесткости энтропии» для гладких действий простых групп Ли[18]; доказательство плотности множества коциклов с простым ляпуновским спектром в пространстве всех линейных коциклов с L^∞-нормой[19]; классификацию максимальных аменабельных подгрупп в $GL(l,\mathbb{R})$[6].

В теории вероятностей хорошо изучено свойство возвратности случайных блужданий в $\mathbb{R}^l$ с независимыми приращениями[20]. Глава 3 посвящена изучению «эргодического» аналога данного понятия — рекуррентности коциклов. Случай группы $\mathbb{R}^l$ рассматривался в работах [7,21,22,23,24,25,26,27],

---

[16]Guivarc'h Y., Raugi A., Propriétés de contraction d'un semi-groupe de matrices inversibles. Coefficients de Liapunoff d'un produit de matrices aléatoires indépendantes, *Israel J. Math.*, **65**:2 (1989), 165–196.

[17]Barreira L., Pesin Y., *Nonuniform Hyperbolicity: Dynamics of Systems with Nonzero Lyapunov Exponents*, Cambridge University Press, 2007.

[18]Furstenberg H., Rigidity and cocycles for ergodic actions of semisimple Lie groups (after G. A. Margulis and R. Zimmer), *Bourbaki Seminar*, 559, 1979/80, Lecture Notes in Math., **842**, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1981, 273—292.

[19]Arnold L., Nguyen Dinh Cong, Linear cocycles with simple Lyapunov spectrum are dense in L^∞, Report 410, Institut für Dynamische Systeme, Universität Bremen, 1997.

[20]Спицер Ф., *Принципы случайных блужданий*, Мир, М., 1969.

[21]Atkinson G., Recurrence of co-cycles and random walks, *J. London Math. Soc.* (2), **13**:3 (1976), 486–488.

[22]Conze J.-P., Sur un critère de récurrence en dimension 2 pour les marches stationnaires, applications, *Erg. Th. Dyn. Sys.* **19**:5 (1981), 1233–1245.

[23]Dekking F. M., On transience and recurrence of generalized random walks, *Z. Wahrsch. Verw. Gebiete,* **61**:4 (1982), 459–465.

[24]Schmidt K., On recurrence, *Z. Wahrsch. Verw. Gebiete,* **68**:1 (1984), 75–95.

[25]Schmidt K., On joint recurrence, *C. R. Acad. Sci. Raris, Serie I*, **327**:9 (1998), 837–842.

[26]Greschonig G., Schmidt K., Growth and recurrence of stationary random walks, *Probab. Theor. Relat. Fields*, **125**:2 (2003), 266–270.

[27]Schmidt K., Recurrence of Cocycles and Stationary Random Walks, *Lecture Notes-Monograph Series*, **48** Dynamics & Stochastics (2006), 78–84.

группы $SL(2,\mathbb{R})$ — в [14] и [28], группы верхних треугольных матриц — в [29]. В главе 3 мы исследуем рекуррентность коциклов со значениями в полупростых группах Ли вещественного ранга 1.

Цель работы.

Цель диссертации — исследование стационарных случайных блужданий на группах Ли, а именно, классификация коциклов над эргодическими, сохраняющими вероятностную меру автоморфизмами со значениями в некоторых группах Ли и исследование свойства рекуррентности таких коциклов.

Научная новизна.

Основные результаты диссертации являются новыми и состоят в следующем.

1. Получена классификация коциклов над эргодическими, сохраняющими вероятностную меру автоморфизмами со значениями в полупростых группах Ли вещественного ранга 1.

2. Для неприводимых $GL(l,\mathbb{K})$-значных ($\mathbb{K}=\mathbb{R},\mathbb{C}$) коциклов над эргодическим, сохраняющим вероятностную меру автоморфизмом получена новая конструкция линейного покрытия носителей их эргодических инвариантных мер на $\mathbb{K}P^{l-1}$. С помощью нее найдено сопряжение, приводящее произвольный $GL(l,\mathbb{K})$-значный коцикл к жордановой нормальной форме, выражающееся через барицентры мер на границе симметрических пространств.

3. Доказана рекуррентность определенного класса коциклов со значениями в полупростых группах Ли вещественного ранга 1.

Методы исследования.

В работе использовались метод барицентров, методы эргодической теории, теории вероятностей, алгебры, элементы теории симметрических пространств и алгебраической геометрии.

Теоретическая и практическая ценность.

Диссертация носит теоретический характер. Ее результаты и методы

[28] Ochs G., Oseledets V. I., *On recurrent cocycles and the non-existence of random fixed points*, Report 382, Institut für Dynamische Systeme, Universität Bremen, 1996.

[29] Greschonig G., Recurrence in unipotent groups and ergodic nonabelian group extensions, *Israel J. Math.*, **147**:1 (2005), 245–267.

могут найти применение в эргодической теории и теории случайных процессов.

Апробация работы.

Результаты диссертации докладывались на следующих семинарах:

• Большой семинар кафедры теории вероятностей под рук. академика РАН А.Н. Ширяева (мехмат МГУ, 2012);

• семинар Добрушинской математической лаборатории ИППИ РАН под рук. д.ф.-м.н., в.н.с. М. Л. Бланка и д.ф.-м.н., профессора Р.А. Минлоса (2013);

• семинар «Теория вероятностей и эргодическая теория» под рук. д.ф.-м.н., профессора Б.М. Гуревича, д.ф.-м.н., профессора В.И. Оседедца и д.ф.-м.н., профессора С.А. Пирогова (мехмат МГУ, неоднократно, 2009–2012);

а также на конференциях

• Международная конференция студентов, аспирантов и молодых учёных «Ломоносов» (Москва, 2010, 2011, 2012);

• Международный симпозиум «Стохастика и ее видение» (Москва, 2010);

• XII Всероссийский симпозиум по прикладной и промышленной математике (Сочи, 2011);

• II Международная конференция «Математика в Армении» (Цахкадзор, Армения, 2013).

Работа автора поддержана грантом РФФИ № 11-01-00982а.

Публикации.

Результаты диссертации опубликованы в 9 работах автора, в том числе 3 статьях в научных журналах, входящих в перечень ВАК. Работ, написанных в соавторстве, нет. Список работ приведен в конце автореферата [1–9].

Структура диссертации.

Диссертация состоит из введения, трех глав, списка литературы и списка обозначений. Текст диссертации изложен на 68 страницах. Список литературы содержит 64 наименования.

Содержание работы

Дадим необходимые определения. Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ – стандартное вероятностное пространство, T – эргодический, сохраняющий меру автоморфизм Ω и $\mathcal{G}$ — топологическая группа, снабженная борелевской сигма-алгеброй. Всякая измеримая функция $a\colon \Omega \to \mathcal{G}$ порождает *коцикл* (над T) — функцию $\Phi_a\colon \mathbb{Z} \times \Omega \to G$, заданную формулой

$$\Phi_a(n,\omega) := \begin{cases} a(T^{n-1}\omega)\dots a(T\omega)a(\omega), & n \geq 1, \\ \mathrm{e}, & n = 0, \\ a^{-1}(T^n\omega)\dots a^{-1}(T^{-1}\omega), & n \leq -1. \end{cases}$$

Соответствие $a \mapsto \Phi_a$ взаимно однозначно, и мы будем говорить о коцикле a, имея в виду коцикл Φ_a.

Коциклы $a\colon \Omega \to \mathcal{G}$ и $b\colon \Omega \to \mathcal{G}$ называются *когомологичными*, если для некоторой измеримой функции $c\colon \Omega \to \mathcal{G}$ имеем

$$b(\omega) = c^{-1}(T\omega)a(\omega)c(\omega) \ \mathsf{P}\text{-п.н.}$$

Отметим, что последнее соотношение равносильно тому, что

$$\Phi_b(n,\omega) = c^{-1}(T^n\omega)\Phi_a(n,\omega)c(\omega) \ \mathsf{P}\text{-п.н.}$$

для всех $n \in \mathbb{Z}$.

Одним из когомологических инвариантов коциклов является свойство их рекуррентности. Коцикл $a\colon \Omega \to G$ называется *рекуррентным*, если для любого $B \in \mathcal{F}$ положительной меры и любой окрестности U нейтрального элемента группы $\mathcal{G}$ найдется $n \in \mathbb{N}$, такое, что

$$\mathsf{P}(B \cap T^{-n}B \cap \{\Phi_a(n,\omega) \in U\}) > 0.$$

Если задано действие группы $\mathcal{G}$ на топологическом пространстве X, то коцикл $a\colon \Omega \to \mathcal{G}$ порождает *косое произведение*

$$T_a\colon \Omega \times X \to \Omega \times X, \ (\omega, x) \mapsto (T\omega, a(\omega)x),$$

итерации которого имеют вид

$$T_a^n(\omega, x) = (T^n\omega, \Phi_a(n,\omega)x).$$

Удобно представлять себе эту динамическую систему на тривиальном расслоении $\Omega \times X$ следующим образом: коцикл переводит точку x в слое $\{\omega\} \times X$ в точку $\Phi_a(n,\omega)x$ в слое $\{T^n\omega\} \times X$.

Рассмотрим случай, когда $\mathcal{G} = GL(l, \mathbb{K})$ и $X = \mathbb{K}^l$. Заметим, что если $A: \Omega \to GL(l, \mathbb{K})$ — матрица случайного оператора в паре базисов $\mathbf{f}(\omega) = \{f_i(\omega)\}$ и $\mathbf{f}(T\omega)$, и $B: \Omega \to GL(l, \mathbb{K})$ — матрица того же оператора в паре базисов $\mathbf{g}(\omega)$ и $\mathbf{g}(T\omega)$, то коциклы A и B когомологичны с сопрягающей матрицей $C(\omega)$, являющейся матрицей перехода от базиса $\mathbf{f}$ к $\mathbf{g}$. Поэтому задача классификации $GL(l, \mathbb{K})$-значных коциклов состоит в нахождении такого случайного базиса $\mathbf{f}(\omega)$ в слоях $\{\omega\} \times \mathbb{K}^l$, для которого матрица соответствующего случайного оператора записывается в наиболее простом виде.

Если X — польское пространство, то для всякой вероятностной меры μ на $\Omega \times X$ с маргинальной мерой P на Ω существует и притом P-п.н. единственна ее *факторизация* относительно P, т.е. случайная вероятностная мера $\mu_.$ на X, такая, что для любого $C \in \mathcal{F} \otimes \mathcal{B}(X)$

$$\mu(C) = \int_\Omega \mu_\omega\{x \in X : (\omega, x) \in C\} \mathsf{P}(d\omega).$$

Если μ — эргодическая инвариантная мера для T_a, то ее факторизацию $\mu_.$ мы будем называть *эргодической инвариантной мерой на X коцикла a.*

Перейдем к рассмотрению содержания диссертации.

Во **введении** приводится краткий обзор исследований, связанных с рассматриваемыми вопросами, и излагается содержание диссертационной работы.

Глава 1 посвящена классификации коциклов со значениями в группах Ли малых рангов. Основным результатом главы 1 является следующее утверждение:

Теорема 1.4.1. *Всякий коцикл со значениями в связной полупростой группе Ли вещественного ранга 1 с конечным центром когомологичен коциклу $\tilde{a}$ со значениями в одной из следующих подгрупп:*

(i) *максимальная компактная;*

(ii) *минимальная параболическая;*

(iii) *нормализатор главной векторной подгруппы $\mathcal{A}$. Причем в этом случае коцикл $\exp(i\pi I_{\{\tilde{a}(\omega) \notin Z(\mathcal{A})\}}(\cdot))$ не когомологичен 1, где $Z(\mathcal{A})$ — централизатор $\mathcal{A}$.*

Для доказательства используется метод барицентров, который в данной главе мы также обобщаем для классификации $GL(3, \mathbb{K})$-значных коциклов (теорема 1.5.4). Здесь и ниже $\mathbb{K}$ — либо $\mathbb{R}$, либо $\mathbb{C}$.

В общем случае метод барицентров (по крайней мере, в том направлении, в котором мы его обобщаем) заключается в использовании $\mathcal{G}$-эквивариантности отображения, сопоставляющего вероятностной мере μ на геодезической границе $Y(\infty)$ пространства Адамара Y, на котором группа $\mathcal{G}$ действует изометриями, ее *барицентр* $b(\mu) \in Y$ (при условии его существования и единственности), который определяется как точка, в которой достигается минимум функции

$$b^{\mu}_{p_0}: Y \to Y,\ p \mapsto \int_{Y(\infty)} b_{p_0,x}(p)\mu(dx),$$

где $b_{p_0,x}$ — функция Буземана. В качестве мер на границе мы рассматриваем эргодические инвариантные меры коциклов. Также в работе мы используем критерии существования единственного барицентра меры на границе симметрических пространств, полученные в [30] и [31].

Далее нам понадобится понятие неприводимости линейного коцикла. Случайное линейное подпространство U в $\mathbb{K}^l$ называется *инвариантным* относительно коцикла $A: \Omega \to GL(l, \mathbb{K})$, если

$$U(T\omega) = A(\omega)U(\omega)\ \mathsf{P}\text{-п.н.}$$

Из эргодичности автоморфизма T следует, что размерность такого подпространства — константа. Коцикл A называется *неприводимым*, если не существует нетривиальных (т.е. имеющих размерность, отличную от 0 и l) случайных подпространств, инвариантных относительно A.

В **главе 2** мы развиваем метод барицентров для доказательства следующего результата о классификации $GL(l, \mathbb{K})$-значных коциклов при произвольном l.

Теорема 2.3.1. ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$: [6]) *Всякий $GL(l, \mathbb{K})$-значный коцикл когомологичен блочно-треугольному коциклу с неприводимыми блочно-конформными подкоциклами на диагонали*

$$\begin{pmatrix} A^{(1)}(\omega) & & & * \\ & A^{(2)}(\omega) & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & A^{(q)}(\omega) \end{pmatrix},$$

[30] Flüge R., Ruh, E. A., Barycenter and maximum likelihood, *Diff. Geom. Appl.*, **24**:6 (2006), 660–669.

[31] Kapovich M., Leeb B., Millson J., Convex functions on symmetric spaces, side lengths of polygons and the stability inequalities for weighted configurations at infinity, *J. Diff. Geom.*, **81**:2 (2009), 297–354.

$$A^{(i)}(\omega) = \begin{pmatrix} \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & \dots & \vdots \\ A^{(i)}_{\sigma_i(\omega)1,1}(\omega) & \dots & 0 \\ 0 & \dots & A^{(i)}_{\sigma_i(\omega)m_i,m_i}(\omega) \\ \vdots & \dots & \vdots \end{pmatrix}, \ i = 1, \dots, q,$$

где $\sigma_i\colon \Omega \to S_{m_i}$ *— некоторые случайные перестановки и* $A^{(i)}_{\sigma_i(\omega)j,j}(\omega) \in CU(d_i, \mathbb{K})$.

Для доказательства мы используем следующее описание эргодических инвариантных мер коциклов, аналогичное полученному в [6].

Предложение 2.1.10. *Для всякой эргодической инвариантной меры* $\mu.$ *на* $\mathbb{K}P^{l-1}$ *произвольного коцикла* $A\colon \Omega \to GL(l, \mathbb{K})$ *существует измеримая функция* $C\colon \Omega \to GL(l, \mathbb{K})$*, такая, что для* P*-п.в.* $\omega \in \Omega$

$$\mu_\omega = C(\omega)\lambda_M,$$

где λ_M *— мера Лебега на некоторой замкнутой орбите* $M \subset \mathbb{K}P^{l-1}$ *группы* $\mathcal{H} \in \mathcal{H}(A)$ *со связными компонентами одинаковой меры.*

Здесь $\mathcal{H}(A)$ — это так называемая алгебраическая оболочка коцикла A.

Используя предложение 2.1.10, мы даем новую конструкцию линейного покрытия (по Циммеру) носителей эргодических инвариантных мер коциклов, которой посвящено следующее утверждение, ключевое при доказательстве теоремы 2.3.1.

Лемма 2.2.2. *Пусть* $\mu.$ *– эргодическая инвариантная мера на* $\mathbb{K}P^{l-1}$ *неприводимого коцикла* $A\colon \Omega \to GL(l, \mathbb{K})$*. Тогда существуют случайные линейные подпространства* $U_1, \dots, U_m$ *в* $\mathbb{K}^l$*, такие, что*

(i) $\mathbb{K}^l = \bigoplus_{i=1}^{m} U_i(\omega)$,

(ii) $\mu_\omega([U_i(\omega)]) = \frac{1}{m}$ P*-п.н.*, $\dim U_i(\omega) = \frac{l}{m}$, $1 \le i \le m$,

(iii) $\bigcup_{i=1}^{m} U_i(T\omega) = A(\omega) \bigcup_{i=1}^{m} U_i(\omega)$ P*-п.н.*,

(iv) *для каждого подпространства* U_i P*-п.н. имеем* $\mu_\omega([U]) < \frac{\dim U}{l}$ *для всех нетривиальных линейных подпространств* $U \subset U_i(\omega)$.

Здесь $[\cdot]$ обозначает проективизацию ненулевого линейного подпространства в $\mathbb{K}^l$.

Так же, как в [6], мы приводим коцикл A к блочно-треугольному виду с неприводимыми подкоциклами $\tilde{A}^{(i)}$, $i = 1, \dots, q$, на диагонали. По лемме 2.2.2 мы строим по эргодическим инвариантным мерам $\mu_{\cdot}^{(i)}$ на $\mathbb{K}P^{l_i-1}$ коциклов $\tilde{A}^{(i)}$ соответствующие случайные подпространства $U_j^{(i)}$ и, выбирая согласованный с ними случайный базис $\mathbf{f}$, переходим к «поднятым» $GL(d_i, \mathbb{K})$-значным коциклам $A^{\mathbf{f},i}$ ($d_i := \dim U_j^{(i)}$) над расширенными динамическими системами на $\Omega \times \{1, \dots, m_i\}$ с инвариантными мерами $\tilde{\mu}_{\cdot}^{(i)}$ на $\mathbb{K}P^{d_i-1}$, построенными по $\mu_{\cdot}^{(i)}$. Заметим, что проективное пространство $\mathbb{K}P^{d_i-1}$ единственным образом можно $PGL(d_i, \mathbb{K})$-эквивариантно вложить в $PGL(d_i, \mathbb{K})/PU(d_i, \mathbb{K})(\infty)$. При этом отождествлении барицентры

$$b(\tilde{\mu}_{(\omega,j)}^{(i)}) \in PGL(d_i, \mathbb{K})/PU(d_i, \mathbb{K})$$

п.н. существуют и единственны, и если $C^{\mathbf{f},i}\colon \Omega \times \{1, \dots, m_i\} \to GL(d_i, \mathbb{K})$ — такие измеримые функции, что

$$b(\tilde{\mu}_{(\omega,j)}^{(i)}) = [C^{\mathbf{f},i}(\omega, j)]PU(d_i, \mathbb{K}),$$

то коцикл A приводится к каноническому виду с помощью сопрягающей матрицы

$$\overline{C}(\omega)\mathrm{diag}(C^{\mathbf{f},1}(\omega, 1), \dots, C^{\mathbf{f},1}(\omega, m_1), \dots, C^{\mathbf{f},q}(\omega, 1), \dots, C^{\mathbf{f},q}(\omega, m_q)),$$

где $\overline{C}$ — матрица перехода от стандартного базиса к базису $\mathbf{f}$.

Для элемента g связной полупростой группы Ли $\mathcal{G}$ вещественного ранга 1 обозначим $\psi_{\mathcal{A}}(g) := \ln(\Psi_{\mathcal{A}}(g)) \in \mathfrak{a} = \mathbb{R}$, где $\Psi_{\mathcal{A}}(g)$ — элемент главной векторной подгруппы $\mathcal{A} \subset \mathcal{G}$ в разложении Ивасавы элемента g и $\mathfrak{a}$ — алгебра Ли группы $\mathcal{A}$. В **главе 3** доказывается следующее утверждение.

Теорема 3.2.1. *Коциклы, когомологичные коциклам со значениями в подгруппе типа* (iii) *в теореме* 1.4.1, *для которых* $\psi_{\mathcal{A}}(\tilde{a}(\cdot)) \in L^1(\mathsf{P})$ *и коцикл* $\exp(i\pi I_{\{\tilde{a}(\omega) \notin Z(\mathcal{A})\}}(\cdot))$ *не когомологичен* 1, *рекуррентны.*

Для доказательства используется критерий консервативности косых произведений.

Автор искренне благодарен своему научному руководителю профессору Валерию Иустиновичу Оселедцу за постановку задач и постоянное внимание к работе. Автор также признателен профессору Эрнесту Борисовичу Винбергу и доценту Дмитрию Андреевичу Тимашеву за полезные консультации.

Работы автора по теме диссертации

[1] Липатов М. Е., К вопросу о классификации линейных коциклов над эргодическими автоморфизмами, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., механ.*, 2013, № 2, 39–42.

[2] Липатов М. Е., Классификация коциклов над эргодическими автоморфизмами со значениями в группе Лоренца. Рекуррентность коциклов, *Мат. заметки*, **93**:6 (2013), 869–877.

[3] Липатов М. Е., Рекуррентность матричных коциклов, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., механ.*, 2010, № 5, 61–64.

[4] Липатов М. Е., Классификация коциклов над эргодическими автоморфизмами со значениями в полупростых группах Ли ранга 1, деп. в ВИНИТИ, 10.12.12, № 444–В2012, 19 с.

[5] Липатов М. Е., Возвратность случайных блужданий на группе Лоренца и редукция матричных коциклов, *Обозр. прикл. и промышл. матем.*, **18**:3 (2011), 448–449.

[6] Липатов М. Е. Жорданова форма SL(2,C)-значных коциклов, *Тезисы докладов секции «Математика и механика» конференции «Ломоносов-2010»*, Москва, 2010, 1.

[7] Липатов М. Е. Классификация SL(3,C)-значных коциклов над эргодическими автоморфизмами, *Тезисы докладов секции «Математика и механика» конференции «Ломоносов-2011»*, Москва, 2011, 1.

[8] Липатов М. Е. Линейные коциклы над эргодическими автоморфизмами и барицентры мер на границе симметрических пространств, *Тезисы докладов секции «Математика и механика» конференции «Ломоносов-2012»*, Москва, 2012, 1.

[9] Lipatov M. Classification of linear cocycles: barycenter method, Abstracts of Communications of the 2nd Int. conference “Mathematics in Armenia: Advances and Perspectives”, Yerevan, 2013, 98–99.