ФГБОУ ВПО «Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова»

На правах рукописи

Спиридонова Софья Юрьевна

АЛГЕБРЫ ХОПФА С ОДНИМ НЕПРИВОДИМЫМ, НЕОДНОМЕРНЫМ ПРЕДСТАВЛЕНИЕМ

01.01.06: математическая логика, алгебра и теория чисел

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва, 2014

Работа выполнена на кафедре высшей алгебры
Механико-математического факультета
ФГБОУ ВПО «Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова».

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук, профессор Артамонов Вячеслав Александрович
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук, профессор Туганбаев Аскар Аканович, ФГБОУ ВПО «Российский экономический университет имени Г.В.Плеханова»; кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник Облезин Сергей Викторович, ФГБУ «ГНЦ РФ ИТЭФ»
Ведущая организация:	ФРАОУ ВПО «Казанский (Приволжский) федеральный университет»

Защита диссертации состоится 28 февраля 2014 года в 16 часов 45 минут на заседании диссертационного совета Д 501.001.84, созданного на базе ФГБОУ ВПО «Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова», по адресу: Российская Федерация, 119991, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д. 1, МГУ, Механико-математический факультет, аудитория 14-08.
С диссертацией можно ознакомиться в Фундаментальной библиотеке ФГБОУ ВПО «Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова» (Москва, Ломоносовский проспект, д.27, сектор А, 8 этаж).
Автореферат разослан 28 января 2014 г.

Ученый секретарь диссертационного совета Д 501.001.84,
созданного на базе МГУ,
профессор Александр Олегович Иванов

Общая характеристика работы

Актуальность темы исследования

Диссертация посвящена исследованию в области теории алгебр Хопфа. Рассматривается структура полупростых конечномерных алгебр Хопфа с одним неодномерным неприводимым представлением при некоторых ограничениях на группу обратимых элементов в дуальной алгебре Хопфа. При этом поле, над которым рассматриваются такие алгебры Хопфа, предполагается алгебраически замкнутым с характеристикой, не делящей размерность алгебры.

В течение последних десятилетий большим интересом пользуется классификация конечномерных алгебр Хопфа над алгебраически замкнутыми полями. Для некоторых размерностей эта задача к настоящему времени уже полностью решена, например, для размерностей p, p^2 и $2p^2$, где p — простое, классификация алгебр Хопфа была получена в работах И.Чу[1], С.Х.Нг[2], М.Хильгеман[3], А.Масуока[4] [5]. Большой прогресс в решении данной задачи достигнут также и для некоторых других размерностей, например, в работе П.Этингофа[6].

Особенно большой интерес представляет классификация конечномерных полупростых алгебр Хопфа. Известно, что все полупростые (ко)коммутативные алгебры Хопфа являются групповыми алгебрами или

[1]Y. Zhu, *Hopf algebras of prime dimension*, Internat. Math. Res. Notices **1** (1994), 53–59

[2]S.-H. Ng, *Non-semisimple Hopf algebras of dimension* p^2, J. Algebra **2**55 (2002), 182-197

[3]M. Hilgemann, S.-H. Ng, *Hopf algebras of dimension* $2p^2$, J. London Math. Soc. **8**0 (2009), 295-310

[4]A. Masuoka, *The* p^n *theorem for semisimple Hopf algebras*, Proc. Amer. Math. Soc. **1**24 (1996), 735–737

[5]A. Masuoka, *Some further classification results on semisimple Hopf algebras*, Comm. Algebra **2**4 (1996), 307–329

[6]P. Etingof, S. Gelaki, *Semisimple Hopf algebras of dimension pq are trivial*, J.of Algebra **2**10 (1998), №2, 664-669

дуальными к ним [7]. Однако вопрос о не (ко)коммутативных алгебрах Хопфа еще не решен. Полупростые алгебры Хопфа с лишь одним неодномерным неприводимым слагаемым реализуют наиболее простой некоммутативный случай. Что касается алгебр Хопфа следующего по сложности класса, а именно с несколькими неодномерными неприводимыми слагаемыми попарно различных размерностей, их классификация была сведена в работе В.А.Артамонова[8] к случаю одного неодномерного неприводимого слагаемого.

Одномерные слагаемые в полупростом разложении соответствуют обратимым элементам двойственной алгебры Хопфа[7]. Если ограничиться рассмотрением алгебр с лишь одним неодномерным неприводимым слагаемым, то любая такая алгебра над алгебраически замкнутым полем $\mathbf{k}$ имеет вид

$$H = \oplus_{h\in G}\mathbf{k}e_h \oplus \mathrm{Mat}(n,\mathbf{k}) \ , \tag{1}$$

где $G = G(H^*)$ — группа обратимых элементов H^*, а множество $\{e_h, h \in G\}$ является системой ортогональных центральных идемпотентов в H.

Всюду далее поле $\mathbf{k}$ подразумевается алгебраически замкнутым с характеристикой, не делящей размерность алгебры.

Полупростые алгебры Хопфа над такими полями были рассмотрены в общем виде в работе В.А.Артамонова[9]. Коумножение в H с одним неодномерным неприводимым слагаемым имеет вид

$$\Delta(x) = \begin{cases} \sum\limits_{h\in G} [(h \rightharpoonup x)\otimes e_h + e_h \otimes (x \leftharpoonup h)] + \Delta'(x) \ , & x \in \mathrm{Mat}(n,\mathbf{k}) \\ \sum\limits_{f\in G} e_f \otimes e_{f^{-1}h} + \Delta_h \ , & x = e_h \end{cases} ,$$

[7]S. Montgomery, *Hopf Algebras and Their Actions on Rings*, Providence RI, 1993.

[8]V.A. Artamonov, *On semisimple Hopf algebras with few representations of dimension greater than one*, Revista de la Unión Matemática Argentina **51** (2012), №2, 91-105

[9]В.А. Артамонов, *О полупростых конечномерных алгебрах Хопфа*, Мат. сборник **198** (2007), №9, 3-28

где

$$\Delta_h = [1 \otimes (h^{-1} \rightharpoonup)]\Delta_1 = [(\leftharpoonup h^{-1}) \otimes 1]\Delta_1 \in \mathrm{Mat}(n, \mathbf{k}) \otimes \mathrm{Mat}(n, \mathbf{k})$$

для всех $h \in G$, Δ_1 соответствует единице в группе G,

$$\Delta' : \mathrm{Mat}(n, \mathbf{k}) \longrightarrow \mathrm{Mat}(n, \mathbf{k}) \otimes \mathrm{Mat}(n, \mathbf{k})$$

— гомоморфизмом алгебр, не сохраняющий единицу. При этом левое и правое действия $f \rightharpoonup x$ и $x \leftharpoonup f$ элементов $f \in H^*$ на $x \in H$ задаются по правилу: если

$$\Delta(x) = \sum x_{(1)} \otimes x_{(2)} \ ,$$

то

$$f \rightharpoonup x = \sum x_{(1)} \langle f,\ x_{(2)} \rangle, \quad x \leftharpoonup f = \sum \langle f,\ x_{(1)} \rangle x_{(2)} \ .$$

Здесь суммирования ведутся по всем слагаемым в $\Delta(x)$, где $x_{(1)}$ является собирательным обозначением для первого слагаемого, $x_{(2)}$ – собирательным обозначением для второго слагаемого, а $\langle f,\ x \rangle$ обозначает значение $f \in H^*$ на $x \in H$.

Кроме того, порядок $G = G(H^*)$ делит n^2, поскольку число одномерных слагаемых делит размерность алгебры[7], и $\dim(H) = |G| + n^2$.

Случай максимального порядка, $|G| = n^2$, реализуется тогда и только тогда, когда $\Delta' = 0$. В этом случае алгебра Хопфа принадлежит либо симметрической, либо кососимметрической серии[9].

Кроме того, в работе[10] доказано существование алгебр Хопфа симметрической серии с $|G(H^*)| = n^2$ для любого $n > 1$.

Случай кососимметрической серии был рассмотрен в диссертации Р.Б. Мухатова[11], где было показано существование алгебр Хопфа кососимметрической серии для любого четного n.

[11] Р.Б. Мухатов, *Строение полупростых алгебр Хопфа*, кандидатская диссертация, МГУ, 2012.

Кроме этого, в диссертации Р.Б. Мухатова[11] рассмотрены идеалы и фактор-алгебры алгебр Хопфа с $|G(H^*)| = n^2$ и получено их описание. Как будет показано в Главе 4, идеалы алгебр Хопфа, рассматриваемых в настоящей работе, имеют аналогичную структуру.

Возвращаясь к случаю $\Delta' \neq 0$, необходимо отметить, что порядок группы G равен nq, где q делит n^9.

В настоящей работе исследуется случай минимального порядка $|G| = n$, и группа G предполагается наиболее простой, циклической. Кроме того, предполагается симметричность $\Delta'(E)$.

Случай циклической группы G произвольного порядка n обобщает случай алгебр типа $(1, p; p, 1)$, то есть алгебр с простым $n = p$. Этот случай был полностью описан в работе С.Натале[11], где было доказано, что при $p > 2$ выполнено $p = 2^f - 1$ для некоторого натурального f.

Основным результатом этой диссертации показано, что алгебры Хопфа с вышеперечисленными условиями могут существовать лишь при $n = p^f - 1$ и лишь в специфическом, обобщенно кокоммутативном виде. А именно, будем называть алгебру Хопфа рассматриваемого типа *обобщенно кокоммутативной*, если для любых индексов i, j, k, l, p, q симметричные коэффициенты ω^{ij}_{klpq} и ω^{ij}_{pqkl} равны или не равны нулю одновременно. Здесь коэффициенты ω^{ij}_{klpq} определяют гомоморфизм алгебр Δ':

$$\Delta'(E_{ij}) = \sum_{k,l,p,q=1}^{n} \omega^{ij}_{klpq} E_{kl} \otimes E_{pq}, \tag{2}$$

Алгебру, не являющуюся обобщенно кокоммутативной, будем называть *сильно некокоммутативной*.

[11] S. Natale, J.Y. Plavnik, *On fusion categories with few irreducible degrees*, ArXiv: 1103.23402, (2011).

Цель работы

Целью работы является продвижение в решении задачи о классификации не(ко)коммутативных полупростых конечномерных алгебрах Хопфа и получение новых результатов касательно структуры подобных алгебр Хопфа. Задачи работы:

- Описание структуры алгебр Хопфа с полупростым разложением

  $$H = \oplus_{h\in G}\mathbf{k}e_h \oplus \mathrm{Mat}(n, \mathbf{k}),$$

  в предположении

  $$G = \langle g\rangle^n, \quad \Delta'(E) = \tau \circ \Delta'(E), \tag{3}$$

  где g — образующий элемент циклической группы G порядка n, E — единичная матрица из $\mathrm{Mat}(n, \mathbf{k})$, а τ переставляет тензорные сомножители.

- Исследование (не)кокоммутативности таких алгебр Хопфа.

- Нахождение размерности таких алгебр Хопфа.

Научная новизна

Полученные в диссертации результаты являются новыми, полученными автором самостоятельно. Основные результаты диссертации следующие.

- В алгебрах Хопфа с полупростым разложением

  $$H = \oplus_{h\in G}\mathbf{k}e_h \oplus \mathrm{Mat}(n, \mathbf{k}),$$

  в предположении

  $$G = \langle g\rangle^n, \quad \Delta'(E) = \tau \circ \Delta'(E),$$

где g — образующий элемент циклической группы G порядка n, E — единичная матрица из $\mathrm{Mat}(n, \mathbf{k})$, а τ переставляет тензорные сомножители, доказана мономиальность матрицы сопряжения в антиподе и однозначная определенность матриц сопряжения в левом и правом действиях группы обратимых элементов на матричную компоненту $\mathrm{Mat}(n, \mathbf{k})$.

- Получено описания структуры гомоморфизма Δ', составляющей части коумножения.

- Доказано, что не существует алгебр Хопфа рассматриваемого вида при четном порядке группы обратимых элементов в дуальной алгебре Хопфа и антиподе, транспонирующем элементы матричной компоненты полупростого разложения.

- Описание антипода рассматриваемых алгебр Хопфа в зависимости от четности порядка группы обратимых элементов.

- Построена естественная взаимосвязь таких алгебр Хопфа с конечными полями (точная формулировка дана в разделах 3.1.1-3.1.2), и показано, что указанные алгебры Хопфа существуют лишь при $n = p^k - 1$, где n — порядок группы обратимых элементов в дуальной алгебре Хопфа, p — простое, а k — натуральное.

- Доказана кокоммутативность рассматриваемых алгебр Хопфа с точностью до числовых коэффициентов в коумножении и антиподе. Кроме того, в случае нечетного n получен более сильный результат, а именно, что такая алгебра Хопфа кокоммутативна с точностью до знаков числовых коэффициентов в коумножении, то есть $\omega^{ij}_{klpq} = \pm\omega^{ij}_{pqkl}$.

Теоретическая и практическая значимость

Работа имеет теоретический характер. Полученные в ней результаты могут быть использованы в различных задачах высшей алгебры, алгебраической геометрии, линейной алгебры, теории групп.

На защиту выносятся следующие основные результаты и положения:

- В алгебрах Хопфа с полупростым разложением

$$H = \oplus_{h \in G} \mathbf{k} e_h \oplus \mathrm{Mat}(n, \mathbf{k}),$$

в предположении

$$G = \langle g \rangle^n, \quad \Delta'(E) = \tau \circ \Delta'(E),$$

где g — образующий элемент циклической группы G порядка n, E — единичная матрица из $\mathrm{Mat}(n, \mathbf{k})$, а τ переставляет тензорные сомножители, доказана мономиальность матрицы сопряжения U в антиподе и однозначная определенность матриц сопряжения A_h, B_h, $h \in G$ в левом и правом действиях группы обратимых элементов на матричную компоненту $\mathrm{Mat}(n, \mathbf{k})$.

- Построена естественная взаимосвязь таких алгебр Хопфа с конечными полями (точная формулировка дана в разделах 3.1.1-3.1.2), и показано, что указанные алгебры Хопфа существуют лишь при $n = p^k - 1$, где n — порядок группы обратимых элементов в дуальной алгебре Хопфа, p — простое, а k — натуральное.

- Доказана кокоммутативность рассматриваемых алгебр Хопфа с точностью до числовых коэффициентов в коумножении и антиподе.

Кроме того, в случае нечетного n получен более сильный результат, а именно, что такая алгебра Хопфа кокоммутативна с точность до знаков числовых коэффициентов в коумножении, то есть $\omega^{ij}_{klpq} = \pm\omega^{ij}_{pqkl}$.

Апробация результатов

Основные результаты диссертации неоднократно докладывались на научно-исследовательских семинарах:

- семинар «Кольца и модули» кафедры высшей алгебры МГУ (неоднократно, 2010 — 2013 гг.);
- семинар «Теория матриц» кафедры высшей алгебры МГУ (2011 г.);
- семинар «Дополнительные главы алгебры» кафедры высшей алгебры МГУ (2010 г.).

Структура диссертации

Диссертация состоит из введения, четырех глав, разбитых на разделы (нумерация разделов подчинена нумерации глав, нумерация теорем подчинена нумерации разделов) и списка литературы. Общий объем диссертации составляет 83 страницы, список литературы включает 36 наименований, из которых 2 наименования — публикации автора по теме диссертации.

Публикации

Основные результаты диссертации были опубликованы в 2-х работах автора, входящих в список ВАК, список которых приведен в конце автореферата.

Краткое содержание работы

Во введении к диссертации дается краткое изложение истории вопроса, показана актуальность темы и сформалированы основные результаты. Кроме того, во введении даны описание структуры диссертации и ее краткое сожержание, а также приведены выносимые на защиту положения.

В Главе 1 получено детальное описание коумножения и антипода рассматриваемых алгебр Хопфа. Её первый раздел 1.1 содержит некоторые вспомогательные определения и утверждения. В разделе 1.2 рассматриваются матрицы сопряжения U и A_h, B_h, $h \in G$, определяющие антипод и действия группы обратимых элементов на элементы матричной компоненты алгебры Хопфа H. С помощью формул Ньютона и Виета для симметрических многочленов в 1.2.1 доказывается однозначная определенность матрицы A_g, где g — образуюший элемент циклической группы G обратимых элементов в дуальной алгебре Хопфа. А именно, перестановкой элементов базиса можно добиться

$$A_g = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon^i E_{ii}$$

с точностью до обратимого числового коэффициента из поля. Здесь ε — перевообразный корень степени n из единицы. Из этого и нескольких других свойств рассматриваемых алгебр Хопфа в подразделах 1.2.2 и 1.2.3 показывается, что матрица B_g диагональна в том же базисе и, кроме того,

$$U = \sum_{r=1}^{n} u_r E_{r\sigma(r)}$$

где перестановка σ является произведением транспозиций и, следовательно, обратна самой себе.

В разделе 1.3 с помощью некоторых переформулировок свойств расматриваемых алгебр Хопфа установлена структура гомоморфизма Δ', а именно, при использовании формализации

$$\Delta'(E_{ij}) = \sum_{k,l,p,q=1}^{n} \omega_{klpq}^{ij} E_{kl} \otimes E_{pq},$$

верно следующее (Теорема 1.3.2):

Теорема. *В алгебре Хопфа рассматриваемого вида (1) с условиями (3) для любых i и j в разложении (2) есть ровно $n-1$ ненулевой коэффициент. При этом*

1) для любого $k \neq i$ ровно один коэффициент ω_{klpq}^{ij} отличен от нуля;

2) для любого $p \neq i$ ровно один коэффициент ω_{klpq}^{ij} отличен от нуля;

3) для любого $l \neq j$ ровно один коэффициент ω_{klpq}^{ij} отличен от нуля;

4) для любого $q \neq j$ ровно один коэффициент ω_{klpq}^{ij} отличен от нуля.

Глава 2 посвящена свойствам обобщенной кокоммутативности и сильной некокоммутативности и содержит доказательства ряда утверждений касательно таких классов алгебр Хопфа. В частности, в разделе 2.1.1 показано отсутствие алгебр Хопфа рассматриваемого вида при четном порядке группы обратимых элементов в дуальной алгебре Хопфа и антиподе, транспонирующем элементы матричной компоненты полупростого разложения (1). Доказано следующее утверждение (Теорема 2.1.1):

Теорема. *Если n четно, а матрица U диагональна, то соответствующих ей алгебр Хопфа рассматриваемый вида (1) с условиями (3) не существует.*

А также получено описание матрицы U, определяющей антипод (Теорема 2.1.2):

Теорема. *Если алгебра Хопфа H вида (1) с условиями (3) обобщенно-кокоммутативна, то в случае нечетного n соответствующая матрица U*

диагональна, а в случае четного n матрица U имеет вид

$$U = \begin{pmatrix} 0 & T \\ \pm T & 0 \end{pmatrix}, \quad \textit{где } T \textit{ — диагональная матрица.}$$

В разделе 2.1.2 показано, что кокоммутативные алгебры Хопфа являются обобщенно-кокоммутативными, т.е. использование данного понятия действительно обосновано, и, кроме того, существование обобщенно-кокоммутативной алгебры Хопфа рассматриваемого вида при некотором n влечет за собой существование некоторой кокоммутативной алгебры Хопфа при том же самом n.

Основываясь на этом, в разделе 2.2.1 показано, что обобщенно-кокоммутативные алгебры Хопфа рассматриваемого вида существуют только при $n = p^f - 1$, где p — простое, f — натуральное, что является обобщением известного аналогичного факта для кокоммутативных алгебр Хопфа вида (1). Также в разделе 2.2.1 предложена конструкция гомоморфизма Δ' для кокоммутативных алгебр Хопфа вида (1) при $n = 2^f - 1$, где f — натуральное. В заключение, эти рассуждения иллюстрируются в разделе 2.2.2 примерами трех алгебр Хопфа, построенных в данной работе для $n = 3$, $n = 4$ и $n = 7$, в дополнение к известному примеру групповой алгебры симметрической группы третьей степени.

В Главе 3 ставится задача применения полученных результатов для доказательства существования или отсутствия сильно некокоммутативных алгебр Хопфа рассматриваемого вида. Так, в разделе 3.1.1 показано, что каждой алгебре Хопфа H вида (1) с условиями (3), $\dim(H) = n(n+1)$, соответствует естественным образом некоторая мультипликативная группа M_H порядка $n+1$, умножение в которой задается коумножением в H. А именно, рассматривается множество $M^\epsilon = \{\epsilon, 1, 2, ..., n\}$, на котором можно ввести операцию умножения, естественным образом связанную с коумножением в алгебре Хопфа H. Пусть $k, p \in M^{\epsilon}$. Положим

$$k *_H p = \begin{cases} i, \text{такое что } \ \omega^{ii}_{kkpp} \neq 0, \text{ если } k, p \neq \epsilon, k \neq \sigma(p) \\ \epsilon, \text{ если } k, p \neq \epsilon, k = \sigma(p) \\ k, \text{ если } p = \epsilon \\ p, \text{ если } k = \epsilon \end{cases} .$$

Тогда как показано в разделе 3.1.1 структура $M_H = (M^{\epsilon}, *_H)$ — группа относительно операции $*_H$. Кроме того, на группе M_H можно ввести операцию сложения, связанную с умножением посредством некоторых свойств, аналогичных свойству дистрибутивности. Далее в разделе 3.1.1 доказывается, что алгебра Хопфа H обобщенно кокоммутативна тогда и только тогда, когда соответствующая мультипликативная группа M_H абелева. В разделе 3.1.2 рассматривается обратная ситуация. Из существования структуры M, наделенной двумя согласованными в некотором смысле операциями, выводится существование некоторой алгебры Хопфа. При этом найденная алгебра Хопфа единственна с точки зрения соответствия структуре M, т.е. с точностью до ненулевых коэффициентов в коумножении и антиподе.

В разделе 3.2 показано, что если алгебра Хопфа обобщенно кокоммутативна, то соответствующая структура M_H является конечным полем. Это позволяет подтвердить уже ранее полученный результат о том, что обобщенно коммутативные алгебры Хопфа существуют лишь при $n = p^f - 1$, где p – простое, а f – некое натуральное число. Далее в разделе 3.2 вводится гомоморфизм $\tau: \ M_H \to S_n$, и рассматривается случай сильной некокоммутативности H. В разделе 3.3 с использованием группы M_H и упомянутого выше гомоморфизма доказывается, что все алгебры Хопфа рассматриваемого вида (1) с условиями (3) обобщенно кокоммутативны и, соответственно, существуют лишь при $n = p^f - 1$, где p — простое, а f

— натуральное. Полученный результат является обобщением аналогичного утверждения для случая алгебр типа $(1,p;p,1)$[11], то есть алгебр вида (1) с простым $n = p$. Этот случай был полностью описан в работе С.Натале [11], где было доказано, что при $p > 2$ выполнено $p = 2^f - 1$ для некоторого натурального f.

Глава 4 продолжает в разделе 4.1 рассмотрение изучаемых алгебр Хопфа, на этот раз ограничиваясь случаем нечетного $n = 2^k + 1$. Теорема 4.1.1 дает в случае нечетного n еще более сильное ограничение на (ко)симметричность числовых коэффициентов гомоморфизма Δ', а именно $\omega^{ij}_{klpq} = \pm\omega^{ij}_{pqkl}$. Кроме того, коэффициенты ω^{ij}_{klpq} получены в явном виде как функции коэффициентов матрицы U.

Далее в разделе 4.1 большая классификационная Теорема 4.1.2 подводит итог проделанной работы и основных результатов.

Диссертация завершается небольшим разделом 4.2, где для полноты проведенной работы рассматривается проблема описания идеалов Хопфа полученных алгебр. Как уже упоминалось выше, здесь используется аналогичный результат из диссертации Р.Б.Мухатова[10], и показано, что для алгебр Хопфа с $|G| = n$ можно провести рассуждение, повторяющее доказательство для $|G| = n^2$.

Благодарности

Автор выражает глубокую благодарность научному руководителю, профессору Вячеславу Александровичу Артамонову за постановку задачи, внимание и интерес к работе, и полезные обсуждения. Автор выражает благодарность всем сотрудникам кафедры высшей алгебры за внимание к работе и доброжелательное отношение.

Работы автора по теме диссертации

1. С.Ю. Спиридонова, *О некоторых полупростых конечномерных алгебрах Хопфа размерности n(n+1)*, Мат. заметки **91** (2012), №2, 253–269

2. С.Ю. Спиридонова, *Обобщенная кокоммутативность некоторых алгебр Хопфа и их связь с конечными полями*, Алгебра и анализ **25** (2013), №5, 202-220.