ФГБОУ ВПО «Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова»

На правах рукописи

Панин Дмитрий Юрьевич

О ПОРОЖДЕНИИ МОНОТОННЫХ ФУНКЦИЙ ИЗ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ МНОГОЗНАЧНОЙ ЛОГИКИ

01.01.09 — дискретная математика и математическая кибернетика

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико–математических наук

Москва — 2014

Работа выполнена на кафедре дискретной математики Механико–математического факультета ФГБОУ ВПО «Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова».

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, профессор Колпаков Роман Максимович.

Официальные оппоненты: Аблаев Фарид Мансурович, доктор физико–математических наук, профессор (ФГАОУ ВПО «Казанский (Приволжский) Федеральный университет» государственный технический университет);

Стеценко Владимир Алексеевич, кандидат физико-математических наук, доцент (ФГБОУ ВПО «Московский педагогический государственный университет»).

Ведущая организация: ФГБУН Институт математики им. С. Л. Соболева Сибирского отделения РАН.

Защита диссертации состоится 28 февраля 2014 г. в 16^{45} на заседании диссертационного совета Д 501.001.84, созданного на базе ФГБОУ ВПО «Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова» по адресу: Российская Федерация, 119991, Москва, ГСП–1, Ленинские горы, д. 1, МГУ имени М. В. Ломоносова, Механико-математический факультет, аудитория 14–08.

С диссертацией можно ознакомиться в Фундаментальной библиотеке ФГБОУ ВПО «Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова» (Москва, Ломоносовский проспект, д. 27, сектор А, $8^{й}$ этаж).

Автореферат разослан 28 января 2014 г.

Ученый секретарь диссертационного совета
Д 501.001.84, созданного на базе
ФГБОУ ВПО МГУ,
доктор физико–математических наук,
профессор Иванов Александр Олегович

Общая характеристика работы

Актуальность темы

Диссертация относится к теории функциональных систем — одному из основных разделов дискретной математики и математической кибернетики. В работе рассматривается задача о порождении монотонных функций многозначной логики.

Одной из основных задач в теории функциональных систем является задача о полноте. В общем случае она может быть сформулирована следующим образом. Рассматривается функциональная система $(P;\varphi)$, состоящая из некоторого множества P и некоторого отображения $\varphi : \mathcal{B}(P) \to \mathcal{B}(P)$, где $\mathcal{B}(P)$ — множество всех подмножеств множества P, а φ является оператором замыкания[1]. Требуется по заданным подмножествам $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{F}$ множества P установить, имеет ли место равенство $\varphi(\mathfrak{A}) = \mathfrak{F}$, то есть порождает ли множество $\mathfrak{A}$ множество $\mathfrak{F}$. Можно уточнить эту задачу, потребовав, чтобы множество $\mathfrak{A}$ обладало некоторыми дополнительными свойствами. Например, задача о конечной порожденности заключается в том, чтобы определить, существует ли конечное множество $\mathfrak{A}$, порождающее $\mathfrak{F}$. Другим примером является задача о базируемости, которая состоит в том, чтобы определить, существует ли множество $\mathfrak{A}$, такое, что $\varphi(\mathfrak{A}) = \mathfrak{F}$ и для любого собственного подмножества $\mathfrak{A}' \subset \mathfrak{A}$ выполняется соотношение $\varphi(\mathfrak{A}') \neq \mathfrak{F}$ (такое множество $\mathfrak{A}$ называется базисом $\mathfrak{F}$).

В теории функциональных систем важное место занимает исследование множества P_k $(k \geq 2)$ всех функций k-значной логики с операцией суперпозиции. В частности, особый интерес представляет описание различных классов из решетки $\mathfrak{L}_k$ (семейства замкнутых классов функций из P_k, упорядоченных по включению). Случай $k = 2$ описан в работах Э. Поста[2,3], где было показано, что семейство $\mathfrak{L}_2$ счетно и каждый класс из семейства $\mathfrak{L}_2$ имеет конечный базис. Ряд результатов, полученных для двузначной логики, обобщается на случай многозначных логик, например, решение проблемы о функциональной полноте и описание предполных классов. Однако есть и принципиальные различия между двузначной и k-значной логикой при $k \geq 3$. В частности, Ю. И. Яновым и А. А. Мучником[4] были построены примеры замкнутых классов в P_3, как имеющих счетный базис, так

[1] Отображение $\varphi : \mathcal{B}(P) \to \mathcal{B}(P)$ называется оператором *замыкания*, если для каждых $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in \mathcal{B}(P)$ выполнены следующие свойства: 1) $\mathfrak{A} \subseteq \varphi(\mathfrak{A})$, 2) если $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$, то $\varphi(\mathfrak{A}) \subseteq \varphi(\mathfrak{B})$, 3) $\varphi(\varphi(\mathfrak{A})) = \varphi(\mathfrak{A})$.

[2] *Post E. L.* Introduction to a general theory of elementary propositions // Amer. J. Math. 1921. 43. 3. 163–185.

[3] *Post E. L.* The two-valued iterative systems of mathematical logic // Annals of Math. Studies. Princeton Univ. Press. – 1941. – 5.

[4] *Янов Ю. И., Мучник А. А.* О существовании k-значных замкнутых классов, не имеющих конечного базиса. — ДАН СССР, 1959, 127, № 1, с. 44-46.

и не имеющих базиса. Из этих результатов следует, что семейство $\mathfrak{L}_k$ при $k \geq 3$ имеет мощность континуума. Более того, в работах Р. Пёшеля и Л. А. Калужнина[5] приводятся примеры цепей и антицепей континуальной мощности в решетке $\mathfrak{L}_3$. При изучении свойств функций многозначной логики возникают существенные проблемы, связанные с труднообозримостью структуры замкнутых классов в P_k при $k \geq 3$. Поэтому одним из направлений исследований является изучение свойств отдельных семейств классов.

К наиболее изученным семействам замкнутых классов функций многозначной логики относится семейство предполных классов. В работах А. В. Кузнецова[6,7] была доказана конечность числа предполных классов в P_k при всех $k \geq 3$. Все предполные классы функций трехзначной логики были описаны С. В. Яблонским[8]. Отдельные семейства предполных классов в P_k при $k \geq 4$ были найдены С. В. Яблонским[9], Ло Чжу-Каем[10,11,12], В. В. Мартынюком[13] и другими исследователями. Полное описание всех предполных классов функций многозначной логики было получено И. Розенбергом[14,15]. Стоить отметить, что так же, как и решетка $\mathfrak{L}_k$ при $k \geq 3$, большинство решеток, состоящих из замкнутых классов, содержащихся в заданном предполном классе, имеет нетривиальную структуру. Так, в работах С. С. Марченкова[16], Я. Деметровича и Л. Ханнака[17] было показано, что каждый предполный класс в P_k при $k \geq 3$ содержит континуальное множество замкнутых подклассов тогда и только тогда, когда он не явля-

[5] *Pöschel R., Kalužnin L. A.* Funktionen- und Relationenalgebren. Berlin. 219 p. — 1979.

[6] *Кузнецов А. В.* О проблемах тождества и функциональной полноты для алгебраических систем // Труды 3-го Всесоюзного матем. съезда. Т. 2. — М.: Изд-во АН СССР, 1956. — С. 145–146.

[7] *Кузнецов А. В.* Структуры с замыканием и критерии функциональной полноты // Усп. мат. наук. 1961. Т. 16 (98). С. 201–202.

[8] *Яблонский С. В.* О функциональной полноте в трехзначном исчислении // Доклады АН СССР. — 1954 – Т. 95. № 6. — С. 1152–1156.

[9] *Яблонский С. В.* Функциональные построения в k-значной логике. // Труды математического института АН СССР им. Стеклова. — 1958. — Т. 51. — С. 5–142.

[10] *Lo Czu-Kai.* The precompleteness of a set and rings of linear functions // Acta. Sci. Natur. Univ. Jilinensis. — 1963. — V. 2. — P. 1–14 (Chinese).

[11] *Lo Czu-Kai.* On the precompleteness of the classes of functions preserving a partition // Acta. Sci. Natur. Univ. Jilinensis. — 1963. — V.2. – P. 105–116 (Chinese).

[12] *Lo Czu-Kai.* Precomplete classes defined by normal k-ary relations in k-valued logics // Acta. Sci. Natur. Univ. Jilinensis. — 1964. — V.3. – P. 39–50 (Chinese).

[13] *Мартынюк В. В.* Исследование некоторых классов функций в многозначных логиках // Проблемы кибернетики. — Т. 3. — 1960. — С. 49–60.

[14] *Rosenberg I. G.* La structure des functions de plusieurs variables sur en ensemble finil. Comptes Rendus, de l'Academ/ Paris, 260. — 1965. — P. 3817–3819.

[15] *Rosenberg I. G.* Über die funktionale Vollständigkeit in den mehrwertigen Logiken // Rozpr. CSAV. MPV. — 1970. — 80. — P. 3–93.

[16] *Марченков С. С.* О замкнутых классах самодвойственных функций многозначной логики II // Проблемы кибернетики. — Т. 40. — 1983. — С. 261–266.

[17] *Demetrovics J., Hannak L.* The number of reducts of a preprimal algebra. // Algebra Universalis. — 1983 — V. 16 — 1 — P. 178-185.

ется классом типа[18] $\mathbb{L}$.

Одним из наиболее естественных вопросов, возникающих при изучении свойств предполных классов, является вопрос об их конечной порожденности. Д. Лау[19] установила, что каждый предполный класс функций многозначной логики, за исключением классов из семейства[20] $\mathbb{O}$, имеет конечный базис, кроме того, она доказала, что классы типа $\mathbb{O}$ являются конечно-порожденными при $k \leq 7$. Г. Тардош[21] привел пример частично упорядоченного множества R_8 ширины 2, состоящего из восьми элементов, такого, что предполный класс M^{R_8} всех функций, монотонных относительно множества R_8, не имеет конечного базиса. В работах О. С. Дудаковой[22,23,24] приводится необходимое и достаточное условие конечной порожденности для предполных классов функций, монотонных относительно частично упорядоченных множеств ширины 2 с наименьшим и наибольшим элементами.

На данный момент предполные классы монотонных функций — это единственное семейство предполных классов, для которых вопрос конечной порожденности исследован не полностью, таким образом, оказалось, что это семейство является в некотором смысле наиболее сложным для изучения. В связи с этим, исследования в данной области представляют особый интерес. Также стоит отметить, что множество R_8 — это такое наименьшее по мощности частично упорядоченное множество, что предполный класс функций монотонных относительно него не имеет конечной порождающей системы. Поэтому класс M^{R_8} занимает особое положение среди классов типа $\mathbb{O}$. В настоящее время вопрос, имеет ли класс M^{R_8} бесконечный базис, остается открытым. Одним из возможных подходов к решению этой проблемы является изучение свойств «просто устроенных» подклассов M^{R_8}, а также получение критериев полноты для множеств функций из M^{R_8}, зависящих от определенного числа переменных.

---

[18]Под классами типа $\mathbb{L}$ понимаются классы линейных функций.

[19]*Lau D.* Bestimmung der Ordnung maximaler Klassen von Funktionen der k-wertigen Logik // Z. math Log und Grundl. Math. — 1978. — 24. — P. 79-96.

[20]Семейство $\mathbb{O}$ — это классы функций, монотонных относительно некоторых частично упорядоченных множеств с наименьшим и наибольшим элементами.

[21]*Tardos G.* A not finitely generated maximal clone of monotone operations // Order. — 1986. — V. 3. — P. 211–218.

[22]*Дудакова О. С.* Об одном семействе предполных классов функций k-значной логики, не имеющих конечного базиса // Вестник Московского университета. Математика. Механика. — 2006. Вып. 2. — С. 29–32.

[23]*Дудакова О. С.* О классах функций k-значной логики, монотонных относительно множеств ширины два // Вестник Московского университета. Математика. Механика. — 2008. Вып. 1. — С. 31–37.

[24]*Дудакова О. С.* О конечной порожденности предполных классов монотонных функций многозначной логики // Математические вопросы кибернетики. Вып. 17. — М.: Физматлит, 2008. — С. 13–104.

Цель работы

Целью диссертационной работы является изучение свойств замкнутых классов функций, монотонных относительно частичных порядков ширины 2 специального вида, а также получение критериев порождения функций из этих классов, зависящих от определенного числа переменных.

Основные методы исследования

В диссертации используются методы дискретной математики и математической кибернетики, в частности, методы теории функциональных систем и теории синтеза и сложности управляющих систем.

Научная новизна

Представленные в диссертации результаты являются новыми, полученными автором самостоятельно. Основные результаты диссертации следующие:

1. Показано, что каждый замкнутый класс многозначной логики, который содержит множество всех ограниченно селекторных функций и который содержится в классе функций, монотонных относительно частичного порядка ширины 2 специального вида, не имеет конечной порождающей системы; приведены примеры цепи и антицепи континуальной мощности, состоящих из замкнутых классов такого типа.
2. Найдены критерии порождения классов невозрастающих одноместных функций, монотонных относительно частично упорядоченных множеств типа башня, где замыкание рассматривается как относительно операции композиции, так и относительно операций композиции и свертки.
3. Получен критерий порождения множества всех двухместных ограниченно селекторных функций, монотонных относительно частичного порядка типа башня с максимальным элементом.
4. Найден критерий полноты для класса всех одноместных функций, монотонных относительно частичного порядка типа башня с максимальным элементом.

Теоретическая и практическая ценность работы

Диссертация имеет теоретический характер. Результаты диссертации могут найти применение в исследованиях в теории функциональных систем и в теории синтеза и сложности управляющих систем.

Апробация диссертации

Результаты диссертации докладывались автором на семинаре “Функции многозначной логики и смежные вопросы” под руководством проф. А.Б. Угольникова, проф. Р.М. Колпакова и проф. С.Б. Гашкова (неоднократно: МГУ, 2010–2013 гг.), на семинаре “Синтез и сложность управляющих систем” под руководством проф. О.М. Касим-Заде (МГУ, 2013 г.), на семинаре “Математические вопросы кибернетики” под руководством проф. О.М. Касим-Заде (МГУ, 2013 г.), на XVI Международной конференции “Проблемы теоретической кибернетики” (Нижний Новгород, 20–25 июня 2011 г.), на VIII молодежной научной школе по дискретной математике и ее приложениям (Москва, 24–29 октября, 2011 г.), на XI Международном семинаре “Дискретная математика и ее приложения” (Москва, 18–23 июня 2012 г.), на IX молодежной научной школе по дискретной математике и ее приложениям (Москва, 16–21 сентября 2013 г.), на Международных научных конференциях студентов, аспирантов и молодых ученых “Ломоносов-2011” (Москва, 11–15 апреля 2011 г.), “Ломоносов-2012” (Москва, 9–13 апреля 2012 г.), на научных конференциях “Ломоносовские чтения” (Москва, 16–22 апреля 2010 г.), “Ломоносовские чтения” (Москва, 14–23 ноября 2011 г.), “Ломоносовские чтения” (Москва, 16–24 апреля 2012 г.), “Ломоносовские чтения” (Москва, 15–26 апреля 2013 г.).

Публикации

Основные результаты диссертации опубликованы в 7 работах автора, список которых приведен в конце автореферата [1–7].

Структура и объем диссертации

Диссертационная работа состоит из Введения, пяти глав и списка литературы. Полный объем работы составляет 139 страниц. Список литературы содержит 57 наименований. Утверждения в диссертации нумеруются тройками чисел, где первое число обозначает номер главы, второе — номер раздела внутри главы, а третье — номер утверждения внутри раздела. Во Введении принята отдельная нумерация теорем, после номера каждой теоремы в скобках указан номер, который имеет соответствующее утверждение в тексте диссертации.

Краткое содержание диссертации

Во Введении кратко излагается история вопроса и описываются основные результаты диссертации.

В **главе 1** приводятся основные определения и обозначения, а также доказываются вспомогательные утверждения. В частности, определяется класс ограниченно селекторных функций, обозначаемый через $\mathfrak{M}_e^{\mathcal{P}}$, и понятие частично упорядоченного множества типа башня. Будем обозначать через $\mathbb{A}$ семейство всех конечных частично упорядоченных множеств с наименьшим и наибольшим элементами. Наименьший и наибольший элементы множества $\mathcal{P} \in \mathbb{A}$ будем обозначать через 0 и 1 соответственно. *Шириной* частично упорядоченного множества $\mathcal{P} \in \mathbb{A}$ будем называть максимальное число попарно несравнимых элементов из $\mathcal{P}$. Будем обозначать через $\mathbb{A}_2$ подсемейство семейства $\mathbb{A}$, состоящее из всех множеств, ширина которых не превосходит 2.

Пусть $\mathcal{P} \in \mathbb{A}_2$, a и b — элементы множества $\mathcal{P}$. Элементы a и b называются 1-*несравнимыми*, если они несравнимы и не имеют точной верхней грани. Элементы a и b называются 2-*несравнимыми*, если они 1-несравнимы и найдутся две их минимальные верхние грани, являющиеся 1-несравнимыми.

Пусть $\mathcal{P} \in \mathbb{A}_2$. Будем обозначать через $M^{\mathcal{P}}$ замкнутый класс всех функций k-значной логики, монотонных относительно частично упорядоченного множества $\mathcal{P}$, где $k = |\mathcal{P}|$.

Положим $\mathcal{U} = \{0, 1\}$. Пусть $1 \leq i \leq n$. Будем обозначать через $\mathfrak{M}_i^{\mathcal{P}}(n)$ множество всех функций $f(x_1, \ldots, x_n) \in M^{\mathcal{P}}$, для которых выполнены следующие условия:

1) для любых элементов $\delta_1, \ldots, \delta_n$ из множества $\mathcal{U}$ справедливо равенство $f(\delta_1, \ldots, \delta_n) = \delta_i$;
2) для любых элементов $\delta_1, \ldots, \delta_n$ из множества $\mathcal{P} \setminus \mathcal{U}$ справедливо равенство $f(\delta_1, \ldots, \delta_n) = \delta_i$.

Определим множества $\mathfrak{M}_e^{\mathcal{P}}(n)$ и $\mathfrak{M}_e^{\mathcal{P}}$ следующим образом. Положим

$$\mathfrak{M}_e^{\mathcal{P}}(n) = \bigcup_{i=1}^{n} \mathfrak{M}_i^{\mathcal{P}}(n), \quad \mathfrak{M}_e^{\mathcal{P}} = \bigcup_{n \geq 1} \mathfrak{M}_e^{\mathcal{P}}(n).$$

Функции из множества $\mathfrak{M}_e^{\mathcal{P}}$ будем для краткости называть *ограниченно селекторными* функциями. Будем обозначать через $\mathbb{T}^{\mathcal{P}}$ семейство всех замкнутых классов A, таких, что $\mathfrak{M}_e^{\mathcal{P}} \subseteq A \subseteq M^{\mathcal{P}}$.

Будем обозначать через $M_{\leq}^{\mathcal{P}}$ множество всех функций $f(x_1, \ldots, x_n)$ из класса $M^{\mathcal{P}}$, таких, что $f(\delta, \ldots, \delta) \leq \delta$, для всех $\delta \in \mathcal{P}$. Функции из множества $M_{\leq}^{\mathcal{P}}$ будем для краткости называть *невозрастающими* функциями.

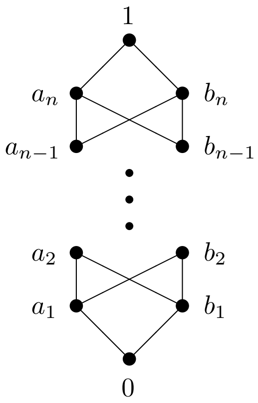

Рис. 1.

Пусть $n \geq 1$. Положим $\mathcal{P}_n = \{0, a_1, b_1, \ldots, a_n, b_n, 1\}$, $a_0 = b_0 = 0$, $a_{n+1} = b_{n+1} = 1$, $\Delta_i = \{a_i, b_i\}$, где $0 \leq i \leq n+1$. Введем на элементах множества $\mathcal{P}_n$ отношение частичного порядка $\leq$ следующим образом (см. рис. 1):

1) $\varepsilon_i \leq \varepsilon_j$ для всех $\varepsilon_i, \varepsilon_j$, таких, что $\varepsilon_i \in \Delta_i$, $\varepsilon_j \in \Delta_j$, $0 \leq i < j \leq n+1$;
2) $\varepsilon \leq \varepsilon$ для всех $\varepsilon \in \mathcal{P}_n$;
3) других сравнимых элементов нет.

Множество $\mathcal{P}_n$ будем называть *множеством типа башня высоты n с максимальным элементом.* Множество $Q_n = \mathcal{P}_n \backslash \{1\}$ будем называть *множеством типа башня высоты n без максимального элемента.* Отметим, что множество R_8 из работы Г. Тардоша[21] является множеством типа башня высоты 3 с максимальным элементом.

В **главе 2** исследуются свойства семейства $\mathbb{T}^{\mathcal{P}}$, где $\mathcal{P}$ — произвольное частично упорядоченное множество из семейства $\mathbb{A}_2$, содержащее пару 2-несравнимых элементов. Семейство $\mathbb{T}^{\mathcal{P}}$ состоит из всех замкнутых классов, содержащихся в классе $M^{\mathcal{P}}$ — множестве функций, монотонных относительно $\mathcal{P}$, и содержащих класс $\mathfrak{M}_e^{\mathcal{P}}$ — множество ограниченно селекторных функций. Из результатов О. С. Дудаковой[24] следует, что класс $M^{\mathcal{P}}$ не является конечно порожденным. В § 2.2 устанавливается отсутствие конечной порождающей системы для всех классов из семейства $\mathbb{T}^{\mathcal{P}}$. При доказательстве используется метод из работы Г. Тардоша[21] и его обобщение из работы О. С. Дудаковой[24]. А именно, для каждого значения n, такого, что $n \geq 4$, определяется некоторое множество наборов элементов множества $\mathcal{P}$, которое сохраняется всеми функциями из класса $M^{\mathcal{P}}$, зависящими от k ($k < n/2$) переменных, и доказывается, что в классе $\mathfrak{M}_e^{\mathcal{P}}$ найдется функция $f(x_1, \ldots, x_{2n+3})$, которая не сохраняет это множество наборов. В § 2.3 показано, что семейство $\mathbb{T}^{\mathcal{P}}$ содержит как цепь, так и антицепь замкнутых классов континуальной мощности. Основными результатами главы 2 являются следующие теоремы.

Теорема 1. *Пусть $\mathcal{P}$ — произвольное множество из семейства $\mathbb{A}_2$, содержащее пару 2-несравнимых элементов, A — произвольный замкнутый класс, такой, что $\mathfrak{M}_e^{\mathcal{P}} \subseteq A \subseteq M^{\mathcal{P}}$. Тогда класс A не является конечно порожденным.*

Теорема 2. *Пусть $\mathcal{P}$ — произвольное множество из семейства $\mathbb{A}_2$, содержащее пару 2-несравнимых элементов. Тогда в семействе $\mathbb{T}^{\mathcal{P}}$ найдется как цепь, так и антицепь континуальной мощности.*

В **главе 3** исследуется порождение одноместных функций из множеств $M_{\leq}^{Q_n}$ и $M_{\leq}^{\mathcal{P}_n}$ — множеств невозрастающих функций, монотонных относительно частично упорядоченных множеств типа башня ($n \geq 3$). Отметим, что множество $M_{\leq}^{\mathcal{P}_n}$ удовлетворяет соотношению $\mathfrak{M}_e^{\mathcal{P}_n} \subseteq M_{\leq}^{\mathcal{P}_n} \subseteq M^{\mathcal{P}_n}$, поэтому из теоремы 1 следует, что класс $M_{\leq}^{\mathcal{P}_n}$ не является конечно порожденным. Для удобства изложения положим $F = M_{\leq}^{Q_n}(1)$ и $F^1 = M_{\leq}^{\mathcal{P}_n}(1)$. Сначала на множествах F и F^1 вводятся операции композиции и свертки, обозначаемые через $\circ$ и $\bigtriangledown$ соответственно. Результатом применения операции свертки к функциям f и g является функция $(f \bigtriangledown g)$, определяемая следующим образом:

$$(f \bigtriangledown g)(x) = \begin{cases} x, & \text{если } g(x) \neq 0; \\ f(x), & \text{если } g(x) = 0. \end{cases}$$

Операция свертки интересна тем, что позволяет получить критерий порождения множества F относительно только операции композиции, используя критерий порождения множества F относительно операций композиции и свертки. Критерий полноты для множества всех двухместных ограниченно селекторных функций, монотонных относительно частично упорядоченного множества типа башня с максимальным элементом, также был получен с использованием операции свертки (см. главу 4).

В § 3.2 определяются множества функций G_1, Z^a, Z^b, семейство множеств функций $\mathfrak{G}$ и устанавливается критерий полноты для функциональной системы $(F, \{\circ, \bigtriangledown\})$ в терминах этих множеств. Далее, с использованием этого результата строятся множества функций D, D^1 и K^1, являющиеся единственными минимальными по включению порождающими множествами для функциональных систем $(F, \{\circ\})$, $(F^1, \{\circ\})$ и $(F^1, \{\circ, \bigtriangledown\})$ соответственно. Основные результаты главы 3 могут быть сформулированы следующим образом.

Теорема 3. *Пусть $A \subseteq F$. Замыкание множества A относительно операций $\{\circ, \bigtriangledown\}$ совпадает с F тогда и только тогда, когда $G_1 \subseteq A$ и найдется $G \in \mathfrak{G}$, такое, что $G \subseteq A$.*

Теорема 4. *Пусть $A \subseteq F$. Замыкание множества A относительно операций $\{\circ\}$ совпадает с F тогда и только тогда, когда $D \subseteq A$.*

Теорема 5. *Пусть $A \subseteq F^1$. Замыкание множества A относительно операций $\{\circ\}$ совпадает с F^1 тогда и только тогда, когда $D^1 \subseteq A$.*

Теорема 6. *Пусть $A \subseteq F^1$. Замыкание множества A относительно операций $\{\circ, \bigtriangledown\}$ совпадает с F^1 тогда и только тогда, когда $K^1 \subseteq A$.*

В **главе 4** устанавливается критерий полноты для множества $\mathfrak{M}_e^Q(2)$ — множества двухместных ограниченно селекторных функций, монотонных относительно Q, где Q является частично упорядоченным множеством типа башня высоты n ($n \geq 3$) с максимальным элементом. Отметим, что из теоремы 1 следует, что класс $\mathfrak{M}_e^Q$ не является конечно порожденным, поэтому представляется интересным получение критериев полноты для множеств функций из этого класса, зависящих от определенного числа переменных. Множество $\mathfrak{M}_e^Q(1)$ состоит только из селекторных функций, поэтому критерий полноты для него тривиален.

В § 4.1 вводятся множества одноместных функций $F_{\leq}$, $F_{\geq}$ и рассматривается множество $\widehat{F}$, которое состоит из упорядоченных пар одноместных функций, таких, что первый элемент пары принадлежит множеству $F_{\leq}$, а второй — множеству $F_{\geq}$. Далее определяются отображения ϱ_0 и ϱ_1, которые каждой функции из множества $\mathfrak{M}_e^Q(2)$ сопоставляют функцию из множеств $F_{\leq}$ и $F_{\geq}$ соответственно. После этого определяется отображение $\varrho : \mathfrak{M}_e^Q(2) \to \widehat{F}$, которое каждой двухместной функции f из множества $\mathfrak{M}_e^Q$ ставит в соответствие пару одноместных функций $(\varrho_0(f), \varrho_1(f))$. Затем на множествах $F_{\leq}$, $F_{\geq}$ определяются операции Ψ_0 и Ψ_1, являющиеся обобщениями операции свертки (см. главу 3). Далее на множестве $\widehat{F}$ рассматриваются операции специального вида $\otimes$ и $\widehat{\Psi}$, определенные следующим образом:

$$(f_0, f_1) \otimes (g_0, g_1) = (f_0 \circ g_0, f_1 \circ g_1),$$

$$\widehat{\Psi}((f_0, f_1), (g_0, g_1), (h_0, h_1)) = (\Psi_0(f_0, g_0, h_0), \Psi_1(f_1, g_1, h_1)).$$

Операции $\otimes$ и $\widehat{\Psi}$ интересны тем, что позволяют в некотором смысле сводить изучение вопросов порождения двухместных функций из множества $\mathfrak{M}_e^Q$ к изучению порождения множества $\widehat{F}$ относительно этих операций. А именно, показывается, что замыкание произвольного множества $A \subseteq \mathfrak{M}_e^Q(2)$ содержит множество $\mathfrak{M}_e^Q(2)$ тогда и только тогда, когда замыкание множества $\varrho(A) \cup \{\widehat{e}\}$ относительно операций $\otimes$ и $\widehat{\Psi}$ совпадает с $\widehat{F}$, где $\widehat{e}$ — тождественная функция на множестве $\widehat{F}$. В § 4.2 устанавливается критерий полноты для системы $(\widehat{F}, \{\otimes, \widehat{\Psi}\})$ в терминах свойств пар функций и порождения множеств $F_{\leq}$, $F_{\geq}$ относительно множеств операций $\{\circ, \Psi_0\}$, $\{\circ, \Psi_1\}$ соответственно. В § 4.3 показывается, что множество $B \subseteq F_{\leq}$ порождает $F_{\leq}$ относительно операций $\{\circ, \Psi_0\}$, тогда и только тогда, когда двойственное множество $B^* \subseteq F_{\geq}$ порождает $F_{\geq}$ относительно операций $\{\circ, \Psi_1\}$. В § 4.4 определяется множество функций G_2 и с использованием теоремы 3 (см. главу 3) доказывается критерий порождения множества $F_{\leq}$ относительно операций $\{\circ, \Psi_0\}$. Основным результатом главы 4 является следующий критерий порождения множества $\mathfrak{M}_e^Q(2)$ в терминах свойств отдельных функций из порождающего множества.

Теорема 7. *Пусть $A \subseteq \mathfrak{M}_e^Q(2)$. Соотношение $\mathfrak{M}_e^Q(2) \subseteq [A]$ выполняется тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия*

1) *для каждого $\alpha \in \Delta_1$ и для каждого $\delta \in \Delta_1 \cup \cdots \cup \Delta_n$, множество $\varrho(A)$ содержит элемент (f_0, f_1), такой, что $f_0(\alpha) = \alpha$ и $f_1(\delta) \neq \delta$;*
2) *для каждого $\delta \in \Delta_1 \cup \cdots \cup \Delta_n$ и для каждого $\alpha \in \Delta_n$, множество $\varrho(A)$ содержит элемент (f_0, f_1), такой, что $f_0(\delta) \neq \delta$ и $f_1(\alpha) = \alpha$;*
3) *для каждого множества G из семейства $\{\varrho_0(A), (\varrho_1(A))^*\}$ выполнены соотношения $G_2 \subseteq G$, $G \nsubseteq Z^a$, $G \nsubseteq Z^b$ и найдется множество $B \in \mathfrak{G}$, такое, что $B \subseteq G$.*

В **главе 5** рассматривается задача о полноте для множества $M^Q(1)$ — множества одноместных функций, монотонных относительно Q, где Q является частично упорядоченным множеством типа башня высоты n ($n \geq 3$) с максимальным элементом. Отметим, что при $n \geq 3$ множество типа башня высоты n с максимальным элементом содержит пару 2-несравнимых элементов, поэтому класс всех функций, монотонных относительно Q, не является конечно порожденным.

Сначала определяются множество H_1, состоящее из функций множества $M^Q(1)$, принимающих все значения, и отображение $\mathrm{Vect} : H_1 \to \mathbb{Z}_2^n$, которое сопоставляет каждой функции из H_1 некоторый вектор из нулей и единиц длины n. Показывается, что множество $A \subseteq H_1$ порождает множество H_1 тогда и только тогда, когда ранг[25] матрицы, составленной из векторов $\mathrm{Vect}(h)$, $h \in A$, равен n. Далее вводится понятие неразложимых множеств, которое содержательно заключается в том, что функции из неразложимого множества $A \subseteq M^Q(1)$ нельзя получить, используя только функции не из A. После этого строится семейство множеств $\mathfrak{F}$, такое, что каждое множество из построенного семейства является неразложимым. Наконец, доказывается следующий критерий полноты для систем функций из $M^Q(1)$.

Теорема 8. *Пусть $A \subseteq M^Q(1)$. Соотношение $[A] = M^Q(1)$ выполняется тогда и только тогда, когда справедливы следующие условия:*

1) $\mathrm{Rank}(\mathrm{Vect}(H_1 \cap A)) = n$;
2) *для каждого $F \in \mathfrak{F}$ выполняется $A \cap F \neq \varnothing$.*

Основная часть данной работы была выполнена под руководством доктора физико-математических наук, профессора

[25]Под рангом матрицы понимается максимальное число линейно независимых столбцов.

Александра Борисовича Угольникова, которому автор выражает благодарность за постановку задачи и научное руководство. Также за научное руководство автор благодарит доктора физико-математических наук, профессора Романа Максимовича Колпакова. Автор благодарит кандидата физико-математических наук, доцента Ольгу Сергеевну Дудакову за постоянное внимание к работе и ценные замечания. Автор выражает благодарность всем сотрудникам кафедры дискретной математики за доброжелательное отношение.

Публикации автора по теме диссертации

[1] *Панин Д. Ю.* О порождении одноместных монотонных функций многозначной логики // Вестник Московского университета. Математика. Механика. — 2010. Вып. 6. — С. 52–55.

[2] *Панин Д. Ю.* Критерии полноты для некоторых классов монотонных одноместных функций в P_k // Вестник Московского университета. Математика. Механика. — 2013. Вып. 3. — С. 57–61.

[3] *Панин Д. Ю.* Об одном семействе классов монотонных функций многозначной логики, не имеющих конечного базиса // Известия Иркутского университета. Математика. — 2013. Т. 6, № 3. С. 97–108.

[4] *Панин Д. Ю.* О некоторых свойствах одноместных монотонных функций многозначной логики // Проблемы теоретической кибернетики. Материалы XVI Международной конференеции (Нижний Новгород, 20–25 июня 2011 г.). — 2011. — С. 349–352

[5] *Панин Д. Ю.* О свойствах одноместных монотонных функций многозначной логики // Материалы VIII Молодежной научной школы по дискретной математике и ее приложениям (Москва, 24–29 октября 2011 г.). — 2011. — С. 23–25.

[6] *Панин Д. Ю.* О полноте систем монотонных одноместных функций в P_k // Дискретная математика и ее приложения: Материалы XI Международного семинара (Москва, 18–23 июня 2012 г.). — 2012. — С. 210–212.

[7] *Панин Д. Ю.* Критерий порождения некоторых множеств монотонных функций многозначной логики // Материалы IX Молодежной научной школы по дискретной математике и ее приложениям (Москва, 16–21 сентября 2013 г.). — 2013. — С. 88–92.