C*-алгебры и K-теория

(конспект лекций второй части спецкурса В. М. Мануйлова и Е. В. Троицкого 2009/10 уч.года)

Рабочая версия по состоянию на 28 мая 2010 г.

Содержание

1. Единицы и их присоединение (напоминания и уточнения)

Рассмотрим банахову алгебру $B(A)$ всех ограниченных линейных операторов на A. Сама алгебра A вложена в $B(A)$ при помощи левого регулярного представления ι:

$$\iota(a)(a') := aa'.$$

Отображение ι линейно и мультипликативно. Оно является изометрией, если $B(A)$ снабжено операторной нормой. Определим

$$A^\sim := \iota(A) + \mathbb{C}I,$$

где $I : A \to A$ — тождественный оператор. Инволюцию на $A^\sim$ определим по формуле

$$(\iota(a) + \lambda I)^* := \iota(a^*) + \overline{\lambda}I.$$

Тогда $A^\sim$ — C^*-алгебра, изоморфная A, если A с единицей (и $I \subset \iota(A)$), и изоморфная как векторное пространство $A \oplus \mathbb{C}$ в противоположном случае.

Задача 1. Вспомнить/восстановить детали.

Определение 1.1. Пусть A — C^*-алгебра. Обозначим через A^+ множество $A \oplus \mathbb{C}$, снабженное поточечным сложением и взятием сопряженного и "смешанным" умножением

$$(a, \lambda)(b, \mu) := (ab + \lambda b + \mu a, \lambda\mu).$$

Элементы A^+ будем записывать как (a, λ) или $a + \lambda$.

Предложение 1.2. *Для всякой C^*-алгебры A, A^+ является инволютивной алгеброй с единицей $1 = (1, 0)$.*

- *Алгебра A^+ изоморфна $A^\sim$, если A без единицы, и ортогональной прямой сумме $A \oplus \mathbb{C}$, если A с единицей.*
- *В частности, $A^\sim$ — C^*-алгебра с нормой, определенной по этим изоморфизмам.*
- *A является идеалом в A^+ и $A^+/A \cong \mathbb{C}$.*
- *Каждый морфизм $\alpha : A \to B$ индуцирует унитальный морфизм $\alpha^+ : A^+ \to B^+$ по формуле $a + \lambda \mapsto \alpha(a) + \lambda$, который является сюръективным (соответственно, инъективным) тогда и только тогда, когда α сюръективен (соответственно, инъективен).*

Доказательство. Пусть A без единицы. Тогда $\phi : (a, \lambda) \mapsto \iota(a) + \lambda I$ — аддитивный и мультипликативный $*$-изоморфизм A^+ на $A^\sim$. В частности, ϕ переносит на A^+ структуру (норму) C^*-алгебры с $A^\sim$. При этом A изоморфна идеалу $\phi^{-1}(\iota(A)) \subset A^+$, так что $A^+/A \cong \mathbb{C}$.

Если A с единицей, то ϕ, определенный выше, уже не инъективен. Вместо этого рассмотрим биекцию

$$\psi : A^+ \to A \oplus \mathbb{C}, \qquad (a, \lambda) \mapsto (a + \lambda 1_A) \oplus \lambda,$$

сохраняющую алгебраические структуры.

Детали и остальные утверждения оставляются в виде упражнения. $\square$

Задача 2. Доказать остающиеся утверждения.

2. Гомотопии в некоторых классах операторов

Пусть $\pi : A^+ \to \mathbb{C}$, $(a, \lambda) \mapsto \lambda$, — отбрасывание элементов A. Аналогично для матричных алгебр. *Нормализованный элемент* — такой x, для которого $\pi(x) = 1_\mathbb{C}$ (или единичная матрица в матричном случае). Обозначим через $\mathrm{GL}_n^+(A)$ и $U_n^+(A)$ нормализованные части $\mathrm{GL}_n(A^+)$ и $U_n(A^+)$.

Лемма 2.1. *Пусть A — C^*-алгебра с единицей. Тогда полярное разложение определяет деформационную ретракцию группы обратимых элементов $GL(A)$ на группу унитарных элементов $U(A)$. Аналогичное утверждение верно для групп матриц и для нормализованных элементов (в случае алгебры без единицы).*

Доказательство. Если $z \in \mathrm{GL}(A)$, то $z^*z \in \mathrm{GL}(A)$, $z^*z \geqslant 0$, и определен $|z|^{-1} := (z^*z)^{-1/2}$. При этом $u := z(z^*z)^{-1/2} \in U(A)$. Действительно,

$$u^*u = (z^*z)^{-1/2} z^*z (z^*z)^{-1/2} = 1_A,$$

$$uu^* = z(z^*z)^{-1/2}(z^*z)^{-1/2}z^* = z(z^*z)^{-1} = z \cdot z^{-1} \cdot (z^*)^{-1} \cdot z^* = 1_A.$$

Соответствующим *полярным разложением* называется представление обратимого элемента в виде произведения унитарного и положительного:

$$z = z(z^*z)^{-1/2} \cdot (z^*z)^{1/2}.$$

Определим гомотопию

$$z_t := z(z^*z)^{-1/2} \cdot (t \cdot 1_A + (1 - t) \cdot (z^*z)^{1/2}), \qquad t \in [0, 1].$$

Поскольку первый сомножитель унитарный, а второй — положительный, причем $\geqslant \min(1, \|(z^*z)^{-1/2}\|)\, 1_A$, то гомотопия пролегает в обратимых элементах. Эта (линейная) гомотопия непрерывна и соединяет $z_0 = z$ с $z_1 = u$. Для непрерывности всей ретракции надо еще заметить, что для $z \in \mathrm{GL}(A)$ отображения $z \mapsto (z^*z)^{1/2}$ и $z \mapsto (z^*z)^{-1/2}$ непрерывны по норме.

Для нормализованного $z \in A^+$ элементы $(z^*z)^{1/2}$ и $(z^*z)^{-1/2}$ также нормализованы. □

Определение 2.2. Назовем *симметрией* самосопряженный унитарный элемент: $a = a^* = a^{-1}$.

Предложение 2.3. *Любая симметрия гомотопна единичному элементу.*

Доказательство. Пусть u — симметрия, тогда $1 - u \in A_{sa}$, $(1_A - u)/2 \leqslant 1_A$, и можем определить непрерывный по норме путь в $U(A)$:

$$u_t := \exp\left(i\pi \cdot t \cdot \frac{1_A - u}{2}\right), \qquad t \in [0,1], \qquad u_0 = 1_A.$$

Далее,

$$(1_A - u)^2 = 1_A - 2u + u^2 = 1_A - 2u + 1_A = 2(1_A - u).$$

По индукции получаем

$$(1_A - u)^n = 2^{n-1}(1_A - u).$$

Поэтому

$$\begin{aligned}
u_1 &= \exp\left(i\pi \cdot \frac{1_A - u}{2}\right) = 1_A + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left[i\pi \cdot \frac{1_A - u}{2}\right]^n}{n!} = \\
&= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left[\frac{i\pi}{2}\right]^n \cdot 2^{n-1} \cdot \frac{1_A - u}{2}}{n!} = 1_A + \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(i\pi)^n}{n!}\right] \cdot \frac{1_A - u}{2} = \\
&= 1_A + \left[-1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\pi)^n}{n!}\right] \cdot \frac{1_A - u}{2} = 1 + [-1 + \exp(i\pi)] \cdot \frac{1_A - u}{2} = \\
&= 1_A + [-1 - 1] \cdot \frac{1_A - u}{2} = 1_A - 1_A + u = u.
\end{aligned}$$

□

Теорема 2.4. *Следующие элементы $M_2(\tilde{A})$*

$$\begin{pmatrix} uv & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} vu & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & v \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} v & 0 \\ 0 & u \end{pmatrix}$$

гомотопны в $GL_2(\tilde{A})$, (если $u, v \in \tilde{A}$ обратимы), и в $U_2(\tilde{A})$, (если $u, v \in \tilde{A}$ унитарны). Гомотопия может быть выбрана в нормализованных элементах.

Доказательство. Рассмотрим матрицу поворота

$$R_t := \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi t}{2} & -\sin\frac{\pi t}{2} \\ \sin\frac{\pi t}{2} & \cos\frac{\pi t}{2} \end{pmatrix}, \qquad t \in [0,1].$$

Зададим при $t \in [0,1]$ гомотопии

$$w_t := \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} R_t \begin{pmatrix} v & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} R_t^*, \qquad z_t := R_t \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & v \end{pmatrix} R_t^*. \tag{1}$$

Тогда w_t и z_t — непрерывные пути обратимых (во втором случае — унитарных) элементов, причем

$$w_0 = \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} uv & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} w_1 &= \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -u \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & v \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & v \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

$$z_0 = \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & v \end{pmatrix},$$

$$z_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -v \\ u & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v & 0 \\ 0 & u \end{pmatrix}.$$

Это дает две из трех необходимых гомотопий. Третья получается перестановкой u и v в w_t. Очевидно, что гомотопия состоит из нормализованных элементов. $\square$

Обозначим через $\mathrm{Exp}(A)$ подгруппу $\mathrm{GL}(\tilde{A})$, состоящую из всех конечных произведений элементов вида $\exp(a)$, $a \in A$. Пусть $\mathrm{GL}(\tilde{A})_0$ — связная компонента единицы (открытое и замкнутое множество).

Лемма 2.5. *Пусть G — топологическая группа, а H — ее подгруппа. Если H открыта в G, то H и замкнута в G.*

Доказательство. Поскольку $H = G \setminus \cup_{g \notin H} gH$, то H — дополнение к открытому множеству. $\square$

Предложение 2.6. *Элемент $z \in \tilde{A}$ является обратимым и гомотопным единичному тогда и только тогда, когда*

$$z = \prod_{k=1}^{n} \exp(a_k), \qquad a_1, \dots a_n \in A.$$

Таким образом,

$$\mathrm{GL}(\tilde{A})_0 = \mathrm{Exp}(A)$$

Доказательство. Очевидно, что произведение указанного вида обратимо, так как экспоненты обратимы (экспонента близкого к нулю элемента близка к единице ввиду явного представления в виде ряда, а для далеких — определяется через нормировку и близкие). Поскольку $z_t := \prod_{k=1}^{n} \exp(ta_k)$, $t \in [0,1]$ — непрерывный путь из обратимых элементов, связывающий z с единицей, то $\mathrm{Exp}(A) \subset \mathrm{GL}(\tilde{A})_0$. В силу леммы 2.5 остается доказать открытость $\mathrm{Exp}(A)$. (Здесь мы пользуемся тем, что для открытых подмножеств банахова пространства связность равносильна линейной связности.)

Возьмем произвольный элемент $z_0 = \prod_{k=1}^{n} \exp(a_k)$ в $\mathrm{Exp}(A)$. Надо показать, что любой обратимый элемент z, достаточно близкий к z_0 представляется в виде произведения экспонент. Предположим, что $\|z - z_0\| < \|z_0^{-1}\|^{-1}$, и положим $z' := z z_0^{-1}$. Тогда

$$\|z' - 1\| \leqslant \|z - z_0\| \cdot \|z_0^{-1}\| < 1,$$

так что спектр $z' - 1$ содержится в открытом единичном диске, а спектр z' лежит справа от мнимой оси. Поэтому логарифм голоморфен в окрестности спектра z' и мы можем представить $z' = \exp(\log(z'))$ (заметим, что z' не обязан быть нормальным, поэтому мы применяем голоморфное, а не непрерывное функциональное исчисление). Значит, $z = z'z_0 = \exp(\log(z'))\prod_{k=1}^n \exp(a_k) \in \operatorname{Exp}(A)$. □

Следствие 2.7. *Пусть A и B — C^*-алгебры, а $\alpha : A \to B$ — сюръективный гомоморфизм. Тогда α продолжается до такого унитального сюръективного гомоморфизма $\widetilde{\alpha} : \widetilde{A} \to \widetilde{B}$, что обратимые элементы в связной компоненте 1 в $\widetilde{B}$ могут быть подняты до обратимых элементов в связной компоненте 1 в $\widetilde{A}$. То же самое верно и для унитарных.*

В частности, $\alpha^+(\mathrm{GL}_n^+(A)_0) = \mathrm{GL}_n^+(B)_0$ и $\alpha^+(U_n^+(A)_0) = U_n^+(B)_0$, где $\alpha^+ : A^+ \to B^+$ — естественное продолжение α.

Доказательство. Гомоморфизм $\widetilde{\alpha}$ определяется следующим образом. Если и A, и B — с единицей, то $\widetilde{\alpha} := \alpha$. Если они обе без единицы, то $\widetilde{\alpha}(a, \lambda) := (\alpha(a), \lambda)$. Если A без единицы, а B имеет единицу 1_B, то $\widetilde{\alpha}(a + \lambda) := \alpha(a) + \lambda\, 1_B$. Противоположный случай исключен, поскольку α сюръективен.

Пусть $y \in B^\sim$ обратим и $y \sim_h 1$, то по предложению 2.6 $y = \prod_{k=1}^n \exp(z_k)$ для некоторых $z_1, \ldots, z_n \in B^\sim$. Поскольку $\alpha^\sim$ сюръективен, найдем поднятия $x_k \in A^\sim$ для z_k, $\alpha^\sim(x_k) = z_k$, $k = 1, \ldots, n$. Элемент $a := \prod_{k=1}^n \exp(x_k)$ лежит в связной компоненте единицы $A^\sim$, обратим, и удовлетворяет

$$\alpha^\sim(a) = \alpha^\sim\left(\prod_{k=1}^n \exp(x_k)\right) = \prod_{k=1}^n \exp\left(\alpha^\sim(x_k)\right) = \prod_{k=1}^n \exp(z_k) = y.$$

Если же y — унитарный, то рассмотрим $u := a(a^*a)^{-1/2}$. Тогда u — унитарный элемент, гомотопный a (а значит, и 1) по лемме 2.1. При этом $\alpha^\sim(u) = y(y^*y)^{-1/2} = y$.

Остальные утверждения более или менее очевидны. □

Следствие 2.8. *Если J — идеал в A, а u — унитарный элемент в $(A/J)^\sim$, то $\begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & u^* \end{pmatrix}$ может быть поднят до унитарного элемента $w \in M_2(A^\sim)$, гомотопного $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.*

Доказательство. Применяем следствие 2.7 и теорему 2.4. □

3. Проекторы и частичные изометрии

Определение 3.1. Будем называть *проектором* самосопряженный идемпотент: $p = p^* = p^2$. Два проектора, p и q, *ортогональны* если $pq = 0$ (а значит, $qp = q^*p^* = (pq)^* = 0$). Сумма двух ортогональных проекторов $p \oplus q = p + q$ — тоже проектор:

$$(p+q)(p+q) = p^2 + qp + pq + q^2 = p + 0 + 0 + q = p + q.$$

Пишем $p \leqslant q$, если $qp = pq = p$.

Предложение 3.2. *1) Пусть $p \in A$ — проектор, тогда $1 - p \in A^\sim$ — тоже проектор. Он ортогонален p и называется* ортогональным дополнением *p.*

2) Более общо: если $p \leqslant q$, то $q - p$ — проектор, ортогональный p.

Доказательство. 1) $(1-p)(1-p) = 1-2p+p^2 = 1-2p+p = 1-p$, так что $1-p$ — идемпотент, причем $(1-p)^* = 1-p^* = 1-p$. При этом

$$p\,(1-p) = p - p^2 = p - p = 0.$$

2) $(q-p)^2 = q^2 - qp - pq + p^2 = q - p - p + p = q - p$,
$p(q-p) = pq - p^2 = p - p = 0.$ □

Задача 3. Для любого проектора $0 \leqslant p \leqslant 1$. *Указание:* $p = p^*p \geqslant 0$, $\|p\| = \|p^*p\| = \|p\|^2$, $\|p\| = 0$ или 1.

Задача 4. Для любого проектора p элемент $2p-1 \in A^{\sim}$ является симметрией. *Указание:* $(2p-1)(2p-1) = 4p^2 - 2p - 2p + 1 = 1$.

Задача 5. Если v — симметрия, то $\frac{v+1}{2}$ — проектор. (Этот проектор, в отличие от симметрии из предыдущей задачи, не обязан быть гомотопным единице.)

Задача 6. Пусть $p \neq 0$ — проектор. Тогда $\|p\| = 1$ (см. задачу 3).

Задача 7. Пусть $p \neq 0, 1$ — проектор. Тогда спектр $\operatorname{Sp} p = \{0, 1\}$. Обратно, пусть v — нормальный элемент и $\operatorname{Sp} v = \{0, 1\}$. Тогда v — проектор. *Указание:* воспользоваться теоремой об отображении спектра для $f(t) = t^2$. Обратно: функция от нормального оператора определяется значениями на спектре.

Лемма 3.3. *Пусть p, q — проекторы. Тогда следующие условия эквивалентны:*
(1) $p + q$ *— проектор;*
(2) p *и* q *ортогональны;*
(3) $p + q \leqslant 1$.

Доказательство. (2)⇒(1) — было доказано выше. (1)⇒(3) — см. задачу 3. (3)⇒(2): имеем $p(p+q)p \leqslant p^2$, так что $p + pqp \leqslant p$, $pqp \leqslant 0$, откуда $pqp = 0$, так как $pqp \geqslant 0$. Значит, $0 = pqp = pqqp = p^*q^*qp = (qp)^*qp$ и $qp = 0$. □

Определение 3.4. Элемент $v \in A$ называется *частичной изометрией*, если v^*v является проектором. Если A с единицей и $v^*v = 1_A$, то v называется *изометрией.* Проектор $p := v^*v$ называется *носителем* v, а $q = vv^*$ *называется проектором на образ* v.

Лемма 3.5. *Элемент $q = vv^*$ является проектором.*

Доказательство. Очевидно, что q — самосопряженный элемент, $q \in A_{sa}$. Далее,

$$q^4 = vv^*vv^*vv^*vv^* = vp^3v^* = vpv^* = vv^*vv^* = q^2.$$

Таким образом, q^2 — проектор, и его спектр — $\{0, 1\}$. Тогда, по теореме об отображении спектров, спектр q также имеет такую форму. □

Предложение 3.6. *Имеют место соотношения*

(1) $v = vv^*v = vp = qv$,
(2) $v^* = v^*vv^* = pv^* = v^*q$.

Доказательство. Второе соотношение получается из первого сопряжением. Второе и третье равенство в первом очевидны. Докажем теперь, например, что $v = vp$, т.е. $v(1-p) = 0$. Действительно: $v(1-p)(1-p)^*v^* = v(1-p)v^* = q - q^2 = 0$. □

Лемма 3.7. *Пусть v_1 и v_2 — такие частичные изометрии, что проекторы $p_1 := v_1^* v_1$ и $p_2 := v_2^* v_2$ ортогональны: $p_1 p_2 = 0$. Тогда $v_1 v_2^* = v_2 v_1^* = 0$.*

Доказательство. Действительно, $v_1^* v_1 v_2^* v_2 = 0$, откуда, домножая, получаем

$$0 = v_1 v_1^* v_1 v_2^* v_2 v_2^* = v_1 v_2^*$$

по предложению 3.6. □

Предложение 3.8. *Пусть $a \in A$ и $0 \leqslant a \leqslant 1_A$. Если $\|a^2 - a\| < \varepsilon \leqslant 1/4$, то найдется такой проектор $p \in A$, что $\|p - a\| < 2\varepsilon \leqslant 1/2$.*

Доказательство. Пусть $t \in spec(a)$. Тогда t вещественно и $0 \leqslant t - t^2 < \varepsilon \leqslant \frac{1}{4}$. Значит, $t \in \left[0, \frac{1}{2} - \delta\right] \cup \left[\frac{1}{2} + \delta, 1\right]$, где $\delta := \frac{1}{2}\sqrt{1 - 4\varepsilon}$. Зададим $p := f(a)$, где f — непрерывная функция на спектре a:

$$f(t) = \begin{cases} 0, & \text{if } t < \frac{1}{2}; \\ 1, & \text{if } t > \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Поскольку $f = \overline{f} = f^2$, то p — проектор. Далее,

$$\sup\{\, |f(t) - t| \,,\, t \in spec(a)\} \leqslant \frac{1}{2} - \delta,$$

так что

$$\|p - a\| = \|f(a) - \mathrm{Id}(a)\| \leqslant \frac{1}{2} - \delta = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{1 - 4\varepsilon}) < 2\varepsilon,$$

поскольку $\varepsilon < \frac{1}{4}$, а $1 - 4\varepsilon < \sqrt{1 - 4\varepsilon}$. □

Определение 3.9. Проекторы p и q в C^*-алгебре A называются

- *эквивалентными*, или *эквивалентными по Мюррею–фон Нейману*, если для некоторой частичной изометрии $v \in A$ выполнено $p = v^* v$, $q = v v^*$,
- *унитарно эквивалентными*, если для некоторого унитарного элемента $u \in \widetilde{A}$ выполнено $p = u^* q u$,
- *гомотопными*, или *эквивалентными в сильном смысле*, если p и q могут быть соединены гомотопией проекторов, непрерывной по норме.

Эти отношения будут обозначаться $\sim$, $\sim_u$, и $\sim_h$, а классы — $[.]$, $[.]_u$, и $[.]_h$, соответственно.

Задача 8. В коммутативной алгебре эквивалентные проекторы равны между собой.

Задача 9. Проекторы на образ и носитель, соответствующие частичной изометрии, эквивалентны.

Задача 10. Нулевой проектор всегда эквивалентен только себе. Единичный проектор унитарно эквивалентен только себе, но может быть эквивалентен по Мюррею–фон Нейману меньшим проекторам.

Предложение 3.10. *Из унитарной эквивалентности следует эквивалентность по Мюррею–фон Нейману.*

Доказательство. Имеем $p = u^* q u$ для некоторого унитарного элемента $u \in \widetilde{A}$. Положим $v = qu$. Тогда

$$v^* v = u^* q q u = u^* q u = p, \quad v v^* = q u u^* q = q q = q.$$

□

Предложение 3.11. *Если p_1, p_2, q_1, q_2 — проекторы в A, причем*

$$p_1 \sim q_1, \quad p_2 \sim q_2, \quad p_1 \perp p_2, \quad q_1 \perp q_2,$$

то $p_1 \oplus p_2 \sim q_1 \oplus q_2$.

Доказательство. Пусть $p_1 = v_1^* v_1$, $q_1 = v_1 v_1^*$, $p_2 = v_2^* v_2$, $q_2 = v_2 v_2^*$. По лемме 3.7

$$v_1 v_2^* = v_2 v_1^* = v_1^* v_2 = v_2^* v_1 = 0.$$

Поэтому

$$(v_1 + v_2)^*(v_1 + v_2) = v_1^* v_1 + v_2^* v_2 = p_1 \oplus p_2,$$

$$(v_1 + v_2)(v_1 + v_2)^* = v_1 v_1^* + v_2 v_2^* = q_1 \oplus q_2.$$

□

Предложение 3.12. *Пусть $q = zpz^{-1}$, где $p, q \in A$ — проекторы, а $z \in \tilde{A}$ — обратимый элемент. Тогда $p \sim_u q$.*

Доказательство. Имеем: $qz = zp$, откуда $z^* q = pz^*$ и $pz^* z = z^* qz = z^* zp$. Таким образом, p коммутирует с $z^* z$, а значит, и с функциями от него, в частности, с $|z|^{-1} = (z^* z)^{-1/2}$. Для унитарного $u := z|z|^{-1}$ имеем

$$upu^* = z|z|^{-1} p |z|^{-1} z = zp|z|^{-2} z = qz|z|^{-2} z = q.$$

□

Предложение 3.13. *Проекторы p и q в A унитарно эквивалентны ($p \sim_u q$) тогда и только тогда, когда $p \sim q$ и $1 - p \sim 1 - q$.*

Доказательство. Пусть v и w — такие частичные изометрии в $\tilde{A}$, что

$$v^* v = p, \quad vv^* = q, \quad w^* w = 1 - p, \quad ww^* = 1 - q.$$

Тогда по лемме 3.7, примененной к p и $1 - p$, имеем $vw^* = wv^* = 0$, а по ней же, примененной к q и $1 - q$ — $v^* w = w^* v = 0$. Так что, полагая $u := v + w$, имеем

$$u^* u = (v^* + w^*)(v + w) = v^* v + w^* w = p + (1 - p) = 1,$$

$$uu^* = (v + w)(v^* + w^*) = vv^* + ww^* = q + (1 - q) = 1.$$

Таким образом, u — унитарный. Далее, по предложению 3.6 $w(1 - p) = w$, так что $wp = 0$, равно как и $pw^* = 0$. Поэтому

$$upu^* = (v + w)p(v^* + w^*) = vpv^* = q.$$

Обратная импликация следует из предложения 3.10. □

Предложение 3.14. *Пусть p и q — такие проекторы, что $\|p - q\| < 1$, тогда они гомотопны.*

Точнее, на множестве проекторов q, удовлетворяющих $\|p - q\| < 1$, определено такое непрерывное отображение $q \mapsto u_q$ в унитарные элементы $\tilde{A}$, что выполнены следующие условия:

(1) $q = u_q p u_q^*$,

(2) *u_q гомотопен единице внутри унитарных элементов.*

Если A без единицы, то u_q можно выбрать нормализованным: $\pi(u_q) = 1$.

Доказательство. Определим следующие две симметрии из $A^\sim$:

$$v_p := 2p - 1, \qquad v_q := 2q - 1, \qquad \text{и положим} \qquad z_q := v_q v_p + 1.$$

Тогда

(2) $qz_q = q(2q-1)(2p-1)+q = 4qp+2q-2qp-q+q = 2qp = (2q-1)(2p-1)p+p = z_q p.$

Элемент z_q обратим в $A^\sim$, поскольку при $\|p-q\| < 1$ имеем

(3) $$\|z_q - 2\| = \|v_q v_p - 1\| = \|v_q(v_p - v_q)\| \leqslant \|v_p - v_q\| = 2\|p-q\| < 2.$$

Поэтому, переписав (2) в виде $q = z_q p z_q^{-1}$ и обозначив $u_q := z_q|z_q|^{-1}$ (унитарный элемент из полярного разложения u_q), получим $q = u_q p u_q^*$ (это следствие из доказательства предложения 3.12).

Поскольку

$$\|z_{q_1} - z_{q_2}\| = \|v_{q_1} v_p - v_{q_2} v_p\| \leqslant \|v_{q_1} - v_{q_2}\| \, \|v_p\| = 2\|q_1 - q_2\|,$$

то отображение $q \mapsto Z_q$ непрерывно. Поскольку отображение $z \mapsto z|z|^{-1}$ непрерывно на $\mathrm{GL}(A^\sim)$, то, в силу (3) отображение $q \mapsto u_q$ корректно определено и непрерывно на множестве $\{q \in A \,|\, q = q^2 = q^*,\ \|p-q\| < 1\}$.

Более того, соответствие $t \mapsto z_{t,q} := tz_q + 2 - 2t$, $t \in [0,1]$, определяет гомотопию в обратимых элементах для каждого q, близкого к p, поскольку $\|z_{t,q} - 2\| = t\|z_q - 2\| < 2$. Эта гомотопия соединяет $z_{0,q} = 2$ с $z_{1,q} = z_q$. Возьмем унитарную часть $u_{t,q}$ полярного разложения $z_{t,q}$. Получим гомотопию унитарных элементов между 1 и u_q, так что $u_q \in U(A^\sim)_0$. Семейство $u_{t,q} p u_{t,q}^*$, $t \in [0,1]$, задает гомотопию проекторов, соединяющую p и q.

Наконец, если A не имеет единицы, то, поскольку $p, q \in A$, то $\pi v_p = \pi v_q = -1$, так что $\pi z_q = 2$, а $\pi u_q = 1$. □

Следствие 3.15. *Пусть $(q_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ — направленность проекторов в A, сходящаяся к проектору p, причем $\|p - q_\lambda\| < 1$ для всех $\lambda \in \Lambda$. Тогда имеется такая направленность $(u_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ унитарных элементов в A, что $\|1 - u_\lambda\| \to 0$ и $q_\lambda = u_\lambda p u_\lambda^*$ для каждого $\lambda \in \Lambda$.*

Доказательство. По конструкции из предложения 3.14 сопоставление $q_\lambda \mapsto u_\lambda$ непрерывно, поэтому u_λ сходится к $u_p = 1$, поскольку

$$z_p = (2p-1)(2p-1) + 1 = 4p - 2p - 2p + 1 + 1 = 2.$$

□

Следствие 3.16. *Пусть p и q — проекторы в A.*

(1) Тогда p гомотопен q тогда и только тогда когда существует такая гомотопия u_t унитарных элементов $\tilde{A}$, что $u_0 = 1$ и $p = u_1 q u_1^*$.

(2) Более того, если задана некоторая гомотопия p_t между p и q, то ее можно представить в виде $p_t = u_t p u_t^*$ для некоторой гомотопии u_t унитарных элементов $\tilde{A}$.

(3) Если A без единицы, то каждый u_t можно выбрать нормализованным.

(4) Если A без единицы, проектор p_0 или p_1 принадлежит A и они связаны гомотопией p_t проекторов в $\tilde{A}$, то гомотопия на самом деле пролегает в A: $p_t \in A$.

Доказательство. Достаточность в первом утверждении очевидна. Обратно, разобьем отрезок $[0,1]$ на столь малые отрезки $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = 1$, что $\|p_{t_i} - p_t\| < 1$ при $t \in [t_i, t_{i+1}]$, $i = 0, \ldots, n-1$. На каждом из отрезков применим предложение 3.14. Получим непрерывные семейства унитарных элементов $\tilde{A}$:

$$u_t^i, \quad t \in [t_i, t_{i+1}], \quad u_{t_i}^i = 1, \quad p_t = u_t^i p_{t_i} (u_t^i)^*.$$

Для $t \in [t_j, t_{j+1}]$ положим $u_t := u_t^j u_{t_j}^{j-1} \ldots u_{t_1}^0$. Это — искомая гомотопия, доказывающая второе утверждение, из которого следует более слабое: необходимость в первом.

Нормализованность следует из явной конструкции в предложении 3.14.

Наконец, четвертое утверждение следует (считаем, что $p_0 \in A$) из того, что $abc \in A$, если $b \in A$, а $a, c \in \tilde{A}$ (берем $b = p_0$, $a = u_t$, $c = u_t^*$). $\square$

Предложение 3.17. $p \sim_h q \Rightarrow p \sim_u q \Rightarrow p \sim q$.

Доказательство. Первая импликация доказана в 3.16, а вторая — в предложении 3.10. $\square$

Задача 11. Докажите, что обратные импликации не имеют места. Для второй рассмотрите $A = B(H)$, тождественный проектор и нетождественный проектор с бесконечномерным образом, а для первой — $A = M_2(C(S^3))$.

Предложение 3.18.

$$p \sim q \Rightarrow \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \sim_u \begin{pmatrix} q & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{4}$$

$$p \sim_u q \Rightarrow \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \sim_h \begin{pmatrix} q & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{5}$$

Доказательство. Пусть v — такая частичная изометрия, что $p = v^*v$ и $q = vv^*$. Рассмотрим $u = \begin{pmatrix} v & 1-q \\ 1-p & v^* \end{pmatrix} \in M_2(\tilde{A})$. Тогда (см. предложение 3.6)

$$\begin{aligned} u^*u &= \begin{pmatrix} v^* & 1-p \\ 1-q & v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v & 1-q \\ 1-p & v^* \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} v^*v + 1 - p & v^* - v^*q + v^* - pv^* \\ v - qv + v - vp & 1 - q + vv^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} uu^* &= \begin{pmatrix} v & 1-q \\ 1-p & v^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v^* & 1-p \\ 1-q & v \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} vv^* + 1 - q & v - vp + v - qv \\ v^* - pv^* + v^* - v^*q & 1 - p + v^*v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Таким образом, u — унитарный, но не нормализованный. Кроме того,

$$\begin{aligned} u \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} u^* &= \begin{pmatrix} v & 1-q \\ 1-p & v^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v^* & 1-p \\ 1-q & v \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} vp & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v^* & 1-p \\ 1-q & v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} vpv^* & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Первая часть доказана.

Пусть теперь $q = upu^*$. В соответствии с теоремой 2.4 выберем гомотопию $w_t \in U_2(\tilde{A})$, связывающую $w_0 = \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & u^* \end{pmatrix}$ и $w_1 = \begin{pmatrix} uu^* & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Тогда $p_t := w_t \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} w_t^*$ — гомотопия проекторов, связывающая

$$p_0 = \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & u^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^* & 0 \\ 0 & u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} upu^* & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

с $p_1 = \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. При этом гомотопия пролегает не во всем $M_2(\tilde{A})$, а в $M_2(A)$, поскольку сомножитель $\begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ лежит там. □

Предложение 3.19. *Если p и q — проекторы, то проекторы $\begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} q & 0 \\ 0 & p \end{pmatrix}$ гомотопны.*

Доказательство. Определим гомотопию аналогично z_t в (1). □

4. Представление в виде матричных алгебр

Пусть $p \in A$ — проектор, тогда имеем разложение

$$p \oplus (1-p) = 1 \in \tilde{A},$$

и соответственно, для любого $a \in A$:

$$a = pap + pa(1-p) + (1-p)ap + (1-p)a(1-p). \tag{6}$$

Возникает отображение

$$\varphi_p : A \to M_2(A), \qquad a \mapsto \begin{pmatrix} pap & pa(1-p) \\ (1-p)ap & (1-p)a(1-p) \end{pmatrix}.$$

Определим

$$\psi : M_2(A) \to A, \qquad \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} \mapsto a_1 + a_2 + a_3 + a_4.$$

Задача 12. Проверить, что φ_p задает C^*-изоморфизм на свой образ, причем обратное отображение задается ψ. Убедиться, что на всем $M_2(A)$ отображение ψ — не изоморфизм, и даже не гомоморфизм.

Конечно, в общей ситуации представление (6) (или φ_p) далеко от представления A в виде матричной алгебры: "слагаемые слишком не похожи друг на друга". Поэтому следует ограничиться следующей ситуацией: $p \sim (1-p)$ и A — с единицей. Тогда выберем такую частичную изометрию v, что $v^*v = p$, $vv^* = 1-p$, и определим

$$\psi_v : M_2(A) \to A, \quad \psi_v \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} := pa_{11}p + a_{12}v^* + va_{21} + va_{22}v^*,$$

$$\varphi_v : A \to M_2(pAp), \quad f_v(a) := \begin{pmatrix} pap & pav \\ v^*ap & v^*av \end{pmatrix}$$

(матричные элементы принадлежат pAp, поскольку $v = vp$, $v^* = pv^*$).

Задача 13. Проверить, что

$$\psi_v\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}=\psi_v\begin{pmatrix}p&0\\0&0\end{pmatrix}=p,\quad \psi_v\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}=\psi_v\begin{pmatrix}p&0\\0&0\end{pmatrix}=p,$$

$$\psi_v\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}=\psi_v\begin{pmatrix}0&p\\0&0\end{pmatrix}=v^*,\quad \psi_v\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}=\psi_v\begin{pmatrix}0&0\\p&0\end{pmatrix}=v.$$

Доказать, что $\varphi_v : A\to M_2(pAp)$ — C^*-изоморфизм, причем обратный задается ψ_v.

Предложение 4.1. *Пусть $p_1,\dots,p_n$ — попарно ортогональные эквивалентные проекторы в алгебре A с единицей, причем $p_1\oplus\dots\oplus p_n=1$. Тогда A изоморфна $M_n(p_1Ap_1)$.*

Доказательство. Выберем такие частичные изометрии v_k, $k=1,\dots,n$, что $v_1=p_1$, $v_k^*v_k=p_1$, $v_kv_k^*=p_k$. Тогда $v_k^*=v_k^*p_k=v_k^*v_kv_k^*=p_1v_k^*$ и $v_k=v_kp_1$ (см. предложение 3.6), так что $n\times n$-матрица

$$\varphi_n(a):=\begin{pmatrix}v_1^*av_1 & v_1^*av_2 & \dots & v_1^*av_n\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ v_n^*av_1 & v_n^*av_2 & \dots & v_n^*av_n\end{pmatrix}$$

принадлежит $M_n(p_1Ap_1)$. Пусть $\psi_n : M_n(p_1Ap_1)\to A$ сопоставляет матрице $\|b_{ij}\|$ сумму $\sum_{i,j=1}^n v_ib_{ij}v_j^*$. Тогда

$$\psi_n\circ\varphi_n(a)=\sum_{i,j=1}^n v_iv_i^*av_jv_j^*=\sum_{i,j=1}^n p_iap_j=\left(\sum_{i=1}^n p_i\right)a\left(\sum_{j=1}^n p_j\right)=a.$$

Обратно,

$$[\varphi_n\circ\psi_n(a_{ij})]_{rs}=v_r^*\left(\sum_{i,j}v_ia_{ij}v_j^*\right)v_s=p_1a_{rs}p_1=a_{rs},$$

поскольку

$$v_r^*v_i=\begin{cases}p_1, & r=i;\\ v_r^*p_rp_iv_i=0, & r\neq i.\end{cases}$$

Итак, φ_n и ψ_n взаимно обратны, а значит, биективны. Очевидно, что они сохраняют сложение и сопряжение. Проверим мультипликативность (достаточно, например, для φ_n):

$$[\varphi_n(a)\varphi_n(b)]_{rs}=\sum_{k=1}^n v_r^*av_kv_k^*bv_s=v_r^*a\left(\sum_{k=1}^n p_k\right)bv_s=v_r^*abv_s=[\varphi_n(ab)]_{rs}.$$

□

Лемма 4.2. *Пусть A — с единицей, а $w\in A$ — изометрия. Пусть $p:=ww^*$. Тогда отображение $a\mapsto waw^*$ задает изоморфизм A на pAp.*

Доказательство. Поскольку $waw^*=ww^*waw^*ww^*=pwaw^*p$ (см. предложение 3.6), то образ указанного отображения содержится в pAp. Очевидно, что оно — аддитивный $*$-гомоморфизм. Мультипликативность следует из $w^*w=1$. Сюръективность следует из представления $pap=ww^*aww^*=w(w^*aw)w^*$. Для доказательства инъективности заметим, что если $waw^*=0$, то $0=w^*(waw^*)w=a$. □

Таким образом, мы должны наложить еще одно ограничение и прийти к следующему определению.

Определение 4.3. Проектор p в унитальной C^*-алгебре A называется *половинным*, или *собственным*, если p и $1-p$ эквивалентны 1.

Замечание 4.4. Очевидно, что в этой ситуации $p \sim (1-p)$ и можно представить $p = v^*v$, где v — изометрия, а не частичная изометрия.

5. Группа Гротендика

Хотим формализовать процесс погружения полугруппы в группу, например, $\mathbb{N} \hookrightarrow \mathbb{Z}$.

Пусть H — коммутативная полугруппа (множество с ассоциативной и коммутативной операцией), а K — ее подполугруппа. Будем использовать мультипликативные обозначения, хотя ситуация коммутативная.

Зададим следующее отношение эквивалентности $\equiv$ на $H \times K$:

$$\begin{aligned}(h_1, k_1) \equiv (h_2, k_2) \quad &\Leftrightarrow \quad \exists y_1, y_2 \in K: \quad (h_1 y_1, k_1 y_1) = (h_2 y_2, k_2 y_2) \\ &\Leftrightarrow \quad \exists x \in K: \quad h_1 k_2 x = k_1 h_2 x.\end{aligned}$$

Пару (h,k) можно представлять себе как $\frac{h}{k}$.

Задача 14. Если определить просто $(h_1, k_1) \equiv (h_2, k_2) \Leftrightarrow h_1 k_2 = h_2 k_1$, то не будет транзитивности.

Лемма 5.1. *Условия, действительно, равносильны и задают отношение эквивалентности.*

Доказательство. Пусть выполнено второе. Возьмем $y_1 = k_2 x$, $y_2 = k_1 x$. Тогда

$$h_1 y_1 = h_1 k_2 x = k_1 h_2 x = h_2 y_2, \quad k_1 y_1 = k_1 k_2 x = y_2 k_2,$$

и выполнено первое. Обратно, пусть выполнено первое. Возьмем $x = y_1 y_2$. Тогда

$$h_1 k_2 x = h_1 k_2 y_1 y_2 = (h_1 y_1)(k_2 y_2) = h_2 y_2 k_1 y_1 = h_2 k_1 x,$$

и второе выполнено. Рефлексивность и симметричность (из второго варианта определения) очевидны. Пусть $(h_1, k_1) \equiv (h_2, k_2)$ и $(h_2, k_2) \equiv (h_3, k_3)$, т.е. существуют такие $x_1, x_2 \in K$, что $h_1 k_2 x_1 = k_1 h_2 x_1$, $h_2 k_3 x_2 = k_2 h_3 x_2$. Тогда

$$(h_1 k_3)(k_2 x_1 x_2) = k_1 h_2 x_1 k_3 x_2 = k_1 x_1 k_2 h_3 x_2 = (k_1 h_3)(k_2 x_1 x_3),$$

т.е. $h_1 k_3 x = k_1 h_3 x$ при $x = k_2 x_1 x_2 \in K$ и выполнено второе условие, так что $(h_1, k_1) \equiv (h_3, k_3)$. Транзитивность установлена. $\square$

Обозначим $[H][K]^{-1} := (H \times K)/\equiv$, класс эквивалентности будем обозначать $[.]$. Заметим, что на классах корректно определено умножение по формуле

$$[(h_1, k_1)]\,[(h_2, k_2)] := [(h_1 h_2, k_1, k_2)]$$

(как умножение дробей). Действительно, пусть $(h_1, k_1) \equiv (h_1', k_1')$, $(h_2, k_2) \equiv (h_2', k_2')$:

$$h_1 k_1' x_1 = k_1 h_1' x_1, \qquad h_2 k_2' x_2 = k_2 h_2' x_2, \qquad x_1, x_2 \in K.$$

Тогда

$$(h_1 h_2)(k_1' k_2')(x_1 x_2) = (h_1 k_1' x_1)(h_2 k_2' x_2) = (k_1 h_1' x_1)(k_2 h_2' x_2) = (h_1' h_2')(k_1 k_2)(x_1 x_2).$$

Мы говорим, что в H *полугруппа с сокращениями*, если $h_1h = h_2h$ влечет $h_1 = h_2$.

Заметим, что всегда $(x,x) \equiv (y,y)$, $x,y \in K$. Обозначим соответствующий класс через 1. Тогда для любых $h \in H$, $k \in K$,

$$1[(h,k)] = [(xh,xk)] = [(h,k)], \text{ поскольку } (xh)kk' = h(xk)k' \text{ для любого } k' \in K.$$

Значит, $[H][K]^{-1}$ — абелева полугруппа с единицей (моноид). Более того, $[(k_2,k_1)]$ является обратным к $[(k_1,k_2)]$, если $k_1,k_2 \in K$. Действительно,

$$[(k_1,k_2)]\,[(k_2,k_1)] = [(k_1k_2,k_2k_1)] = 1.$$

В частности, $[H][H]^{-1}$ является абелевой группой.

Определение 5.2. Абелева группа $G(H) := [H][H]^{-1}$ называется *группой Гротендика H*.

Определим отображение

$$\iota : H \to [H][K]^{-1}, \quad \iota(h) := [(hk,k)], \quad k \in K.$$

Очевидно, что отображение ι корректно определено (не зависит от k) и согласуется с интуицией для $\mathbb{N} \to \mathbb{Q}$, $n \mapsto \frac{nk}{k}$.

Предложение 5.3. *(1) Отображение ι — гомоморфизм, который инъективен тогда и только тогда, когда H — полугруппа с сокращениями на элементы K^3.*

(2) Для всякого $k \in K$ элемент $\iota(k)$ обратим в $[H][K]^{-1}$.

(3) Всякий элемент $[H][K]^{-1}$ может быть записан в виде $\iota(h)\iota(k)^{-1}$, $h \in H$, $k \in K$.

Доказательство. Гомоморфность очевидна:

$$\iota(h)\iota(g) = [(hk,k)]\,[(gk,k)] = [((hg)k^2,k^2)] = \iota(hg).$$

Пусть $\iota(h) = \iota(h')$ тогда и только тогда, когда $h = h'$. Это значит, что $h = h'$ тогда и только тогда, когда существует такой $x \in K$, что $hkkx = h'kkx$, что и требовалось в первом пункте.

Пункт второй сразу следует из рассуждения перед определением 5.2.

Наконец, выкладка

$$[(h,k)] = [(h,k)]\,[(k,k)]\,[(k,k)] = [(hk,k)]\,[(k,k^2)] = [(hk,k)]\,[(kk,k)]^{-1} = \iota(h)\iota(k)^{-1}$$

доказывает третий пункт. □

Теорема 5.4. *Полугруппа $[H][K]^{-1}$ обладает следующим универсальным свойством. Пусть S — полугруппа с единицей и $\phi : H \to S$ — такой гомоморфизм полугрупп, что K отображается в обратимые элементы S. Тогда ϕ пропускается через ι, причем единственным образом, т.е. существует и притом единственный такой гомоморфизм $\psi : [H][K]^{-1} \to S$, что диаграмма*

$$\begin{tikzcd} H \arrow[r, "\phi"] \arrow[dr, "\iota"'] & S \\ & {[H][K]^{-1}} \arrow[u, "\psi"'] \end{tikzcd}$$

коммутативна.

Доказательство. Начнем с единственности. Пусть имеется гомоморфизм ψ с требуемыми свойствами. Тогда его значение на любом элементе определено однозначно:

$$\psi[(h,k)] = \psi(\iota(h)\iota(k)^{-1}) = (\psi\circ\iota)(h)\,((\psi\circ\iota)(k))^{-1} = \phi(h)\phi(k)^{-1}$$

(мы воспользовались тем, что K отображается в обратимые). Единственность доказана, и формула дает нам единственно возможное определение ψ: $\psi[(h,k)] = \phi(h)\phi(k)^{-1}$. Тогда

$$(\psi\circ\iota)(h) = \psi[(hk,k)] = \phi(hk)\phi(k)^{-1} = \phi(h)\phi(k)\phi(k)^{-1} = \phi(h).$$

Необходимо проверить корректность и гомоморфность. Пусть $(h',k') \equiv (h,k)$, так что $h'kx = k'hx$, $x \in K$. Тогда

$$\phi(h)\phi(k')\phi(x) = \phi(h')\phi(k)\phi(x), \qquad \phi(h)\phi(k)^{-1} = \phi(h')\phi(k')^{-1}.$$

Здесь мы воспользовались тем, что $\phi(K)$ состоит из обратимых операторов. Наконец,

$$\psi[(hh',kk')] = \phi(hh')\phi(kk')^{-1} = \phi(h)\phi(k)^{-1}\phi(h')\phi(k')^{-1} = \psi[(h,k)]\psi[(h',k')].$$

□

Следствие 5.5. *Пусть $\phi : H_1 \to H_2$ — гомоморфизм коммутативных полугрупп с единицей. Тогда существует, причем единственный, гомоморфизм $\psi : G(H_1) \to G(H_2)$, дополняющий следующую диаграмму до коммутативной:*

$$\begin{tikzcd} H_1 \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "\iota"'] & H_2 \arrow[d, "\iota"] \\ G(H_1) \arrow[r, "\psi"'] & G(H_2). \end{tikzcd}$$

Доказательство. Надо взять в предыдущей теореме $S = G(H_2)$ и $\iota\phi$ в качестве ϕ, и вспомнить, что в данном случае $\iota(H_2)$ состоит из обратимых элементов. □

Предложение 5.6. *Пусть K содержит такой элемент ∞, что $h\cdot\infty = \infty$ для всех $h \in H$. Тогда $[H][K]^{-1} = 0$.*

Доказательство. Для любых $h \in H$, $k \in K$ имеем

$$(h,k) \equiv (h\cdot\infty, k\cdot\infty) = (\infty,\infty) \equiv 1.$$

□

Пример 5.7. (=упражнения)

1. Пусть $\mathbb{N} = (\mathbb{N}, +)$. Тогда $G(\mathbb{N}) = [\mathbb{N}][\mathbb{N}]^{-1} = \mathbb{Z}$, а $\iota : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ инъективно. Элементы $\mathbb{Z}$ представляются как разности натуральных чисел.
2. Пусть $\mathbb{N}^* = (\mathbb{N}, \times)$. Тогда $G(\mathbb{N}^*) = \mathbb{Q}_+$ (положительные рациональные числа по умножению), а $[\mathbb{Z}][\mathbb{N}]^{-1} = \mathbb{Q}$.
3. Если добавить к $\mathbb{N}^*$ ноль, то $G(\mathbb{N}^* \cup \{0\}) = 0$.

6. Эквивалентность проекторов в бесконечномерной матричной алгебре

Определение 6.1. Пусть $M_n(A) \hookrightarrow M_{n+1}(A)$ — вложение в левый верхний угол и дополнение нулями. Положим $M_\infty(A) := \cup_n M_n(A)$. Это — инволютивная алгебра, не являющаяся полной.

Определение 6.2. Два проектора $p, q \in M_\infty(A)$ называются *эквивалентными* $p \sim q$, если найдется такой $v \in M_\infty(A)$, что $p = v^*v$ и $q = vv^*$. Обозначим через $[.]$ соответствующие классы, а их множество — через

$$V(A) := \{[p] \,:\, p = p^* = p^2 \in M_\infty(A)\}.$$

Определим сложение классов следующим образом:

$$[p] + [q] := [\mathrm{diag}(p, q)] = [p' \oplus q'],$$

если $p' \sim p$, $q' \sim q$, $p' \perp q'$.

Замечание 6.3. Пусть $p, q \in M_n(A)$ и $p \sim q$ в $M_\infty(A)$. Тогда v, фигурирующий в определении, удовлетворяет $v = vv^*vv^*v = qvp$, так что $v \in M_n(A)$ и в этом случае имеем эквивалентность p и q в $M_n(A)$. Во-вторых, заметим, что в силу предложений 3.17 и 3.18 аналоги разных типов эквивалентности проекторов в алгебре $M_\infty(A)$ дают одинаковые эквивалентности.

Предложение 6.4. *Для всякой C^*-алгебры A, $V(A)$ — абелева полугруппа с единицей $0 = [0]$ (используем аддитивную запись).*

Для всякого морфизма C^*-алгебр $\alpha : A \to B$ индуцированное отображение α_* задается как

$$\alpha_* : V(A) \to V(B), \qquad \alpha_*[\|a_{ij}\|] := [\|\alpha(a_{ij})\|],$$

и является корректно определенным гомоморфизмом полугрупп.

Соответствие $A \mapsto V(A)$, $\alpha \mapsto \alpha_*$ является ковариантным функтором из категории C^*-алгебр в категорию абелевых полугрупп.

Доказательство. Первое утверждение очевидно.

Поскольку α — гомоморфизм C^*-алгебр, то на уровне матриц он переводит самосопряженные матрицы в самосопряженные и идемпотенты — в идемпотенты, в частности, проекторы — в проекторы. То же самое для v дает сохранение эквивалентности. Очевидно, что прямая сумма сохраняется. Таким образом, α_* — корректно определенный гомоморфизм.

Остается проверить функториальность на морфизмах: если $\beta : B \to C$ — другой морфизм, то $\beta_* \circ \alpha_* = (\beta \circ \alpha)_*$, что проверяется сразу на уровне представителей. Наконец, тождественный морфизм $\mathrm{Id} : A \to A$ индуцирует тождественное отображение $V(A)$. $\square$

Пример 6.5. 1. Пусть $A = \mathbb{C}$. Любой элемент $V(\mathbb{C})$ задается проектором в достаточно большой матричной алгебре $M_n(\mathbb{C})$. Проекторы в $M_n(\mathbb{C})$ эквивалентны в точности тогда, когда их образы имеют одинаковую размерность, так что $V(\mathbb{C}) = \mathbb{N} \cup \{0\}$.

2. Поскольку $M_n(M_k) = M_{nk}$, то из предыдущего примера следует, что $V(M_k) = \mathbb{N} \cup \{0\}$.

3. Пусть $\mathcal{H}$ — сепарабельное гильбертово пространство, $\mathcal{K} = \mathcal{K}(\mathcal{H})$ — алгебра компактных операторов, а $B = B(\mathcal{H})$ — алгебра всех ограниченных операторов. Тогда

$M_n(\mathcal{K}(\mathcal{H})) \cong \mathcal{K}(\mathcal{H}^n) \cong \mathcal{K}(\mathcal{H})$ и $M_n(B(\mathcal{H})) \cong B(\mathcal{H})$. В $\mathcal{K}(\mathcal{H})$ всякий проектор конечномерен, а в $B(\mathcal{H})$ имеются бесконечномерные проекторы. Проекторы эквивалентны тогда и только тогда, когда они имеют одинаковую размерность образов. Чтобы убедиться в этом, достаточно выбрать ортонормированный базис в образе каждого из проекторов. При этом частичные изометрии, задающие эквивалентность в случае $\mathcal{K}(\mathcal{H})$, являются компактными операторами. Таким образом,

$$V(\mathcal{K}) = \mathbb{N} \cup \{0\}, \qquad V(B) = \mathbb{N} \cup \{0, \infty\}.$$

4. Пусть $A = B/\mathcal{K}$ (алгебра Калкина). По модулю $\mathcal{K}$ все конечномерные проекторы в B эквивалентны. Таким образом, $V(B/\mathcal{K}) = \{0, \infty\}$.

7. Группа $K_0(A)$

Пусть $GV(A)$ — группа Гротендика $V(A)$, а

$$\iota_A : V(A) \to GV(A), \qquad \iota_A[p] := [p] - [0],$$

— канонический гомоморфизм. Он инъективен тогда и только тогда, когда $V(A)$ допускает сокращения (поскольку в этом случае $K = H = V(A)$ имеет единицу и $K^3 = H^3 = H = V(A)$).

Таким образом, определен ковариантный функтор из категории алгебр в категорию групп (следствие 5.5 и предложение 6.4).

Определение 7.1. Пусть $\pi : A^+ \to \mathbb{C}$ — естественное отображение. Определим K-группу

$$K_0(A) := \operatorname{Ker}(\pi_* : GV(A^+) \to \mathbb{Z}) \subset GV(A^+).$$

По-прежнему имеем $\iota_A : V(A) \to K_0(A)$, $[p] \mapsto [p] - [0]$.

Пример 7.2. Чтобы подчеркнуть роль присоединения единицы, рассмотрим $A = C_0(\mathbb{R}^2)$. Ни A, ни $M_\infty(A)$, не имеют нетривиальных проекторов, но как мы увидим из теоремы периодичности Ботта, $K_0(A) \cong \mathbb{Z}$.

Предложение 7.3. *Для всякой C^*-алгебры A имеется расщепляющаяся точная последовательность*

$$0 \to K_0(A) \xrightarrow{i_A} GV(A^+) \underset{i_*}{\overset{\pi_*}{\rightleftarrows}} \mathbb{Z} \to 0$$

(*т.е.* $\pi_* \circ i_* = \mathrm{Id}_\mathbb{Z}$). *В частности,* $GV(A^+) \cong K_0(A) \oplus \mathbb{Z}$.

Доказательство. С точки зрения точности, единственное, что не следует из определения — сюръективность π_*. Но это следует из того, что $\pi \circ i = \mathrm{Id}_\mathbb{C}$. Это же дает и расщепление.

Разложение — хорошо известный факт для расщепляющихся последовательностей. Напомним его. Мы докажем, что $GV(A^+) = i_A(K_0(A)) \oplus i_*(\mathbb{Z})$. Разложим любой элемент $g \in GV(A^+)$ следующим образом:

$$g = (g - i_* \circ \pi_*(g)) + i_* \circ \pi_*(g).$$

Тогда $\pi_*(g - i_* \circ \pi_*(g) = \pi_*(g) - \pi_*(g) = 0$, так как $\pi_* \circ i_* = \mathrm{Id}_\mathbb{Z}$. Поэтому для некоторого $s \in K_0(A)$ имеем $i_A(s) = g - i_* \circ \pi_*(g)$. Так что $g = i_A(s) + i_*(\pi_*(g))$ и $GV(A^+) = i_A(K_0(A)) + i_*(\mathbb{Z})$. Остается показать, что $i_A(K_0(A)) \cap i_*(\mathbb{Z}) = 0$. Пусть $b \in i_A(K_0(A)) \cap i_*(\mathbb{Z})$, т.е. $b = i_A(c) = i_*(z)$, $c \in K_0(A)$, $z \in \mathbb{Z}$. Тогда $z = \pi_* \circ i_*(z) = \pi_* \circ i_A(c) = 0$, откуда $b = i_*(z) = 0$. $\square$

Предложение 7.4. *Соответствие $A \mapsto K_0(A)$ является ковариантным функтором из категории C^*-алгебр в категорию абелевых групп. При этом морфизму $\alpha : A \to B$ соответствует гомоморфизм, заданный формулой*

$$\alpha_*([(x_{ij})] - [(y_{ij})]) := [(\alpha^+ x_{ij})] - [(\alpha^+ y_{ij})],$$

где (x_{ij}) и (y_{ij}) — матрицы проекторов в $M_\infty(A^+)$, а $\alpha^+ : A^+ \to B^+$ — унитальный морфизм, определенный по формуле $\alpha^+(a + \lambda) := \alpha(a) + \lambda$ (см. предложение 1.2).

Доказательство. В силу предложения 6.4 и функториальности перехода к группе Гротендика мы имеем функториальность на уровне $GV(A)$. Для $K_0(A)$ рассмотрим диаграмму

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & K_0(A) \arrow[r, "i_A"] & GV(A^+) \arrow[r, "\pi_*^A"] \arrow[d, "\alpha_*^+"] & \mathbb{Z} \arrow[d, "\mathrm{Id}"] \\
0 \arrow[r] & K_0(B) \arrow[r, "i_B"] & GV(B^+) \arrow[r, "\pi_*^B"] & \mathbb{Z}
\end{tikzcd}$$

с точными строками и коммутативным правым квадратом. Тогда для любого элемента $\gamma \in K_0(A)$ имеем

$$\pi_*^B \alpha_*^+ i_A(\gamma) = \pi_*^A i_A(\gamma) = 0.$$

Это означает, что α_*^+ ограничивается на $K_0(A)$ и определяет требуемый гомоморфизм. Очевидно, что сам α_*^+ задается формулой из формулировки теоремы. $\square$

Предложение 7.5. *Пусть $\pi_k : A_1 \oplus A_2$, $k = 1, 2$ — проекции на слагаемые ортогональной прямой суммы C^*-алгебр A_1 и A_2. Тогда индуцированные отображения π_{k*} задают изоморфизмы*

$$\pi_{1*} \oplus \pi_{2*} : V(A_1 \oplus A_2) \cong V(A_1) \oplus V(A_2),$$

$$\pi_{1*} \oplus \pi_{2*} : GV(A_1 \oplus A_2) \cong GV(A_1) \oplus GV(A_2),$$

$$\pi_{1*} \oplus \pi_{2*} : K_0(A_1 \oplus A_2) \cong K_0(A_1) \oplus K_0(A_2),$$

Доказательство. Пусть p_1 и p_2 — проекторы в $M_\infty(A_1)$ и $M_\infty(A_2)$, соответственно. Тогда $p_1 \oplus p_2$ (где прямая сумма берется для каждого матричного элемента) — проектор в $M_\infty(A_1 \oplus A_2)$ и

$$\begin{aligned}
\pi_{1*} \oplus \pi_{2*}[p_1 \oplus p_2] &= \pi_{1*}[p_1 \oplus p_2] \oplus \pi_{2*}[p_1 \oplus p_2] = \\
&= [\pi_1(p_1 \oplus p_2)] \oplus [\pi_2(p_1 \oplus p_2)] = [p_1] \oplus [p_2].
\end{aligned}$$

Это показывает, что $\pi_{1*} \oplus \pi_{2*}$ в первой строчке (для $V(A)$) сюръективен. Пусть теперь $p \in M_\infty(A_1 \oplus A_2)$. Тогда он имеет вид $p_1 \oplus p_2$, где p_1 и p_2 — проекторы в $M_\infty(A_1)$ и $M_\infty(A_2)$, соответственно. Предыдущая выкладка показывает, что p_1 и p_2 эквивалентны нулю, т.е. для достаточно большого n найдутся такие элементы (частичные изометрии) $v_1 \in M_n(A_1)$ и $v_2 \in M_n(A_2)$, что $v_1^* v_1 = p_1$, $v_1 v_1^* = 0$, $v_2^* v_2 = p_2$, $v_2 v_2^* = 0$. Тогда $p = p_1 \oplus p_2$ эквивалентен нулю при помощи $v_1 \oplus v_2$. Таким образом, имеем изоморфизм для $V(A)$. Переход к группам Гротендика функториален (по отношению к морфизмам полугрупп — в данном случае морфизм не индуцирован отображением алгебр), поэтому имеем изоморфизм для $GV(A)$.

С K_0 ситуация сложнее. Более того, само отображение пока не определено. Рассмотрим диаграмму

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & K_0(A_1 \oplus A_2) \arrow[r, "i_A"] \arrow[dr, "s"] \arrow[dd] & GV((A_1 \oplus A_2)^+) \arrow[r, "\pi_*^{A_1 \oplus A_2}"] \arrow[d, "\mu_*"] & \mathbb{Z} \arrow[d, "\Delta_*"] \\
 & & GV(A_1^+ \oplus A_2^+) \arrow[r, "\nu_*"] \arrow[d, "r", "\cong"'] & \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \arrow[d, "\mathrm{Id}"] \\
0 \arrow[r] & K_0(A_1) \oplus K(A_2) \arrow[r, "i_{A_1} \oplus i_{A_2}"] & GV(A_1^+) \oplus GV(A_2^+) \arrow[r, "\pi_*^{A_1} \oplus \pi_*^{A_2}"] & \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}.
\end{tikzcd}$$

Чтобы определить отображение (левая вертикальная стрелка) и доказать его изоморфность, мы проделаем следующие шаги:

1) проверим коммутативность треугольника и двух правых квадратов,

2) докажем точность средней строки, т.е. что s — вложение и $\operatorname{Im} s = \operatorname{Ker} \nu_*$,

3) проверим, что образ $r \circ s$ содержится в образе $i_{A_1} \oplus i_{A_2}$ (что, наконец, задаст искомое отображение),

4) применим к средней и нижней строке диаграммы лемму о пяти гомоморфизмах (лемма 7.6) и получим изоморфность этого отображения.

Начнем с того, что аккуратно определим участвующие отображения. Понимая, что $\mathbb{Z}$ — на самом деле $GV(\mathbb{C})$, а $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} = GV(\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}) = GV(\mathbb{C}) \oplus GV(\mathbb{C})$ (по доказанной части теоремы). Гомоморфизмы правого верхнего квадрата определены отображениями алгебр:

$$\pi^{A_1 \oplus A_2} : (A_1 \oplus A_2)^+ \to \mathbb{C}, \qquad (a_1, a_2, \lambda) \mapsto \lambda,$$
$$\Delta : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}, \qquad \lambda \mapsto (\lambda, \lambda),$$
$$\mu : (A_1 \oplus A_2)^+ \to A_1^+ \oplus A_2^+, \qquad (a_1, a_2, \lambda) \mapsto (a_1, \lambda, a_2, \lambda),$$
$$\nu : A_1^+ \oplus A_2^+ \to \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}, \qquad (a_1, \lambda_1, a_2, \lambda_2) \mapsto (\lambda_1, \lambda_2).$$

(Сомнения может вызвать только мультипликативность μ. Проверим:

$$\begin{aligned} \mu((a_1, a_2, \lambda)(b_1, b_2, \tau) &= \mu(a_1 b_1 + \tau a_1 + \lambda b_1, a_2 b_2 + \tau a_2 + \lambda b_2, \lambda\tau) = \\ &= (a_1 b_1 + \tau a_1 + \lambda b_1, \lambda\tau, a_2 b_2 + \tau a_2 + \lambda b_2, \lambda\tau), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mu(a_1, a_2, \lambda)\, \mu(b_1, b_2, \tau) &= (a_1, \lambda, a_2, \lambda)\,(b_1, \tau, b_2, \tau) = \\ &= (a_1 b_1 + \tau a_1 + \lambda b_1, \lambda\tau, a_2 b_2 + \tau a_2 + \lambda b_2, \lambda\tau), \end{aligned}$$

помня об определении 1.1). Отсюда сразу следует коммутативность правого верхнего треугольника на уровне алгебр, а значит, и на уровне групп Гротендика. Гомоморфизм s определен как композиция $\mu_* \circ i_A$ и треугольник коммутативен по определению. Наконец, r — изоморфизм из доказанной части данного предложения.

1) Осталось проверить коммутативность правого нижнего квадрата, что достаточно сделать на уровне матричных элементов M_∞, что очевидно. (Можно также показать, что для GV доказанный изоморфизм $\pi_{1*} \oplus \pi_{2*}$ функториален относительно отображений $A_1 \to B_1$, $A_2 \to B_2$.)

2) Прежде всего, очевидно, что $\nu_* \circ s = 0$ в силу коммутативности. Далее, рассмотрим

$$\mu' : A_1^+ \oplus A_2^+ \to (A_1 \oplus A_2)^+, \qquad (a_1, \lambda_1, a_2, \lambda_2) \mapsto (a_1, a_2, \lambda_1),$$

так что $\mu' \circ \mu = \mathrm{Id}$. Переходя к GV, убеждаемся в инъективности μ_*, а следовательно, и s. Рассмотрим теперь $(a^1_{ij}, \lambda^1_{ij}, a^2_{ij}, \lambda^2_{ij})$ и $(b^1_{ij}, \tau^1_{ij}, b^2_{ij}, \tau^2_{ij})$ из $M_\infty(A_1^+ \oplus A_2^+)$, так что их разность дает класс $x \in GV(A_1^+ \oplus A_2^+)$. Если класса x при ν_* равен нулю, то имеются такие частичные изометрии v_1 и v_2 в комплексных матрицах, что

$$(\lambda^1_{ij}) = v_1^* v_1, \quad (\tau^1_{ij}) = v_1 v_1^*, \qquad (\lambda^2_{ij}) = v_2^* v_2, \quad (\tau^2_{ij}) = v_2 v_2^*.$$

Поэтому матрица $(a^1_{ij}, \tau^1_{ij}, a^2_{ij}, \tau^2_{ij}) \in M_\infty(A_1^+ \oplus A_2^+)$ эквивалентна $(a^1_{ij}, \lambda^1_{ij}, a^2_{ij}, \lambda^2_{ij})$ (при помощи частичной изометрии $(\mathrm{Id}, v_1, \mathrm{Id}, v_2)$). Значит, x может быть представлен разностью $(a^1_{ij}, 0, a^2_{ij}, 0)$ и $(b^1_{ij}, 0, b^2_{ij}, 0)$. А эта разность уже лежит в образе μ. Итак, x лежит в образе μ_*, а значит, и s.

3) Надо проверить, что если $\pi_*^{A_1 \oplus A_2}(x) = 0$, то и $\pi_*^{A_1} \oplus \pi_*^{A_2} \circ r \circ \mu_*(x) = 0$. Это сразу следует из коммутативности правых квадратов.

4) Все готово для применения леммы о пяти гомоморфизмах. $\square$

Лемма 7.6 (о пяти гомоморфизмах)**.** *Пусть задана коммутативная диаграмма абелевых групп и гомоморфизмов*

$$\begin{tikzcd}
G_5 \arrow[r, "\alpha_5"] \arrow[d, "\gamma_5"'] & G_4 \arrow[r, "\alpha_4"] \arrow[d, "\gamma_4"'] & G_3 \arrow[r, "\alpha_3"] \arrow[d, "\gamma_3"'] & G_2 \arrow[r, "\alpha_2"] \arrow[d, "\gamma_2"'] & G_1 \arrow[d, "\gamma_1"'] \\
H_5 \arrow[r, "\beta_5"] & H_4 \arrow[r, "\beta_4"] & H_3 \arrow[r, "\beta_3"] & H_2 \arrow[r, "\beta_2"] & H_1
\end{tikzcd}$$

в которой каждая строка точна и γ_1, γ_2, γ_4 и γ_5 — изоморфизмы. Тогда γ_3 — тоже изоморфизм.

Доказательство. Покажем, что γ_3 является мономорфизм. Пусть $\gamma_3(g_3) = 0$. Тогда $\gamma_2\alpha_3(g_3) = \beta_3\gamma_3(g_3) = 0$. Следовательно, $\alpha_3(g_3) = 0$. Значит, существует такое $g_4 \in G_4$, что $\alpha_4(g_4) = g_3$. Тогда $\beta_4\gamma_4(g_4) = 0$ и существует такой элемент $h_5 \in H_5$, что $\beta_5(h_5) = \gamma_4(g_4)$. Рассмотрим такой элемент $g_5 \in G_5$, что $\gamma_5(g_5) = h_5$. Тогда $\gamma_4(\alpha_5(g_5)) = \gamma_4(g_4)$ и, значит, $g_4 = \alpha_5(g_5)$. Следовательно, $g_3 = \alpha_4\alpha_5(g_5) = 0$.

Покажем,что γ_3 — эпиморфизм. Пусть $h_3 \in H_3$. Существует такой элемент $g_2 \in G_2$, что $\gamma_2(g_2) = \beta_3(h_3)$. Тогда $\gamma_1\alpha_2(g_2) = \beta_2\beta_3(h_3) = 0$. Следовательно, $\alpha_2(g_2) = 0$, и существует такое $g_3 \in G_3$, что $\alpha_3(g_3) = g_2$. Тогда $\beta_3(h_3 - \gamma_3(g_3)) = 0$ и существует такое $h_4 \in H_4$, что $\beta_4(h_4) = h_3 - \gamma_3(g_3)$. Пусть элемент $g_4 \in G_4$ таков, что $\gamma_4(g_4) = h_4$. Тогда $g_3 + \alpha_4(g_4) \in G_3$ и $\gamma_3(g_3 + \alpha_4(g_4)) = \gamma_3(g_3) + \beta_4(h_4) = h_3$. $\square$

Предложение 7.7. *Если A имеет единицу, то $K_0(A) = GV(A)$.*

Доказательство. В этом случае $A^+ \cong A \oplus \mathbb{C}$, так что по предложению 7.5 $GV(A^+) \cong GV(A) \oplus \mathbb{Z}$. В силу предложения 7.3 $GV(A^+) \cong K_0(A) \oplus \mathbb{Z}$. $\square$

Задача 15. Докажите, что

1) $K_0(\mathbb{C}) = \mathbb{Z}$,
2) $K_0(B(\mathcal{H})) = 0$,
3) $K_0(B(\mathcal{H})/\mathcal{K}(\mathcal{H})) = 0$,
4)* $K_0(A) = \mathbb{R}$, если A — фактор типа II_1 (использовать след),
5) $K_0(\mathcal{O}_n) = \mathbb{Z}_{n-1}$, где $\mathcal{O}_n$ — алгебра Кунца.

Лемма 7.8. *Пусть p — проектор в $M_k(A^+)$, причем $\pi_{\mathbb{C}}(p)$ эквивалентен p_n в $M_k = M_k(\mathbb{C})$, где p_n — проектор на первые n базисных векторов, т.е. матрица вида*

$$p_n = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & & 0 & 0 \\ & \ddots & & \\ 0 & & 1 & \\ \hline 0 & & & 0 \end{array} \right).$$

Тогда p унитарно эквивалентен в $M_k(A^+)$ такому проектору q, что $\pi_{\mathbb{C}}(q) = p_n$, т.е. $q - p_n \in M_k(A)$.

Доказательство. Заметим, что из правил умножения в A^+ сразу следует, что $\pi_{\mathbb{C}}(p)$ — проектор. Поскольку в M_k проекторы эквивалентны тогда и только тогда, когда их ранги равны, то $\pi_{\mathbb{C}}(p) \sim p_n$ влечет $1 - \pi_{\mathbb{C}}(p) \sim 1 - p_n$, а значит, по предложению 3.13, $\pi_{\mathbb{C}}(p) \sim_u p_n$. Таким образом, найдется такая унитарная матрица $u \in M_k$, что $u\pi_{\mathbb{C}}(p)u^* = p_n$. Положим $q := upu^*$. Тогда q — проектор в $M_k(A^+)$, $p \sim_u q$ и $\pi_{\mathbb{C}}(q) = \pi_{\mathbb{C}}(upu^*) = u\pi_{\mathbb{C}}(p)u^* = p_n$. □

Лемма 7.9. *Пусть $a \in M_k(A)$. Тогда a коммутирует с p_n для некоторого $n \leqslant k$ тогда и только тогда, когда a имеет блочно-диагональный вид $\operatorname{diag}(a_1, a_2)$, $a_1 \in M_n(A)$, $a_2 \in M_{k-n}(A)$.*

При этом a — обратимый (соответственно, унитарный) тогда и только тогда, когда a_1 и a_2 — тоже обратимые (соответственно, унитарные).

Кроме того, $ap_n = p_n a = 0$ тогда и только тогда, когда a имеет блочно-диагональный вид $\operatorname{diag}(0, a_2)$, $0 \in M_n(A)$, $a_2 \in M_{k-n}(A)$.

Доказательство. Разобьем a на блоки: $a = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ так, чтобы $a_{11} \in M_n(A)$, т.е. блок имел размер $n \times n$. Соответственно, $p_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Тогда

$$ap_n = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ a_{21} & 0 \end{pmatrix}, \quad p_n a = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Отсюда сразу получаем первое утверждение. Второе в случае унитарных сразу следует из первого. Далее, $a = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix}$ обратим тогда и только тогда, когда существует такой элемент $b = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$, что

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12} \\ a_{22}b_{21} & a_{22}b_{22} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11}a_{11} & b_{12}a_{22} \\ b_{21}a_{11} & b_{22}a_{22} \end{pmatrix}.$$

Это эквивалентно обратимости a_{11} и a_{22}: $b_{11} = a_{11}^{-1}$ и $b_{22} = a_{22}^{-1}$, а также (используя это), что $b_{12} = b_{21} = 0$.

Последнее утверждение сразу следует из первого. □

Теорема 7.10. *Для любой C^*-алгебры $K_0(A)$, очевидно, является абелевой группой.*

1) *Элементы* $K_0(A)$ *могут быть представлены формальными разностями* $[p]-[q]$, *где* p *и* q *такие проекторы из* $M_k(A^+)$ *для некоторого* $k\in\mathbb{N}$, *что* $p-q\in M_k(A)$.
2) *Если* A *с единицей, то* p *и* q *могут быть выбраны в* $M_k(A)\subset M_k(A^+)$.
3) *Более того, каждый элемент* $K_0(A)$ *может быть представлен в виде* $[p]-[p_n]$, *где* p *— проектор в* $M_k(A^+)$ *при некотором* $k\geqslant n$, *а* $p-p_n\in M_k(A)$.
4) *Если* $[p]-[q]=0\in K_0(A)$, *где* $p,q\in M_k(A^+)$ *то для подходящих* $m\leqslant n$

$$\mathrm{diag}(p,p_m)\sim_h \mathrm{diag}(q,p_m)\ \text{в}\ M_{k+n}(A^+)$$

и наоборот.

Доказательство. 1) Всякий элемент $K_0(A)$ представляется формальной разностью $[p']-[q']$ с $[p']$, $[q']$ из $V(A^+)$. Мы хотим показать, что могут быть выбраны такие их представители $p\in[p']$, $q\in[q']$, что их скалярные части совпадают, т.е. $p-q\in M_\infty(A)$. По определению,

$$\pi_*([p']-[q'])=[\pi_{\mathbb{C}}(p')]-[\pi_{\mathbb{C}}(q')]=0\in K_0(\mathbb{C})=\mathbb{Z}. \tag{7}$$

Поскольку $V(\mathbb{C})=\mathbb{N}\cup\{0\}$ — полугруппа с сокращениями, то из (7) следует, что $[\pi_{\mathbb{C}}(p')]=[\pi_{\mathbb{C}}(q')]=:n\in V(\mathbb{C})$. Таким образом, $\pi_{\mathbb{C}}(p')\sim p_n\sim\pi_{\mathbb{C}}(q')$ в $M_\infty(A^+)$. Применяя лемму 7.8, находим такие проекторы $p,q\in M_\infty(A^+)$, что

$$p\sim p',\qquad q\sim q',\qquad \pi_{\mathbb{C}}(p')=p_n=\pi_{\mathbb{C}}(q').$$

Ясно, что p и q удовлетворяют требованиям. Все вычисления можно рассматривать в $M_k(A^+)$ для достаточно большого k.

2) Если A с единицей, то $K_0(A)=GV(A)$ по предложению 7.7 и элементы представляются в нужном виде.

3) Пусть $x=[q_1]-[q]\in K_0(A)$, где проекторы q_1 и q — из $M_\infty(A^+)$. Тогда $q\leqslant p_n$ для некоторого $n\in\mathbb{N}$, так что p_n-q — проектор. Можно считать, что то же самое выполняется и для q_1. Тогда мы можем рассмотреть проектор q_2 в $M_{2n}(A^+)\subset M_\infty(A^+)$, у которого нетривиальный блок такой же, как у q_2, но стоит он в правом нижнем $n\times n$-углу. Тогда $q_2\sim_u q_1$ и $q_2\perp p_n$. Таким образом, q_2, p_n-q и q попарно ортогональны, а $q_3:=q_2\oplus(p_n-q)$ — проектор. При этом

$$\begin{aligned}[q_3]-[p_n] &= [q_2\oplus(p_n-q)]-[p_n]=[q_2]+[p_n-q)]+[q]-[q]-[p_n]=\\ &= [q_1]+[(p_n-q)\oplus q]-[q]-[p_n]=[q_1]+[p_n]-[q]-[p_n]=[q_1]-[q]=x.\end{aligned}$$

При этом $0=\pi_*(x)=[\pi_{\mathbb{C}}(q_3)]-[\pi_{\mathbb{C}}(p_n)]=[\pi_{\mathbb{C}}(q_3)]-[p_n]$, так что по лемме 7.8 находим $p\sim_u q_3$, причем $p-p_n\in M_\infty(A)$ и $x=[p]-[p_n]$.

4) По определению группы Гротендика, $[p]-[q]=0\in K_0(A)$ означает, что $[p]+[r]=[q]+[r]$ в $V(A^+)$ для некоторого проектора $r\in M_m(A^+)$. Тогда $r\leqslant p_m$ в $M_\infty(A^+)$ и $r\perp(p_m-r)$, так что

$$[\mathrm{diag}(p,p_m)]=[\mathrm{diag}(p,r\oplus(p_m-r))]=[p]+[r]+[p_m-r]=[\mathrm{diag}(q,p_m)].$$

Считая, что $p,q\in M_k(A^+)$ для некоторого $k\in\mathbb{N}$, получаем, что из последнего равенства следует, что $\mathrm{diag}(p,p_m)\sim_h\mathrm{diag}(q,p_m)$ в $M_{k+n}(A^+)$ для достаточно большого $n\geqslant m$. Обратное очевидно. ∎

8. K_0 И ИНДУКТИВНЫЕ ПРЕДЕЛЫ

Пусть $\{B_i, \varphi_{ij}\}$ — направленная система C^*-алгебр, причем φ_{ij} инъективны, а значит, изометрии. Тогда C^*-индуктивным пределом $C^*[\varinjlim B_i]$ называется C^*-пополнение алгебраического предела (=объединения) B_i.

Важнейшим примером для нас будет $B_i = M_i(A) = A \otimes M_i(\mathbb{C})$, $\cup_i B_i = A \otimes M_\infty(\mathbb{C})$, $C^*[\varinjlim B_i] = A \otimes \mathcal{K}$, а также матричные алгебры над ними. Поэтому мы ограничиваемся инъективными гомоморфизмами φ_{ij}, хотя общая ситуация может также быть рассмотрена.

Обозначим через φ_k канонические вложения $B_k \to \cup_i B_i \subset C^*[\varinjlim B_i]$.

Лемма 8.1. *Пусть p — проектор в $C^*[\varinjlim B_i]$. Для любого $\varepsilon > 0$ найдутся такие $k \in \mathbb{N}$ и проектор $q \in B_k$, что $\|p - \varphi_k q\| < \varepsilon$.*

Доказательство. По определению C^*-индуктивного предела найдем k и $b \in B_k$ с достаточно малым $\|p - \varphi_k b\|$. То же будет и для положительного элемента $a = (b^* b)^{1/2}$. Тогда спектр $\varphi_k a$ близок к спектру p, т.е. сосредоточен на $[0, +\infty)$ в окрестностях 0 и 1. Спектр a тоже такой (может отличаться на 0). Пусть $f : [0, +\infty) \to [0, 1]$ — непрерывная функция, равная 0 в окрестности 0 и 1 — в окрестности 1. Тогда $q := f(a)$ — проектор, причем $\varphi_k q = \varphi_k f(a) = f(\varphi_k a)$ близок к p. Наше рассуждение близко к доказательству предложения 3.8, откуда можно извлечь более конкретные оценки. □

Лемма 8.2. *Пусть все B_i имеют единицы, а φ_{ij} — унитальны. Тогда $C^*[\varinjlim B_i]$ имеет единицу.*

Пусть u — унитарный в $C^*[\varinjlim B_i]$. Для любого $\varepsilon > 0$ найдутся такие $k \in \mathbb{N}$ и унитарный $v \in B_k$, что $\|u - \varphi_k v\| < \varepsilon$.

Доказательство. Единица имеется уже в $\varinjlim B_i$, а тем более, в $C^*[\varinjlim B_i]$ (она равна $\varphi_i(1_i)$, где 1_i — единица B_i, для любого i). В частности, все φ_i унитальны.

Выберем такое k и $a \in B_k$, что $\|u - \varphi_k a\|$ мало. В частности, $\varphi_k a$ обратим. Следовательно, a обратим, поскольку φ_k унитален. Пусть $v := a(a^* a)^{-1/2}$ — унитарный элемент из полярного разложения a. Тогда $\varphi_k v = (\varphi_k a)((\varphi_k a)^* \varphi_k a)^{-1/2}$, так как φ_k унитален. Поскольку $((\varphi_k a)^* \varphi_k a)^{-1/2}$ близко к $(u^* u)^{-1/2} = 1$, то $\varphi_k v$ близко к u. □

Лемма 8.3. *Пусть $\{B_i, \varphi_{ij}\}$ инъективная направленная система и $B = C^*[\varinjlim B_i]$. Тогда $\{B_i^+, \varphi_{ij}^+\}$ инъективная направленная система с унитальными φ_{ij}^+ и $B^+ = C^*[\varinjlim B_i^+]$.*

Доказательство. Морфизмы φ_{ij}^+ унитальны и инъективны по предложению 1.2. Очевидно, что $\varinjlim B_i^+ = \varinjlim B_i \oplus \mathbb{C}$ с умножением как в определении 1.1. Переходя к C^*-пополнениям, получаем требуемый результат. □

Лемма 8.4. *Близкие унитарные элементы гомотопны.*

Доказательство. Пусть $u \in U(A) \subset GL(A)$. Т.к. $GL(A)$ открыто, то существует открытый шар $B_\varepsilon(u) \subset GL(A)$. Пусть u' — унитарный и $\|u - u'\| < \varepsilon$, т.е. $u' \in B_\varepsilon(u)$. Тогда отрезок (прямолинейная гомотопия) соединяет u и u' в $GL(A)$. Осталось применить деформационную ретракцию $GL(A)$ на $U(A)$ (лемма 2.1). □

На самом деле, достаточно взять в доказательстве $\varepsilon = 1$, т.к. $\|u^{-1}\| = \|u\| = 1$.

Лемма 8.5.

Теорема 8.6. *Пусть $\{A_i, \Phi_{ij}\}$ — направленная система C^*-алгебр с инъективными гомоморфизмами. Тогда $\{K_0(A_i), \Phi_{ij*}\}$ — направленная система групп и*

$$K_0(C^*[\varinjlim A_i]) \cong \varinjlim K_0(A_i). \tag{8}$$

Доказательство. Обозначим $A := C^*[\varinjlim A_i]$. В силу функториальности, $\Phi_{ij*} \circ \Phi_{jk*} = \Phi_{ik*}$ и определен прямой предел полугрупп $H := \varinjlim\{V(A_i), \Phi_{ij*}\}$. Пусть $\Phi_i : A_i \to A$ и $\Psi_i : V(A_i) \to H$ — канонические гомоморфизмы. Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd} V(A_j) \arrow[r, "\Phi_{ij*}"] \arrow[drr, "\Phi_{j*}"'] & V(A_i) \arrow[r, "\Psi_i"] \arrow[dr, "\Phi_{i*}"] & H \arrow[d, "\theta"] \\ & & V(A), \end{tikzcd}$$

где (единственный) θ определен по универсальному свойству прямого предела, а именно, $\theta(\Psi_i(x)) := \Phi_{i*}(x)$. Очевидно, что все построения естественны по отношению к присоединению единицы, поэтому для доказательства теоремы достаточно проверить, что θ — изоморфизм полугрупп (и рассмотреть A_i^+ вместо A_i и т.д.).

Проверим сюръективность θ. Пусть $p \in M_n(A)$ — проектор. Выберем по лемме 8.1 проектор $q \in M_n(A_i)$ с малым $\|p - \Phi_i q\|$ для достаточно большого i. Здесь мы воспользовались очевидным равенством $M_n(C^*[\varinjlim B_i]) = C^*[\varinjlim M_n(B_i)]$ при фиксированном n. Тогда (например, по предложению 3.14)

$$[p] = [\Phi_i q] = \Phi_{i*}[q] = \theta \circ \Psi_i[q],$$

так что $[p]$ лежит в образе θ.

Проверим инъективность θ (она не получается автоматически, так как Φ_{i*} не обязаны быть инъективными). Пусть $x, y \in H$. Выбирая достаточно большие n и j_0, можно считать, что $x = \Psi_{j_0}[p_{j_0}]$, $y = \Psi_{j_0}[q_{j_0}]$ для некоторых проекторов $p_{j_0}, q_{j_0} \in M_n(A_{j_0})$. Допустим, $\theta(x) = \theta(y)$. Тогда (см. коммутативную диаграмму выше) можно считать (увеличивая n, если нужно), что $p := \Phi_{j_0}(p_{j_0}) \sim_u q := \Phi_{j_0}(q_{j_0})$ в $M_n(A)$ при помощи некоторого $u \in U_n(A^+)$, т.е. $q = upu^*$. По леммам 8.3 и 8.2, приблизим u некоторым унитарным элементом из $M_n(A_{j_1}^+)$:

$$\|u - \Phi_{j_1}^+ u_{j_1}\| < \varepsilon, \qquad u_{j_1} \in U_n(A_{j_1}^+).$$

Выбрав $j_2 = \max(j_1, j_0)$, определим

$$p_{j_2} := \Phi_{j_2 j_0}(p_{j_0}), \quad q_{j_2} := \Phi_{j_2 j_0}(q_{j_0}), \quad u_{j_2} := \Phi_{j_2 j_1}^+(u_{j_1}),$$

так что $p = \Phi_{j_2}(p_{j_2})$, $q = \Phi_{j_2}(q_{j_2})$ и $\|u - \Phi_{j_2}^+ u_{j_2}\| < \varepsilon$. Положим

$$q'_{j_2} := u_{j_2} p_{j_2} u_{j_2}^*, \qquad u' := \Phi_{j_2}^+(u_{j_2}). \tag{9}$$

Тогда $\|u - u'\| < \varepsilon$ и

$$\|\Phi_{j_2}(q'_{j_2}) - \Phi_{j_2}(q_{j_2})\| = \|u' p u'^* - u p u^*\| \leqslant 2\,\|u' - u\| < 2\varepsilon.$$

Напомним, что мы ограничились инъективными пределами, поэтому и для матричных алгебр (до рассмотрения эквивалентностей) имеем изометричность, например, Φ_{j_2} (в отличие от Φ_{j_2*}, про который мы пока ничего сказать не можем). Так что

$$\|q'_{j_2} - q_{j_2}\| < 2\varepsilon.$$

Считая, что мы выбрали $\varepsilon < 1/2$, получаем, что $q_{j_2} \sim_u q'_{j_2} \sim_u p_{j_2}$ и

$$x = \Psi_{j_0}[p_{j_0}] = \Psi_{j_2} \circ \Phi_{j_2 j_0 *}[p_{j_0}] = \Psi_{j_2}[p_{j_2}] = \Psi_{j_2}[q_{j_2}] = \Psi_{j_2} \circ \Phi_{j_2 j_0 *}[q_{j_0}] = \Psi_{j_0}[q_{j_0}] = y.$$

□

Лемма 8.7. *Пусть A — C^*-алгебра. Пусть*

$$\iota_{n1} : A \hookrightarrow M_n(A), \qquad a \mapsto \mathrm{diag}(a, 0, \ldots, 0)$$

— каноническое вложение. Тогда индуцированное отображение

$$\iota_{n1*} : K_0(A) \hookrightarrow K_0(M_n(A))$$

является изоморфизмом.

Доказательство. Достаточно доказать, что $\iota_{n1*} : V(A) \to V(M_n(A))$ является изоморфизмом. Пусть (a_{ij}) — проектор в $M_\infty(A)$. Тогда проектор $\iota_{n1}(a_{ij})$ эквивалентен (a_{ij}). Действительно, надо применить унитарные преобразования (гомотопные тождественному), которые меняют местами далекие строки (и столбцы) и строки (и столбцы) с номерами, отличными от 1, среди первых. (Далекие = те, где уже идут одни нули, первые = те, где имеются ненулевые элементы)

Таким образом, $\iota_{n1*}[(a_{ij})] = [\iota_{n1}(a_{ij})] = [(a_{ij})]$. Отсюда видно, что ι_{n1*} биективно.

□

Теорема 8.8 (стабильность K_0)**.** *Отображение $A \to A \otimes \mathcal{K}$ по формуле $a \mapsto a \otimes e_{11}$ индуцирует изоморфизм $K_0(A) \cong K_0(A \otimes \mathcal{K})$. Здесь e_{11} — проектор ранга 1 в $\mathcal{K}$.*

В частности, если A и B стабильно изоморфны, т.е. $A \otimes \mathcal{K} \cong B \otimes \mathcal{K}$, то $K_0(A) \cong K_0(B)$.

Доказательство. Пусть $\iota_{nm} : M_m(A) \hookrightarrow M_n(A)$, $a \mapsto \mathrm{diag}(a, 0)$, $n \geqslant m$, — каноническое вложение. Тогда $A \otimes \mathcal{K}$ является C^*-индуктивным пределом системы $\{M_n(A), \iota_{nm}\}$. Применим K_0 к коммутативной диаграмме

$$\begin{tikzcd} M_m(A) \arrow[rr, "\iota_{nm}"] & & M_n(A) \\ & A. \arrow[ul, "\iota_{m1}"] \arrow[ur, "\iota_{n1}"'] & \end{tikzcd}$$

Получим следующую коммутативную диаграмму изоморфизмов (по предыдущей лемме), где мы обозначили через ψ_m, ψ_n, обратные к ι_{m1*}, ι_{n1*}, соответственно:

$$\begin{tikzcd} K_0(M_m(A)) \arrow[rr, "\iota_{nm*}"] \arrow[dr, "\psi_m"'] & & K_0(M_n(A)) \arrow[dl, "\psi_n"] \\ & K_0(A). & \end{tikzcd}$$

В силу универсальности индуктивного предела существует и единственный гомоморфизм $\theta : \varinjlim K_0(M_n(A)) \to K_0(A)$. С другой стороны, по теореме 8.6 $\varinjlim K_0(M_n(A)) = K_0(A \otimes \mathcal{K}$. Возникает коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd} K_0(M_m(A)) \arrow[r, "\iota_{m*}"] \arrow[d, "\iota_{nm*}"'] \arrow[dr, "\psi_m" near start] & K_0(A \otimes \mathcal{K}) \arrow[d, "\theta"] \\ K_0(M_n(A)) \arrow[r, "\psi_n"'] \arrow[ur, "\iota_{n*}"' near start] & K_0(A), \end{tikzcd}$$

где $\iota_n : M_n(A) = A \otimes M_n \to A \otimes \mathcal{K}$ — канонические морфизмы. Тогда θ является изоморфизмом. (Это алгебраический факт, так как тут не C^*-пределы.) Действительно, так как ψ_n — изоморфизм, то θ — эпиморфизм. Пусть $\theta(x) = \theta(y)$, $x, y \in K_0(A \otimes \mathcal{K})$. Тогда для достаточно больших n_x и n_y

$$x = \iota_{n_x *}(a_x), \qquad y = \iota_{n_y *}(a_y), \qquad a_x \in K_0(M_{n_x}(A)), \quad a_y \in K_0(M_{n_y}(A)).$$

Пусть $n \geqslant \max(n_x, n_y)$, и $x_n = \iota_{nn_x}(a_x)$, $y_n = \iota_{nn_y}(a_y)$. Тогда $x = \iota_{n*}(x_n)$, $y = \iota_{n*}(y_n)$, и

$$\psi_n(x_n) = \theta \circ \iota_{n*}(x_n) = \theta(x) = \theta(y) = \theta \circ \iota_{n*}(y_n) = \psi_n(y_n).$$

Поскольку ψ_n инъективно (на самом деле даже изоморфизм), то $x_n = y_n$, откуда $x = \iota_{n*}(x_n) = \iota_{n*}(y_n) = y$. $\square$

Следствие 8.9. $K_0(\mathcal{K}) = K_0(\mathbb{C} \otimes \mathcal{K}) = K_0(\mathbb{C}) = \mathbb{Z}$.

9. Короткая точная последовательность

Лемма 9.1. *Пусть J — идеал в A, а значит, и в A^+, а $\pi_J : A^+ \to A^+/J$ — проекция. Если $x \in A^+$, то*

(1) $x \in J$ тогда и только тогда, когда $\pi_J(x) = 0$;
(2) $x \in J^+$ тогда и только тогда, когда $\pi_J(x) \in \mathbb{C}$.

Доказательство. Если $x = a + \lambda$, $x \in A$, $\lambda \in \mathbb{C}$, то $\pi_J(x) = \pi_J(a) + \lambda$. $\square$

Теорема 9.2 (полуточность $K_0(A)$)**.** *Точная последовательность*

$$0 \longrightarrow J \xrightarrow{i} A \xrightarrow{\pi} A/J \longrightarrow 0,$$

где J — идеал в A, $i : J \hookrightarrow A$ — вложение, π — проекция, индуцирует короткую точную последовательность K_0-групп

$$K_0(J) \xrightarrow{i_*} K_0(A) \xrightarrow{\pi_*} K_0(A/J).$$

Доказательство. Таким образом, мы должны доказать, что $\operatorname{Ker} \pi_* = \operatorname{Im} i_* \subset K_0(A)$. Если $x \in K_0(J)$, то мы можем записать $x = [p] - [p_n]$, где $p \in M_\infty(J^+)$ — проектор и $p - p_n \in M_\infty(J)$ (см. п.3 теоремы 7.10). Тогда

$$\pi_* \circ \iota_*(x) = [\pi_J(p)] - [\pi_J(p_n)] = 0,$$

так как $p - p_n \in M_\infty(J)$. Значит, $\operatorname{Ker} \pi_* \supset \operatorname{Im} i_*$.

Обратно, если $y \in K_0(A)$, то он может быть записан как $y = [q] - [p_n]$, где $q \in M_k(A^+)$ и $q - p_n \in M_k(A)$, $k \geqslant n$. Условие $\pi_*(y) = 0$ означает

$$\operatorname{diag}(\pi_J(q), p_d) \sim_u \operatorname{diag}(p_n, p_d) \text{ в } M_m((A/J)^+)$$

для некоторых d и m, $m \geqslant k + d$. Это следует из п.4 теоремы 7.10. Соответственно, пусть $u \in M_m((A/J)^+)$ — такой унитарный элемент, что

$$u \operatorname{diag}(\pi_J(q), p_d)\, u^* = \operatorname{diag}(p_n, p_d).$$

По следствию 2.8 найдем унитарное поднятие $w \in M_{2m}(A^+)$ элемента $\operatorname{diag}(u, u^*)$. Определим проектор $r \in M_{2m}(A^+)$ формулой

$$r := w \operatorname{diag}(q, p_d)\, w^*.$$

Тогда

$$\pi_J(r) = \operatorname{diag}(u, u^*) \operatorname{diag}(\pi_J(q), p_d) \operatorname{diag}(u^*, u) = \operatorname{diag}(p_n, p_d).$$

По лемме 9.1 $r \in M_{2m}(J^+)$. Но $[r] = [\mathrm{diag}(q, p_d)]$, так что

$$y = [q] - [p_n] = [\mathrm{diag}(q, p_d)] - [\mathrm{diag}(p_n, p_d)] = [r] - [p_{n+d}]$$

лежит в образе i_*. $\square$

10. Гомотопическая инвариантность

Определение 10.1. Пусть A и B — C^*-алгебры. Два морфизма $\alpha, \beta : A \to B$ называются *гомотопными,* если имеется такой путь в гомоморфизмах $\gamma_t : A \to B$, $t \in [0, 1]$, что $t \mapsto \gamma_t(a)$ — непрерывный по норме путь в B для каждого фиксированного $a \in A$, и $\gamma_0 = \alpha$, $\gamma_1 = \beta$. Обозначение: $\alpha \sim_h \beta$.

Морфизм $\alpha : A \to B$ называется *эквивалентностью,* если имеется такой морфизм $\beta : B \to A$, что $\beta \circ \alpha \sim_h \mathrm{Id}_A$, $\alpha \circ \beta \sim_h \mathrm{Id}_B$.

Если $\beta \circ \alpha \sim_h \mathrm{Id}_A$, $\alpha \circ \beta = \mathrm{Id}_B$, то α называется *деформационной ретракцией,* а B — *деформационным ретрактом* A.

A *стягиваема,* если Id_A гомотопно нулевому отображению.

Теорема 10.2 (гомотопическая инвариантность)**.** *Пусть* $\alpha_0, \alpha_1 : A \to B$ *— гомотопные морфизмы. Тогда индуцированные гомоморфизмы совпадают:*

$$\alpha_{0*} = \alpha_{1*} : K_0(A) \to K_0(B).$$

Доказательство. Пусть α_t, $t \in [0, 1]$, — гомотопия. Для определения гомоморфизмов K-групп мы сначала определяем унитализации отображений матричных алгебр $\alpha_t^+ : M_n(A^+) \to M_n(B^+)$, а затем определяем

$$\alpha_{t*} : K_0(A) \to K_0(B), \qquad [p] - [q] \mapsto [\alpha_t^+(p)] - [\alpha_t^+(q)].$$

Заметим, что поскольку n конечно, то (при фиксированном p) $t \mapsto \alpha_t^+(p)$ — непрерывный путь в матричных проекторах. Значит, все эти проекторы эквивалентны, и то же самое верно для q. $\square$

В заключение — небольшой список литературы в порядке близости изложения к данному курсу. Первая часть читалась близко к [1], а вторая — к [2]. Следует заметить, что обе эти книги (в отличие от остальных в списке, кроме последней $\smile$) имеют большое количество неточностей и ошибок.

Список литературы

[1] Kenneth R. Davidson, *C^*-Algebras by Example* (AMS, 1996).
[2] N. E. Wegge-Olsen, *K-Theory and C^*-Algebras* (Oxford Univ. Press, 1993).
[3] Ж. Диксмье, *C^*-алгебры и их представления* (М.: Наука, 1974).
[4] Дж. Мёрфи, *C^*-алгебры и теория операторов* (М.: Факториал, 1997).
[5] G. Pedersen, *C^*-Algebras and their Automorphism Groups* (London, Academic Press, 1979).
[6] В. М. Мануйлов, Е. В. Троицкий *C^*-гильбертовы модули* (М.: Факториал, 2001).