Список обязательных задач к зачету и экзамену
по курсу "C^*-алгебры и K-теория"
(осенний семестр 2017/18 уч. года)

(1) Пусть A — C^*-алгебра, $a \in A$, $p, q \in A$ — ортогональные проекторы (т.е. самосопряженные идемпотенты, удовлетворяющие $pq = 0$). Показать, что если a положителен и $pap = 0$, то $paq = 0$.

(2) Пусть A — C^*-алгебра, $a \in A$. Обозначим через aAa множество всех элементов вида aba, где $b \in A$, а через $\overline{aAa}$ — замыкание этого множества. C^*-подалгебра $B \subset A$ *наследственна*, если из условий $0 \le a \le b$ и $b \in B$ следует, что $a \in B$.
 (a) Проверить, что $\overline{aAa}$ — C^*-подалгебра для любого $a \in A$.
 (b) Пусть $p \in A$ — проектор. Проверить, что pAp замкнуто.
 (c) Показать, что pAp наследственна для любого проектора p.
 (d) Показать, что $\overline{aAa}$ наследственна для любого положительного $a \in A$.

(3) Пусть $X \subset \mathbb{R}$ — множество точек $1, 1/2, 1/3, \ldots$ и 0. Пусть $C(X, M_2)$ — множество всех непрерывных функций на X со значениями в матричной алгебре M_2. Положим $B_1 = \{f \in C(X, M_2) : f(0)$ диагональна$\}$, $B_2 = \{f \in C(X, M_2) :$ $f(0)$ имеет вид $\left(\begin{smallmatrix} * & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)\}$.
 (a) Показать, что $C(X, M_2)$, B_1, B_2 — C^*-алгебры.
 (b) Найти все (двухсторонние, замкнутые) идеалы в $C(X)$, $C(X, M_2)$, B_1, B_2.

(4) Пусть A — C^*-алгебра, $J \subset A$ — идеал, $a \in A$ — самосопряженный элемент. Показать, что существует такой $j \in J$, что $\|[a]\| = \|a - j\|$, где $[a] \in A/J$ — класс $a + J$ элемента a. Указание: разложить $a - \|[a]\| \cdot 1 = a_+ - a_-$ с положительными a_+, a_- и показать, что $a_+ \in J$.

(5) Пусть A — C^*-алгебра, $a \in A$ — самосопряженный элемент. Показать, что если спектр $\sigma(a)$ — бесконечное множество, то A бесконечномерна.

(6) Описать ГНС-конструкцию для C^*-алгебры $C[0, 1]$ и для положительного линейного функционала φ
 (a) $\varphi(f) = f(0)$,
 (b) $\varphi(f) = \frac{1}{2}(f(0) + f(1))$,
 (c) $\varphi(f) = \int_0^1 f(x)\, dx$,
где $f \in C[0, 1]$.

(7) Описать ГНС-конструкцию для C^*-алгебры M_n комплексных $n \times n$-матриц и для положительного линейного функционала φ
 (a) $\varphi(A) = a_{11}$,
 (b) $\varphi(A) = \mathrm{tr}(A)$,
где $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n \in M_n$.

(8) Пусть π, σ — представления C^*-алгебры A в гильбертовых пространствах H_π и H_σ, и пусть частичная изометрия $U : H_\pi \to H_\sigma$ удовлетворяет равенству $\sigma(a)U = U\pi(a)$ для любого $a \in A$. Показать, что образ (соотв. ортогональное дополнение к ядру) U является инвариантным подпространством для $\sigma(A)$ (соотв. для $\pi(A)$). (U — частичная изометрия, если U^*U и UU^* являются проекторами)

(9) (a) Пусть $M_n(A)$ — множество всех $n \times n$-матриц с коэффициентами из C^*-алгебры A. Показать, что на $M_n(A)$ существует C^*-норма.
(b) Пусть A — C^*-алгебра с нормой $\| \cdot \|$, и пусть $\| \cdot \|'$ — другая норма на A, эквивалентная первой норме. Показать, что если $\| \cdot \|'$ — C^*-норма, то обе нормы совпадают. Вывести из этого единственность C^*-нормы на $M_n(A)$.

(10) Пусть φ — состояние на C^*-алгебре A. Предположим, что для некоторого самосопряженного элемента $a \in A$ выполнено равенство $\varphi(a^2) = \varphi(a)^2$. Показать, что из этого следует, что $\varphi(ab) = \varphi(ba) = \varphi(a)\varphi(b)$ для любого $b \in A$.

(11) Пусть $A = c$ — C^*-алгебра сходящихся последовательностей комплексных чисел, $c = \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} : a_n \in \mathbb{C}; \lim_{n\to\infty} a_n$ существует$\}$. Рассмотрим ее как C^*-подалгебру алгебры $\mathbb{B}(l_2)$ ограниченных операторов гильбертова пространства l_2 суммируемых с квадратом последовательностей. Найти первый и второй коммутант, A' и A'', и (независимо) слабое замыкание A в $\mathbb{B}(l_2)$.

(12) (a) Показать, что слабая топология строго слабее сильной топологии.
(b) Пусть $P \subset \mathbb{B}(H)$ — множество всех (самосопряженных) проекторов в гильбертовом пространстве. Показать, что ограничения слабой и сильной топологии на P совпадают.
(c) Показать, что сильный предел последовательности (самосопряженных) проекторов является проектором.

(13) Пусть $H_n \subset H$ — подпространство гильбертова пространства H, порожденное первыми n векторами ортонормированного базиса. В множестве всех последовательностей $(m_1, m_2, \ldots)$, где $m_k \in \mathbb{B}(H_n) \subset \mathbb{B}(H)$, рассмотрим подмножество A всех таких последовательностей, что
- $\sup_k \|m_k\| < \infty$;
- последовательности $(m_1, m_2, \ldots)$ и $(m_1^*, m_2^*, \ldots)$ являются сходящимися в сильной топологии.

Показать, что A — C^*-алгебра, и что отображение $(m_1, m_2, \ldots) \mapsto$ $s\text{-}\lim_{k\to\infty} m_k \in \mathbb{B}(H)$ является сюръективным $*$-гомоморфизмом $A \to \mathbb{B}(H)$.

(14) Пусть A — коммутативная C^*-алгебра, π — ее неприводимое представление в гильбертовом пространстве H. Показать, что $\dim H = 1$.

(15) Пусть $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ — ортонормированный базис гильбертова пространства H, и пусть операторы a, b задаются равенствами $ae_i = e_{2i}$; $be_i = e_{2i-1}$. Пусть $E = C^*(a, b) \subset \mathbb{B}(H)$ — C^*-алгебра, порожденная a и b. Проверить ограниченность a и b и доказать равенства $a^*a = b^*b = 1$, $aa^* + bb^* = 1$.