16 (Лемма). *Если связное хаусдорфово пространство представляется как объединение двух своих открытых подмножеств, гомеоморфных $\mathbb{R}^1$, то оно гомеоморфно $\mathbb{R}^1$ или S^1.*

Доказательство. Пусть $X = U \cup V$ — указанное представление и $\varphi\colon U \to \mathbb{R}^1$, $\psi\colon V \to \mathbb{R}^1$ — гомеоморфизмы. Исключим из рассмотрения тривиальные случаи $U \subset V$ и $V \subset U$, в которых X гомеоморфно $\mathbb{R}^1$, и изучим множества $\varphi(U \cap V)$ и $\psi(U \cap V)$.

Так как пересечение $U \cap V$ открыто в U и в V, то множества $\varphi(U \cap V)$ и $\psi(U \cap V)$ открыты в $\mathbb{R}^1$ и их компоненты являются интервалами. Среди этих интервалов нет конечных; действительно, если бы, например, множество $\varphi(U \cap V)$ обладало конечной компонентой (a, b), то множество $\varphi^{-1}((a, b))$ было бы одновременно замкнуто в V (как пересечение компактного и, значит, замкнутого множества $\varphi^{-1}([a, b])$ с V) и открыто в V, из чего следовало бы, что $V = \varphi^{-1}((a, b)) \subset U$. Кроме того, $\varphi(U \cap V) \neq \mathbb{R}^1$, так как иначе $U \subset V$, и $\psi(U \cap V) \neq \mathbb{R}^1$, так как иначе $V \subset U$. Таким образом, не исключены лишь два случая: (i) каждое из множеств $\varphi(U \cap V)$, $\psi(U \cap V)$ представляет собой открытую полупрямую; (ii) каждое из множеств $\varphi(U \cap V)$, $\psi(U \cap V)$ состоит из двух непересекающихся открытых полупрямых.

Так как φ и ψ допускают умножение на -1, то можно считать, что в случае (i) множество $\varphi(U \cap V)$ имеет вид $(-\infty, a)$, а множество $\psi(U \cap V)$ — вид (b, ∞). Рассмотрим сквозное отображение

$$(-\infty, a) = \varphi(U \cap V) \xrightarrow{\text{ab}\,\varphi^{-1}} U \cap V \xrightarrow{\text{ab}\,\psi} \psi(U \cap V) = (b, \infty).$$

Так как оно взаимно однозначно и непрерывно, то оно монотонно, и ясно, что оно возрастает (если бы оно убывало, то точки $\varphi^{-1}(a)$ и $\psi^{-1}(b)$ не имели бы в X непересекающихся окрестностей). Поэтому $X = \psi^{-1}((-\infty, \psi(x_0)]) \cup \varphi^{-1}([\varphi(x_0), \infty))$, где x_0 — какая-нибудь точка из $U \cap V$, откуда видно, что в случае (i) X гомеоморфно $\mathbb{R}^1$.

В случае (ii) $\varphi(U \cap V) = (-\infty, a_1) \cup (a_2, \infty)$, $\psi(U \cap V) = (-\infty, b_1) \cup (b_2, \infty)$ с некоторыми a_1, a_2, b_1, b_2 ($a_1 < a_2$, $b_1 < b_2$) и можно считать, что сквозной гомеоморфизм

$$\varphi(U \cap V) \xrightarrow{\text{ab}\,\varphi^{-1}} U \cap V \xrightarrow{\text{ab}\,\psi} \psi(U \cap V)$$

отображает $(-\infty, a_1)$ на (b_2, ∞), а (a_2, ∞) на $(-\infty, b_1)$. Обе функции $(-\infty, a_1) \to (b_2, \infty)$, $(a_2, \infty) \to (-\infty, b_1)$, служащие сокращениями этого сквозного гомеоморфизма, возрастают (если бы, например, первая убывала, то точки $\varphi^{-1}(a_1)$ и $\psi^{-1}(b_2)$ не имели бы в X непересекающихся окрестностей), и потому $X = \psi^{-1}([\psi(x_2), \psi(x_1)]) \cup \varphi^{-1}([\varphi(x_1), \varphi(x_2)])$, где x_1 — какая-нибудь точка из $\varphi^{-1}((-\infty, a_1)) = \psi^{-1}((b_2, \infty))$, а x_2 — какая-нибудь точка из $\varphi^{-1}((a_2, \infty)) = \psi^{-1}((-\infty, b_1))$. Следовательно, в случае (ii) X гомеоморфно S^1.

17. Компактное связное одномерное многообразие гомеоморфно S^1 или D^1.

Доказательство. Предположим сначала, что многообразие замкнуто. Тогда оно покрывается конечным числом открытых подмножеств, гомеоморфных $\mathbb{R}^1$, и эти подмножества можно занумеровать в последовательность $U_1, \ldots, U_s$ со связными объединениями $V_k = U_1 \cup \ldots \cup U_k$. В силу леммы 16, первое из множеств $V_1, \ldots, V_s$, не гомеоморфных $\mathbb{R}^1$, гомеоморфно S^1, и так как это множество открыто и замкнуто, то оно совпадает со всем многообразием, которое оказывается, таким образом, гомеоморфным S^1.

Пусть теперь многообразие имеет непустой край. Тогда его удвоение является замкнутым связным одномерным многообразием и, следовательно, гомеоморфно S^1, а само оно гомеоморфно части окружности. Так как эта часть связна, замкнута, непуста, отлична от всей окружности и не сводится к точке, то она гомеоморфна D^1.

18 (Лемма). *Если топологическое пространство представляется как объединение неубывающей последовательности своих открытых подмножеств, гомеоморфных $\mathbb{R}^1$, то оно гомеоморфно $\mathbb{R}^1$.*

Доказательство. Пусть $X = \bigcup V_i$ — указанное представление. Очевидно, всякий гомеоморфизм множества V_i на интервал (a, b) продолжается до некоторого гомеоморфизма множества V_{i+1} на один из интервалов (a, b), $(a-1, b)$, $(a, b+1)$, $(a-1, b+1)$. Это позволяет индуктивно построить такую последовательность интервалов $\Delta_1, \Delta_2, \ldots$ и такую последовательность гомеоморфизмов $\varphi_1 \colon V_1 \to \Delta_1$, $\varphi_2 \colon V_2 \to \Delta_2, \ldots$, что $\varphi_i = \mathrm{ab}\, \varphi_{i+1}$, и ясно, что отображение пространства X на интервал $\bigcup \Delta_i$, совпадающее на V_i с φ_i, является гомеоморфизмом.

19. Некомпактное связное одномерное многообразие гомеоморфно $\mathbb{R}^1$ или $\mathbb{R}^1_-$.

Доказательство. Предположим сначала, что многообразие не имеет края. Тогда оно покрывается счетным числом открытых подмножеств, гомеоморфных $\mathbb{R}^1$, и эти подмножества можно занумеровать в последовательность $U_1, U_2, \ldots$ со связными объединениями $U_1 \cup \ldots \cup U_k$. Все эти объединения гомеоморфны $\mathbb{R}^1$, так как первое из них, не гомеоморфное $\mathbb{R}^1$, было бы, в силу леммы 16, гомеоморфно S^1 и совпало бы, вследствие своей открытости и замкнутости, со всем многообразием. Таким образом, к последнему применима лемма 18, и оно гомеоморфно $\mathbb{R}^1$.

Пусть теперь многообразие имеет непустой край. Тогда его удвоение является некомпактным связным одномерным многообразием без края и, следовательно, гомеоморфно $\mathbb{R}^1$, а само оно гомеоморфно части прямой. Так как эта часть связна, замкнута, некомпактна и отлична от всей прямой, то она гомеоморфна $\mathbb{R}^1_-$.

2. Дифференциальные структуры

1. Напомним, что вещественная функция, определенная на открытом подмножестве пространства $\mathbb{R}^n$, называется *функцией класса* $\mathscr{C}^r$, если она имеет непрерывные частные производные всех порядков, не превосходящих r. Подразумевается, что $0 \leqslant r \leqslant \infty$ и что класс $\mathscr{C}^0$ состоит из всех непрерывных функций, а класс $\mathscr{C}^\infty$ — из функций с непрерывными частными производными всех порядков. В дополнение к этому мы называем вещественно аналитические функции функциями класса $\mathscr{C}^a$. Удобно считать, что $a > \infty$; все перечисленные классы охватываются тогда неравенствами $0 \leqslant r \leqslant a$.

Эти определения очевидным образом переносятся на вещественные функции, заданные на открытом подмножестве полупространства $\mathbb{R}^n_-$: дифференцирование по первой координате в точках граничной гиперплоскости $\mathbb{R}^{n-1}_1$ понимается как дифференцирование слева, а аналитичность — как аналитическая продолжимость на множество, открытое в $\mathbb{R}^n$. Мы распространяем их, далее, на отображения открытого подмножества пространства $\mathbb{R}^n$ или полупространства $\mathbb{R}^n_-$ в любое подмножество пространства $\mathbb{R}^q$: такое отображение называется *отображением класса* $\mathscr{C}^r$ или, короче, $\mathscr{C}^r$*-отображением*, если его координатные функции принадлежат классу $\mathscr{C}^r$.

2. Отображение открытого подмножества пространства $\mathbb{R}^n$ или полупространства $\mathbb{R}^n_-$ в открытое подмножество пространства $\mathbb{R}^p$ или полупространства $\mathbb{R}^p_-$ называется *диффеоморфизмом*, если оно обратимо и оба отображения f, f^{-1} принадлежат классу $\mathscr{C}^1$. Множества, которые можно связать диффеоморфизмом, называются *диффеоморфными*.

Следующие факты содержатся в хорошо известных общих теоремах дифференциального исчисления:

(i) Если открытое подмножество пространства $\mathbb{R}^p$ или полупространства $\mathbb{R}^p_-$ диффеоморфно открытому подмножеству пространства $\mathbb{R}^n$ или полупространства $\mathbb{R}^n_-$, то $p = n$.

(ii) Открытое подмножество полупространства $\mathbb{R}^n_-$, диффеоморфное открытому подмножеству пространства $\mathbb{R}^n$, открыто в $\mathbb{R}^n$.

(iii) Диффеоморфизм, обратный диффеоморфизму класса $\mathscr{C}^r$, принадлежит классу $\mathscr{C}^r$.