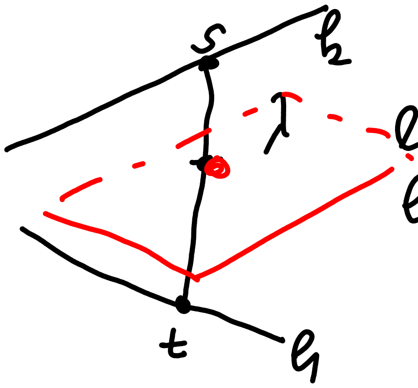
387. Найти ГМТ, дел. в отнош. λ отрезки с концами на двух данных скр. прямых.



Выберем АСК

l_1 Ox

l_2 сдвинем на единицу по z, ось Oy

$$l_1: \begin{cases} x=t \\ y=0 \\ z=0 \end{cases} \qquad l_2: \begin{cases} x=0 \\ y=s \\ z=1 \end{cases}$$

Ф-ла деления в данном отн.:

$$\left(\frac{\lambda t}{1+\lambda}, \frac{s}{1+\lambda}, \frac{1}{1+\lambda}\right) : \begin{cases} x = \frac{\lambda}{1+\lambda} t \\ y = \frac{1}{1+\lambda} s, \\ z = \frac{1}{1+\lambda} \end{cases}$$

Ур-я пл-ти с нач. точкой $\left(0, 0, \frac{1}{1+\lambda}\right)$ и напр. векторами:

$\left\{\frac{\lambda}{\lambda+1}, 0, 0\right\} \sim \{1, 0, 0\}$ (напр. l_1)

$\left\{0, \frac{1}{1+\lambda}, 0\right\} \sim \{0, 1, 0\}$ (напр. l_2)

Т.о. ГМТ = плоскость, $\parallel$ l_1 и l_2 и дел. в нужном отнош. $\forall$! отрезок

391 4 пл-ти $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$

$A_2x + \dots$

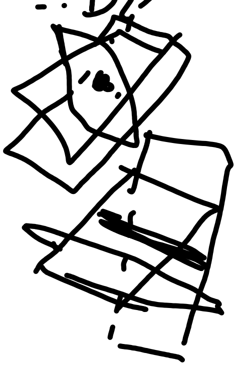
$A_3x + \dots$

$A_4x + \dots = 0$

$$r = rk\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \\ A_4 & B_4 & C_4 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow (\alpha, \beta, \gamma) \neq \vec{0} \qquad R = rk\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ \dots \\ A_4 & \dots & \dots & D_4 \end{pmatrix}$$

необх и дост: $\nexists$ единств.

1) принадл одной связки
2) одной собств
3) одной несобств.



2) : $\exists$ точка $\in$ им всем (но м.б. и целая (к-я)) т.е. сист. разрешима и имеет 0, 1, 2-мерн

пр-во решений $r = R \leq 3$ | иска $r=R=2$

$\boxed{r=R=3}$.

3). $\exists\{\alpha,\beta,\gamma\} \neq \vec{0}$, который обнуляет все однор. части $r=2$ или $r=1$ $\boxed{r<R\leq 3}$

1). $\boxed{R\leq 3}$

$\boxed{398}$ Показать, что пл-ти

$\Pi_1: x-y+z+1=0$
$\Pi_2: 2x+3y-z+2=0$
$\Pi_3: x=0$
$\Pi_4: x+2y-z+1=0$

образуют тетраэдр.

Провести пл-ть через $\Pi_1 \cap \Pi_2$ $\parallel \Pi_3 \cap \Pi_4$

Π_1, Π_2, Π_3: $\det\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$

Реш. $\exists!$ (трёхгр угол). Что про Π_4?

- Π_4 не проходит через эту т. $\Leftrightarrow$ Система из 4 не имеет реш (*)
- $\Pi_4 \nparallel \Pi_1,..,\Pi_3 \Leftrightarrow \{A_4,B_4,C_4\}$ не пропорц.

$\{A_1,B_1,C_1\}, \ldots \{A_3,B_3,C_3\}$ — сразу видно

(*) Т.к. Ранг однор. частей $\geq$ ранга 3 первых пл-ей $=3$

Значит надо проверить:

$$0 \neq \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 1+4-3+ +2-3-2= = -1.$$

$\Pi \supset \Pi_1 \cap \Pi_2 \in$ пучку

Π:

$$\lambda(x-y+z+1)+\mu(2x+3y-z+2)=0$$
$$(\lambda+2\mu)x+(-\lambda+3\mu)y+(\lambda-\mu)z+\lambda+2\mu=0$$

Напр. в-р $\Pi_3 \cap \Pi_4$?

<u>Лемма</u> (в расш. вект. пр-ии)

Если $\ell: \begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}$

То напр. в-р $\vec{a} = \left\{ \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \right\}$

(если ПСК пол ор., то очев: $\vec{a} \sim [\vec{n}_1, \vec{n}_2]$)

Но у нас общего АСК, т.е. это не нормали, а ф-ла — не вект.пр.).

2. Подставим в однор. части и убедимся что $\vec{a} \parallel \pi_1$, $\vec{a} \parallel \pi_2$.

$$A_1 \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix} + B_1 \begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix} + C_1 \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix} = 0.$$ Аналог. для π_2 ☒

$$x = 0$$
$$x + 2y - z + 1 = 0$$

$$\text{"}\left[\{1,0,0\}, \{1,2,-1\}\right]\text{"} =$$

$= \{0,1,2\} = \vec{a}$ т.е. пл-ть из пучка д.быть $\parallel \vec{a}$, т.е. он должен обнулять однор часть

$$(\lambda + 2\mu)x + (-\lambda + 3\mu)y + (\lambda - \mu)z + \lambda + 2\mu = 0$$
$$(\lambda + 2\mu)\cdot 0 + (-\lambda + 3\mu)\cdot 1 + (\lambda - \mu)\cdot 2 = 0$$
$$-\lambda - \mu = 0, \quad \lambda = 1, \mu = -1$$
$$-x - 4y + 2z - 1 = 0, \quad \boxed{x + 4y - 2z + 1 = 0}$$

418, 420, 422, 423, 424–432, 435, 436
(в кл. 423, 424, 428, 432, 435)

$\boxed{423}$ сост. ур. π, прох. через $A(1,0,3)$, $B(2,-1,4)$

$\perp \pi_1: \begin{cases} x = 2u + 4v \\ y = 6v \\ z = 3 - u - v \end{cases}$, т.е. $\vec{n}_1 \parallel \pi$

Найдем $\vec{n}_1 = \left[\{2,0,-1\}, \{4,6,-1\}\right] = \{6,-2,12\} \sim \{3,-1,6\}$

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-0 & z-3 \\ 2-1 & -1-0 & 4-3 \\ 3 & -1 & 6 \end{vmatrix} = (x-1)(-5) - y\cdot 3 + (z-3)\cdot 2 =$$
$$= -5x - 3y + 2z - 1 = 0$$

$\boxed{424}$ Пучок, зад. $3x-y+z-2=0$, $x+y-6z-1=0$ найти пл-ти, перп. данным.

$$\lambda(3x-y+z-2)+\mu(x+y-6z-1)=0$$

$$(3\lambda+\mu)x+(-\lambda+\mu)y+(\lambda-6\mu)z-2\lambda-\mu=0$$

$\vec{n}\perp\vec{n}_1$ $(\vec{n}\perp\vec{n}_2)$

$$3(3\lambda+\mu)-(-\lambda+\mu)+(-6\mu+\lambda)=0$$

$$11\lambda-4\mu=0 \qquad \mu=11,\ \lambda=4$$

$$(12+11)x+7y-62z-19$$

$$\boxed{23x+7y-62z-19=0}$$

$$(3\lambda+\mu)+(-\lambda+\mu)-6(\lambda-6\mu)=0$$

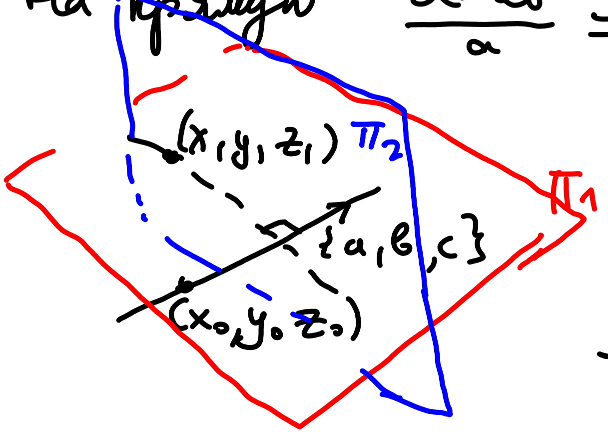
$$-4\lambda+38\mu=0,\quad -2\lambda+19\mu=0$$

$$\lambda=19,\ \mu=2.$$

$$(3\cdot19+2)x+(-17)y+7z-40=0$$

$$\boxed{59x-17y+7z-40=0}$$

$\boxed{428}$ Сост. ур-е перп., опущенного из (x_1,y_1,z_1) на прямую $\dfrac{x-x_0}{a}=\dfrac{y-y_0}{b}=\dfrac{z-z_0}{c}$



перп $=\pi_1\cap\pi_2$

$$\begin{cases}\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0\\ x_1-x_0 & y_1-y_0 & z_1-z_0\\ a & b & c\end{vmatrix}=0 & \pi_1\\ a(x-x_1)+b(y-y_1)+c(z-z_1)=0 & \pi_2\end{cases}$$

π_2 через (x_1,y_1,z_1) $\perp\{a,b,c\}$.

$\boxed{432}$ Найти точку, симм. $(1,2,3)$ относ. прямой $\dfrac{x-8}{1}=\dfrac{y-11}{3}=\dfrac{z-4}{-1}$

$M'=\ell\cap\pi$, π: через $M\perp\ell$:

$$1(x-1)+3(y-2)-1(z-3)=0$$

$x=8+t,\ y=11+3t,\ z=4-t.$

M': $8+t-1+3(11+3t-2)-1(4-t-3)=0$

$t(1+9+1)+7+27-1=0, \quad 11t+33=0$

$\boxed{t=-3}$! $M'(5,2,7)$; $\quad \frac{x''+1}{2}=5$

$\frac{y''+2}{2}=2, \quad \frac{z''+3}{2}=7, \quad x''=9,\ y''=2,\ z''=11.$

$\boxed{435}$ $P(1,0,0),\ Q(1,0,2),\ R(1,1,1)$
$S(3,0,0)$ Высоту опуск. на
QRS

$$h=\frac{V\text{ пар-да }(\vec{QP},\vec{QR},\vec{QS})}{S\text{ пар-ма }(\vec{QR},\vec{QS})}$$

$\vec{QP}=\{0,0,-2\}$
$\vec{QR}=\{0,1,-1\}$
$\vec{QS}=\{2,0,-2\}$

$$V=\text{abs}\begin{vmatrix}0&0&-2\\0&1&-1\\2&0&-2\end{vmatrix}=4$$

$$S=|[\vec{QR},\vec{QS}]|=\left|\begin{bmatrix}0&1&-1\\2&0&-2\end{bmatrix}\right|=|\{-2,-2,-2\}|=2\sqrt{3}$$

$$h=\frac{4}{2\sqrt{3}}=\frac{2}{\sqrt{3}}.$$