ВВЕДЕНИЕ В АЛГЕБРАИЧЕСКУЮ ТОПОЛОГИЮ

(конспект лекций спецкурса А. С. .Мищенко и Е. В. Троицкого 2006/07 уч.года)

Рабочая версия по состоянию на 11 марта 2007 г..

По состоянию на 11 марта 2007 г. изложение в основном следует весьма близко книге Фоменко и Фукса [7]. Отличия сводятся, в основном, к исключению второстепенных или слишком сложных фрагментов, восполнению некоторых опущенных кусков доказательств и неточностей. Из прочей литературы рекомендуются в первую очередь книги Спеньера [6], Рохлина и Фукса [4], Свитцера [5], Постникова [2, 3].

Содержание

Часть 1. **Осенний семестр**

1. Предварительные сведения и обозначения

На первой лекции в сжатой форме был представлен следующий материал из стандартных курсов дифференциальной геометрии и топологии, анализа и функционального анализа.

Определение 1.1. *Метрикой* ρ на множестве X называется отображение $\rho : X \times X \to [0, \infty)$, удовлетворяющее аксиомам:

(1) $\rho(x, y) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = y \quad \forall x, y \in X$ (аксиома тождества);
(2) $\rho(x, y) = \rho(y, x) \quad \forall x, y \in X$ (аксиома симметрии);
(3) $\rho(x, z) \leqslant \rho(x, y) + \rho(y, z) \quad \forall x, y, z \in X$ (аксиома треугольника).

Пара (X, ρ) называется *метрическим пространством.* Подпространство $Y \subset X$ автоматически является метрическим пространством.

Диаметром Y называется $\operatorname{diam} Y := \sup\limits_{x,y \in Y} \rho(x, y)$. Множество с конечным диаметром называется *ограниченным*. *Шаровой окрестностью* называется

$$B_\varepsilon(x) := \{y \in X \mid \rho(y, x) < \varepsilon\}.$$

Расстояние от $Y \subset X$ до $Z \subset X$ — $\rho(Y, Z) := \inf\limits_{y \in Y, z \in Z} \rho(y, z)$.

Если $\rho(y, Y) = 0$, то y — *точка прикосновения* Y. *Замыканием* Y называется $\overline{Y}$:={множество точек прикосновения Y}. Очевидно, что $Y \subset \overline{Y}$. Множество Y называется *замкнутым*, если $Y = \overline{Y}$. Точка x называется *внутренней точкой* Y, если существует $\varepsilon > 0$ такое, что $B_\varepsilon(x) \subset Y$ (в частности, $x \in Y$). *Внутренностью* Y называется совокупность $\operatorname{Int} Y \subset Y$ его внутренних точек. Множество Y называется *открытым,* если $Y = \operatorname{Int} Y$.

Задача 1. Пусть X — метрическое пространство. Тогда $Y \subset X$ открыто тогда и только тогда, когда $X \setminus Y$ замкнуто.

Теорема 1.2. *Пусть X — метрическое пространство. Тогда*

- **1 О:** *X открыто;*
- **2 О:** *$\emptyset$ открыто;*
- **3 О:** *объединение $\bigcup\limits_{\alpha \in A} U_\alpha$ любого набора открытых подмножеств $U_\alpha \subset X$ открыто;*
- **4 О:** *пересечение $\bigcap\limits_{i=1}^{k} U_i$ конечного набора открытых подмножеств $U_i \subset X$ открыто;*
- **1 З:** *$\emptyset$ замкнуто;*
- **2 З:** *X замкнуто;*
- **3 З:** *пересечение $\bigcap\limits_{\alpha \in A} F_\alpha$ любого набора замкнутых подмножеств $F_\alpha \subset X$ замкнуто;*
- **4 З:** *объединение $\bigcup\limits_{i=1}^{k} F_i$ конечного набора замкнутых подмножеств $F_i \subset X$ замкнуто;*

Доказательство. В силу предыдущей задачи k O $\Rightarrow$ k З $\forall$ k. Свойства 1 О и 2 О очевидны. Докажем 3 О. Пусть $U = \bigcup\limits_{\alpha \in A} U_\alpha$ и $x \in U$. Тогда найдется такое α, что $x \in U_\alpha$ и $B_{\varepsilon(\alpha)} \subset U_\alpha$. Тогда $B_{\varepsilon(\alpha)} \subset U_\alpha \subset U$.

Докажем 4 О. Пусть $U = \bigcap\limits_{i=1}^{k} U_i$, $x \in U$. Тогда имеется набор ε_i $(i = 1, \ldots, k)$ таких, что $x \in B_{\varepsilon_i}(x) \subset U_i$. Пусть $\varepsilon := \min\{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k\}$. Тогда $B_\varepsilon(x) \subset B_{\varepsilon_i}(x) \subset U_i$ $\forall i$. Значит, $B_\varepsilon(x) \subset U$. $\square$

Задача 2. Показать, что от конечности нельзя отказаться.

Задача 3. Доказать, что $B_\varepsilon(x)$ открыто.

Задача 4. Доказать, что $\operatorname{Int} Y$ открыто.

Задача 5. Доказать, что $\overline{Y}$ замкнуто.

Определение 1.3. *Топологией* на множестве X называется система его подмножеств τ (эти подмножества называются *открытыми*), удовлетворяющая следующим аксиомам:

1): $X \in \tau$;
2): $\emptyset \in \tau$;
3): если $U_\alpha \in \tau$ $\forall \alpha \in A$, то $\bigcup\limits_{\alpha \in A} U_\alpha \in \tau$;
4): если $U_1, \ldots, U_k \in \tau$, то $\bigcap\limits_{i=1}^{k} U_i \in \tau$.

Пара (X, τ) называется *топологическим пространством.* Множество вида $F = X \backslash U$, где $U \in \tau$, называется *замкнутым.*

Задача 6. Проверить для замкнутых множеств свойства 1 З – 4 З.

Пример 1.4. Метрическое пространство является топологическим.

Задача 7. Привести пример топологического пространства (X, τ), не связанного ни с какой метрикой (говорят: топология не метризуема).

Определение 1.5. *Окрестностью* точки $x \in X$ (подмножества $Y \subset X$) называется любое открытое множество ее (его) содержащее. *Точка прикосновения* $Y \subset X$ — такая точка $x \in X$, что любая ее окрестность имеет непустое пересечение с Y. *Замыкание* Y — это множество $\overline{Y}$ всех точек прикосновения Y (так что $Y \subset \overline{Y}$). Точка $x \in Y$ называется *внутренней* точкой Y, если найдется такая окрестность U точки x, что $x \in U \in Y$. Совокупность всех внутренних точек Y называется *внутренностью* Y и обозначается $\operatorname{Int} Y$.

Задача 8. $Y \subset X$ замкнуто тогда и только тогда, когда $Y = \overline{Y}$.

Задача 9. $\overline{Y}$ замкнуто.

Определение 1.6. Пусть $Y \subset X$, (X, τ) — топологическое пространство. Топология $\tau_1 := \{U \cap Y \mid U \in \tau\}$ называется топологией, *индуцированной* τ на Y.

Задача 10. Проверить для τ_1 аксиомы топологии.

Задача 11. Пусть (X, ρ_X) — метрическое пространство. Тогда топологию на $Y \subset X$ можно ввести двумя способами:

1) ρ_X порождает τ_X, которая индуцирует τ_1,
2) ρ_X при ограничении на Y дает ρ_Y, которая порождает τ_{ρ_Y}.

Доказать, что $\tau_1 = \tau_{\rho_Y}$.

Определение 1.7. Подмножество $Y \subset X$ называется *(всюду) плотным,* если $\overline{Y} = X$.

Задача 12. Пусть $Y_1 \subset X$ и $Y_2 \subset X$ — открытые плотные подмножества. Тогда $Y = Y_1 \cap Y_2$ — открытое плотное подмножество.

Определение 1.8. Отображение $f : X \to Y$ топологических пространств называется *непрерывным в точке* $x_0 \in X$, если для любой окрестности образа $V(f(x_0))$ существует такая окрестность $U(x_0)$, что $f(U(x_0)) \subset V(f(x_0))$. Отображение, непрерывное в каждой точке, называется *непрерывным.*

Теорема 1.9. *Следующие условия эквивалентны:*

(1) *$f : X \to Y$ непрерывно;*
(2) *для любого открытого $V \subset Y$ прообраз $f^{-1}(V)$ открыт в X;*
(3) *для любого замкнутого $F \subset Y$ прообраз $f^{-1}(F)$ замкнут в X.*

Доказательство. Поскольку $f^{-1}(Y \setminus V) = f^{-1}(Y) \setminus f^{-1}(V) = X \setminus f^{-1}(V)$, то условия 2 и 3 эквивалентны.

Пусть теперь f непрерывно, $V \subset Y$ — открытое множество. Тогда либо прообраз V пуст, и, тем самым, открыт, либо содержит некоторую точку x: $f(x) \in V$. Тогда по определению для любой такой точки найдется такая окрестность $U(x)$, что $f(U(x)) \subset V$, т. е. $U(x) \subset f^{-1}(V)$. Таким образом, каждая точка $f^{-1}(V)$ — внутренняя.

Обратно, пусть выполнено условие 2. Тогда для $V = V(f(x_0))$ в качестве искомого U можно взять $U = f^{-1}(V)$. □

Задача 13. Пусть $X = F_1 \cup F_2$, где F_1 и F_2 — замкнутые, $f : X \to Y$. Тогда f непрерывно тогда и только тогда, когда $f|_{F_1} : F_1 \to Y$ и $f|_{F_2} : F_2 \to Y$ непрерывны.

Задача 14. Пусть $f_n : X \to \mathbb{R}$ — непрерывные функции, сходящиеся к f равномерно на X. Тогда f непрерывная.

Задача 15. Пусть X и Y — метрические пространства. Доказать, что $f : X \to Y$ непрерывна в точке x_0 в смысле отображений соответствующих топологических пространств тогда и только тогда, когда для любой последовательности $\{x_n\}$ с $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ имеем $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$.

Определение 1.10. Отображение $f : X \to Y$ называется *гомеоморфизмом,* если

(1) f — биекция;
(2) f и f^{-1} непрерывны.

Гомеоморфность будем обозначать значком $\approx$.

Задача 16. Привести пример биективного непрерывного отображения, не являющегося гомеоморфизмом.

Определение 1.11. *Базой топологии* τ называется такая система открытых множеств $\mathcal{B}$, что любое τ–открытое множество представляется в виде их объединения.

Задача 17. Какие условия надо наложить на произвольную систему подмножеств $\mathcal{B}_1$, чтобы в результате взятия их произвольных объединений получить некоторую топологию ?

Определение 1.12. Пусть (X, τ_X) и (Y, τ_Y) — топологические пространства. Рассмотрим в $X \times Y$ следующую базу топологии:

$$\mathcal{B} := \{V \times W \mid V \in \tau_X,\ W \in \tau_Y\}.$$

Полученное топологическое пространство называется *декартовым произведением* X и Y.

Задача 18. Проверить (с использованием предыдущей задачи), что $X \times Y$ действительно топологическое пространство.

Задача 19. Доказать, что $X \times Y$ и $Y \times X$ гомеоморфны.

Задача 20. Доказать, что $(X \times Y) \times Z$ и $X \times (Y \times Z)$ гомеоморфны.

Задача 21. Пусть (X, ρ_X) и (Y, ρ_Y) — метрические пространства. Определим на $X \times Y$ следующие расстояния:

$$\rho_{\max}((x_1, y_1), (x_2, y_2)) := \max\{\rho_X(x_1, x_2),\ \rho_Y(y_1, y_2)\},$$

$$\rho_2((x_1, y_1), (x_2, y_2)) := \sqrt{\rho_X^2(x_1, x_2) + \rho_Y^2(y_1, y_2)},$$

$$\rho_+((x_1, y_1), (x_2, y_2)) := \rho_X(x_1, x_2) + \rho_Y(y_1, y_2).$$

Доказать:
1) Что это метрики.
2) Что соответствующие топологии на $X \times Y$ совпадают.

Задача 22. Доказать, что подмножества прямой (a, b), $[a, b)$ и $[a, b]$ не гомеоморфны.

Определение 1.13. Топологическое пространство X называется *несвязным,* если выполнено одно из следующих (очевидно, эквивалентных) условий:

- Пространство X представляется в виде объединения двух непересекающихся непустых открытых множеств.
- Пространство X имеет непустое подмножество A, не совпадающее с X и являющееся одновременно открытым и замкнутым.
- Пространство X представляется в виде объединения двух непересекающихся непустых одновременно открытых и замкнутых множеств.

В противном случае X называется *связным.*

Определение 1.14. Пространство X называется *линейно связным,* если для любых двух точек $x_0, x_1 \in X$ существует непрерывное отображение (*путь*) $f : [0, 1] \to X$, $f(0) = x_0$, $f(1) = x_1$.

Задача 23. Отрезок $[a, b] \subset \mathbb{R}$ связен и линейно связен.

Теорема 1.15. *Пусть* $X = \bigcup\limits_{\alpha} X_\alpha$, *каждое* X_α *связно, а* $\bigcap\limits_{\alpha} X_\alpha \neq \emptyset$. *Тогда* X *связно.*

Доказательство. Пусть X несвязно, $X = A \cup B$, $A \cap B = \emptyset$, A и B — непустые открыто-замкнутые. Тогда каждое $X_\alpha = (X_\alpha \cap A) \cup (X_\alpha \cap B)$. По определению индуцированной топологии эти множества открыто-замкнутые в X_α. Поскольку X_α связно, то одно из них пусто. Значит, каждое из X_α целиком содержится либо в A, либо в B, которые не пересекаются. При этом, так как A и B непусты, а X равно объединению X_α, то хотя бы по одному из X_α содержится в каждом из A и B. Значит, $\bigcap\limits_\alpha X_\alpha = \emptyset$. Противоречие. $\square$

Теорема 1.16. *Пусть в топологическом пространстве X для любых двух точек x и y имеется связное подпространство P_{xy}, их содержащее. Тогда X связно.*

Доказательство. Пусть X несвязно, $X = A \cup B$, $A \cap B = \emptyset$, A и B — непустые открыто-замкнутые. Тогда найдутся $a \in A$, $b \in B$ и соответствующее P_{ab}. Тогда $P_{ab} = (P_{ab} \cap A) \cup (P_{ab} \cap B)$. Эти множества открыто-замкнуты в P_{ab} и непусты (первое содержит a, второе — b). Противоречие со связностью P_{ab}. $\square$

Задача 24. Образ связного пространства при непрерывном отображении связен.

Теорема 1.17. *Линейно связное пространство связно.*

Доказательство. По предыдущей задаче $f([0,1])$ связно, где $f = f_{x_0,x_1}$ — из определения линейной связности. Положив $P_{x_0,x_1} := f([0,1])$, можем воспользоваться теоремой 1.16. $\square$

Задача 25. Привести пример связного, но не линейно связного пространства.

Определение 1.18. Топологическое пространство называется *хаусдорфовым,* если для любых $x, y \in X$, $x \neq y$, найдутся такие окрестности $U(x)$ и $U(y)$, что $U(x) \cap U(y) = \emptyset$.

Задача 26. Привести пример нехаусдорфова топологического пространства.

Задача 27. Доказать, что декартово произведение хаусдорфовых пространств хаусдорфово.

Задача 28. Доказать, что в хаусдорфовом пространстве каждая точка замкнута.

Определение 1.19. Топологическое пространство X называется *нормальным,* если оно хаусдорфово и для любых двух непересекающихся замкнутых множеств F_1 и F_2 существуют непересекающиеся окрестности $U_1 \supset F_1$ и $U_2 \supset F_2$.

Задача 29. Всякое метрическое пространство нормально.

Определение 1.20. Покрытие $\{V_\beta\}_{\beta \in B}$ *измельчает* (является более мелким, чем) $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$, если для всякого β найдется такое $\alpha = \alpha(\beta)$, что $V_\beta \subset U_\alpha$.

Теорема 1.21. *Пусть X — нормальное топологическое пространство, $\{U_i\}_{i=1}^N$ — конечное открытое покрытие. Тогда существует более мелкое покрытие вида V_i, $\overline{V}_i \subset U_i$.*

Доказательство. Рассмотрим замкнутые множества

$$F_1 = \left(X \setminus \bigcup_{i=2}^N U_i \right) \subset U_1, \qquad \widetilde{F}_1 = X \setminus U_1,$$

и соответствующие в силу нормальности окрестности

$$V_1 \supset F_1, \qquad \widetilde{V}_1 \supset \widetilde{F}_1, \qquad V_1 \cap \widetilde{V}_1 = \emptyset.$$

Тогда, поскольку каждая точка $\widetilde{F}_1$ имеет не пересекающуюся с V_1 окрестность $\widetilde{V}_1$ и, таким образом, не может быть точкой прикосновения V_1,

$$\overline{V}_1 \cap \widetilde{F}_1 = \emptyset, \qquad V_1 \subset \overline{V}_1 \subset (X \setminus \widetilde{F}_1) = U_1$$

и $(V_1, U_2, \ldots, U_N)$ — покрытие. Далее, заменяем U_2 на V_2 и т. д. □

Задача 30. Пусть $f : X \to X$ — непрерывное отображение хаусдорфова пространства. Доказать, что множество неподвижных точек $F_f := \{x \in X | f(x) = x\}$ замкнуто.

Задача 31. Доказать, что X хаусдорфово тогда и только тогда, когда диагональ $\Delta := \{(x, y) \mid x = y\} \subset X \times X$ замкнута в $X \times X$.

Лемма 1.22. (Урысона) *Пусть X — нормальное топологическое пространство, F_0 и F_1 — замкнутые непересекающиеся множества. Тогда существует такая непрерывная функция $f : X \to [0, 1]$, что $f|_{F_0} = 0$, $f|_{F_1} = 1$.*

Доказательство. Из нормальности следует, что для любого замкнутого F и его окрестности U, $F \subset U$ найдется другая окрестность V, такая, что $F \subset V \subset \overline{V} \subset U$, что будем обозначать $V \Subset U$ (см. доказательство теоремы 1.21).

Определим V_q для двоично-рациональных q индукцией по степени знаменателя (т. е. сначала для 0 и 1, потом для 1/2, потом для 1/4 и 3/4, потом для 1/8, 3/8, 5/8, 7/8 и так далее). Положим V_0 и V_1 равными тем непересекающимся открытым множествам, содержащим F_0 и F_1, которые существуют по определению нормальности. Пусть, по предположению индукции, V_q определены до 2^k в знаменателе q. Рассмотрим

$$F := \overline{V_{\frac{i}{2^k}}}, \qquad U := V_{\frac{i+1}{2^k}},$$

тогда положим $V_{\frac{2i+1}{2^{k+1}}} := V$, фигурирующем для F и U в рассуждении из начала доказательства.

Полученные V_q являются открытыми по построению, причем

(1) $F_0 \subset V_0$,
(2) $V_1 \Subset (X \setminus F_1)$,
(3) если $q_1 < q_2$, то $V_{q_1} \Subset V_{q_2}$.

Определим для любого $s \in [0, 1]$: $V_s := \bigcup\limits_{q \leqslant s} V_q$. Тогда V_s открыто для любого s (как объединение открытых) и удовлетворяет 1 – 3. Действительно, 1 и 2 очевидны, а 3 следует из того, что между любыми двумя числами можно найти два двоично-рациональных.

Теперь определим функцию $f : X \to [0, 1]$, положив $f|_{F_0} = 0$ и $f(x) := \sup\{s \mid x \notin V_s\}$. Покажем, что f непрерывна. Пусть x_0 и $\varepsilon > 0$ произвольны. Пусть $s_0 = f(x_0)$. Рассмотрим

$$U(x_0) := V_{s_0 + \frac{\varepsilon}{4}} \setminus \overline{V_{s_0 - \frac{\varepsilon}{4}}}.$$

Это действительно окрестность x_0, причем для любого $x \in U(x_0)$

$$x \in V_{s_0 + \frac{\varepsilon}{4}}, \qquad x \notin \overline{V_{s_0 - \frac{\varepsilon}{4}}},$$

так что

$$s_0 - \frac{\varepsilon}{4} \leqslant f(x) \leqslant s_0 + \frac{\varepsilon}{4}, \qquad |f(x) - f(x_0)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

□

Задача 32. Замкнутое подмножество замкнутого подмножества замкнуто в объемлющем пространстве.

Задача 33. (Теорема Титце о продолжении) Пусть X — нормальное топологическое пространство, $f : F \to \mathbb{R}$ — непрерывная функция. Тогда f продолжается до непрерывной функции $g : X \to \mathbb{R}$. Если f ограничена, то и g можно выбрать ограниченной той же константой.

Определение 1.23. *Носителем функции* $f : X \to \mathbb{R}$ называется

$$\operatorname{supp} f := \overline{\{x \in X \mid f(x) \neq 0\}}.$$

Теорема 1.24. *Пусть X — нормальное топологическое пространство, $\{U_\alpha\}$ — конечное открытое покрытие. Тогда существуют такие непрерывные функции $\psi_\alpha : X \to [0,1] \subset \mathbb{R}$, что*

(1) $\operatorname{supp} \psi_\alpha \subset U_\alpha$,
(2) $\sum_\alpha \psi_\alpha(x) \equiv 1$.

Система функций ψ_α называется разбиением единицы, подчиненным $\{U_\alpha\}$.

Замечание 1.25. Достаточно локальной конечности $\{U_\alpha\}$: у каждой точки существует окрестность, пересекающаяся лишь с конечным числом $\{U_\alpha\}$.

Доказательство. Согласно теореме 1.21 найдем новые покрытия $W_\alpha \Subset V_\alpha \Subset U_\alpha$. По лемме Урысона существуют непрерывные функции

$$\theta_\alpha : X \to [0,1], \qquad \theta_\alpha|_{\overline{W}_\alpha} \equiv 1, \qquad \theta_\alpha|_{(X \setminus V_\alpha)} \equiv 0.$$

Таким образом, $\operatorname{supp} \theta_\alpha \subset \overline{V}_\alpha \subset U_\alpha$, а $\theta_\alpha|_{W_\alpha} > 0$. Положим $\theta := \sum_\alpha \theta_\alpha$. Это конечная сумма непрерывных функций и, таким образом, непрерывная функция. Поскольку $\{W_\alpha\}$ — покрытие, а $\theta \geqslant \theta_\alpha > 0$ на W_α, то $\theta > 0$. Значит, мы можем положить $\psi_\alpha := \frac{\theta_\alpha}{\theta}$. Очевидно, что оба условия выполнены. □

Определение 1.26. Топологическое пространство X называется *компактным,* если из любого его открытого покрытия можно выделить конечное подпокрытие.

Задача 34. Доказать, что отрезок $[a,b]$ компактен.

Задача 35. Доказать, что замкнутое подмножество компактного пространства компактно.

Задача 36. Доказать, что компактное подмножество хаусдорфова пространства замкнуто.

Теорема 1.27. *Компактное хаусдорфово пространство нормально.*

Доказательство. Пусть $F \subset X$ замкнуто и $x \notin F$. Покажем, что существуют непересекающиеся окрестности $U(x)$ и $V(F)$. В силу хаусдорфовости для любого $y \in F$ найдутся такие $V_y \ni y$ и $U_y \ni x$, что $V_y \cap U_y = \emptyset$. Окрестности V_y образуют покрытие F, из которого можно выбрать конечное подпокрытие $V_{y_1}, \dots, V_{y_N}$, так как F компактно (см. задачу 35). Положим

$$V(F) := V_{y_1} \cup \dots \cup V_{y_N}, \qquad U(x) := \bigcap_{j=1}^{N} U_{y_j}.$$

Пусть теперь $F_1 \subset X$ и $F_2 \subset X$ — замкнутые. По первой части доказательства определим для каждого $x \in F_1$ открытые непересекающиеся множества $U(x) \ni x$ и $V(x) \supset F_2$. Тогда $\{U(x)\}$ — открытое покрытие F_1, из которого можно выделить конечное подпокрытие $U(x_1), \dots, U(x_n)$. Множества $\bigcup_{i=1}^{n} U(x_i)$ и $\bigcap_{i=1}^{n} V(x_i)$ — искомые непересекающиеся окрестности F_1 и F_2. $\square$

Задача 37. Доказать, что непрерывный образ компакта компактен.

Задача 38. Пусть $f : X \to \mathbb{R}^1$ — непрерывная функция на компактном пространстве X. Тогда f ограничена и принимает наибольшее и наименьшее значения.

Задача 39. Точка x_0 называется *предельной точкой* множества Z, если в каждой ее окрестности содержится бесконечно много точек Z. Доказать, что в метрическом пространстве X множество Z, не имеющее предельных точек, является замкнутым.

Задача 40. Число $\varepsilon > 0$ является *числом Лебега* открытого покрытия $\{U_\alpha\}$ метрического пространства X, если покрытие $\{B_\varepsilon(x) | x \in X\}$ является измельчением $\{U_\alpha\}$ (т. е. каждый шар лежит в некотором элементе покрытия). Доказать, что если в X всякая последовательность имеет сходящуюся подпоследовательность, то всякое открытое покрытие имеет число Лебега.

Задача 41. Пусть X — метрическое пространство, тогда следующие условия эквивалентны:

(1) X компактно;
(2) любая последовательность $\{x_n\} \subset X$ имеет сходящуюся подпоследовательность;
(3) любая последовательность вложенных непустых замкнутых множеств $\{F_n\}$ (т. е. $F_n \supset F_{n+1}$) имеет непустое пересечение.

Задача 42. Декартово произведение компактных пространств является компактным.

Определение 1.28. Напомним, что последовательность групп и гомоморфизмов

$$\dots \xrightarrow{\gamma_{i+1}} G_i \xrightarrow{\gamma_i} G_{i-1} \xrightarrow{\gamma_{i-1}} G_{i-2} \xrightarrow{\gamma_{i-2}} \dots$$

называется *комплексом,* если образ предыдущего гомоморфизма содержится в ядре последующего, $\operatorname{Im} \gamma_i \subset \operatorname{Ker} \gamma_{i-1}$, или, что то же самое, $\gamma_{i-1}\gamma_i = 0$. Последовательность групп и гомоморфизмов называется *точной,* если образ предыдущего гомоморфизма совпадает с ядром последующего.

Нам понадобится также следующий алгебраический факт.

Лемма 1.29 (о пяти гомоморфизмах)**.** *Пусть задана коммутативная диаграмма абелевых групп и гомоморфизмов*

$$\begin{tikzcd}
G_5 \arrow[r, "\alpha_5"] \arrow[d, "\gamma_5"'] & G_4 \arrow[r, "\alpha_4"] \arrow[d, "\gamma_4"'] & G_3 \arrow[r, "\alpha_3"] \arrow[d, "\gamma_3"'] & G_2 \arrow[r, "\alpha_2"] \arrow[d, "\gamma_2"'] & G_1 \arrow[d, "\gamma_1"'] \\
H_5 \arrow[r, "\beta_5"] & H_4 \arrow[r, "\beta_4"] & H_3 \arrow[r, "\beta_3"] & H_2 \arrow[r, "\beta_2"] & H_1
\end{tikzcd}$$

в которой каждая строка точна и γ_1, γ_2, γ_4 и γ_5 — изоморфизмы. Тогда γ_3 — тоже изоморфизм.

Доказательство. Покажем, что γ_3 является мономорфизм. Пусть $\gamma_3(g_3) = 0$. Тогда $\gamma_2\alpha_3(g_3) = \beta_3\gamma_3(g_3) = 0$. Следовательно, $\alpha_3(g_3) = 0$. Значит, существует такое $g_4 \in G_4$, что $\alpha_4(g_4) = g_3$. Тогда $\beta_4\gamma_4(g_4) = 0$ и существует такой элемент $h_5 \in H_5$, что $\beta_5(h_5) = \gamma_4(g_4)$. Рассмотри такой элемент $g_5 \in G_5$, что $\gamma_5(g_5) = h_5$. Тогда $\gamma_4(\alpha_5(g_5)) = \gamma_4(g_4)$ и, значит, $g_4 = \alpha_5(g_5)$. Следовательно, $g_3 = \alpha_4\alpha_5(g_5) = 0$.

Покажем,что γ_3 — эпиморфизм. Пусть $h_3 \in H_3$. Существует такой элемент $g_2 \in G_2$, что $\gamma_2(g_2) = \beta_3(h_3)$. Тогда $\gamma_1\alpha_2(g_2) = \beta_2\beta_3(h_3) = 0$. Следовательно, $\alpha_2(g_2) = 0$, и существует такое $g_3 \in G_3$, что $\alpha_3(g_3) = g_2$. Тогда $\beta_3(h_3 - \gamma_3(g_3)) = 0$ и существует такое $h_4 \in H_4$, что $\beta_4(h_4) = h_3 - \gamma_3(g_3)$. Пусть элемент $g_4 \in G_4$ таков, что $\gamma_4(g_4) = h_4$. Тогда $g_3 + \alpha_4(g_4) \in G_3$ и $\gamma_3(g_3 + \alpha_4(g_4)) = \gamma_3(g_3) + \beta_4(h_4) = h_3$. □

2. Геометрические конструкции топологических пространств

Определение 2.1. *Произведением* $X \times Y$ топологических пространств X и Y называется декартово произведение множеств X и Y, снабженное топологией, определяемой базой множеств вида $U \times V$, где $U \subset \tau_X$, $V \subset \tau_Y$, т. е. любое открытое множество есть объединение множеств указанного вида.

Задача 43. $S^1 \times S^1$ гомеоморфно тору $\mathbb{T}^2$.

Задача 44. $S^2 \times S^2$ гомеоморфно ориентированному грассманиану $G_+(4, 2)$.

Задача 45. Группа $SO(4)$ гомеоморфна $S^3 \times SO(3) = S^3 \times \mathbb{R}P^3$.

Определение 2.2. Пусть Y — факторпространство X, т. е. пространство, полученное отождествлением между собой некоторых точек X. *Фактортопологией* на Y называется сильнейшая из всех топологий, для которых естественное сюръективное отображение $X \to Y$ является непрерывным, т. е. состоящая из образов всех открытых множеств X при этом отображении. Эта же конструкция применима к любому сюръективному отображению $X \to Y$, не обязательно происходящему из факторизации.

Наиболее распространенной (и простейшей) ситуацией будет отожествление между собой точек некоторого подмножества $A \subset X$. В этом случае Y обозначается через X/A.

Определение 2.3. Произведение $X \times I$, где $I = [0, 1]$, называется *цилиндром над* X, $X \times 0$ и $X \times 1$ — *нижнее* и *верхнее основания цилиндра* (гомеоморфны X), $x \times I$, $x \in X$, — *образующие* (гомеоморфны I).

Определение 2.4. *Конусом* CX называется факторпространство цилиндра по основанию $X \times I/X \times 1$.

Определение 2.5. *Надстройкой* ΣX называется факторпространство конуса по оставшемуся основанию $CX/X \times 0 = X \times I/\sim$, где $(x, 0) \sim (y, 0)$, $(x, 1) \sim (y, 1)$ для любых x, y.

Образы оснований (в конусе и надстройке) называются *вершинами,* а образы образующих — *образующими.* Точки по-прежнему будем обозначать через (x, t), имея в виду соответствующие отождествления.

Задача 46. $C(S^1) \approx D^2$ (диск, двумерный замкнутый шар), $\Sigma S^1 \approx S^2$.

Определение 2.6. Пусть $\varphi : A \to Y$ — непрерывное отображение, где $A \subset X$. *Приклеиванием X к Y по отображению φ* называется факторпространство $Y \cap_\varphi X$ несвязного объединения $X \sqcup Y$ по отношению эквивалентности $a \sim \varphi(a)$ для любого $a \in A$.

Определение 2.7. *Цилиндром $Z(f)$ непрерывного отображения* $f : X \to Y$ называется приклеивание $X \times I$ к Y по отображению $X \times 0 \approx X \xrightarrow{f} Y$.

Определение 2.8. *Конусом $C(f)$ непрерывного отображения* $f : X \to Y$ называется приклеивание CX к Y по отображению $X \times 0 \approx X \xrightarrow{f} Y$.

Задача 47. Пространства X и Y являются подпространствами $Z(f)$. Пространство Y является подпространством $C(f)$.

Задача 48. Конус двулистного накрытия $S^n \to \mathbb{R}P^n$ гомеоморфен $\mathbb{R}P^{n+1}$.

Определение 2.9. Как множество *джойн* $X * Y$ пространств X и Y представляет собой множество отрезков соединяющих каждую точку пространства X с каждой точкой пространства Y. Топология (а также более строго само множество) на $X * Y$ определяется следующим образом. Это факторпространство $X \times Y \times I$ по отношению эквивалентности

$$(x, y', 0) \sim (x, y'', 0), \qquad (x', y, 1) \sim (x'', y, 1), \qquad \forall\, x, x', x'' \in X,\ y, y', y'' \in Y,$$

(отождествили концы отрезков, выходящих из одной точки).

Непосредственно из определения видно, что “сечения” джойна, т. е. образы $X \times Y \times t$ при фиксированном t, гомеоморфны, соответственно,

$$X \quad (t = 0), \qquad X \times Y \quad (0 < t < 1), \qquad Y \quad (t = 1).$$

Задача 49. Джойн двух отрезков — тетраэдр.

Задача 50. Пусть P — одноточечное пространство. Тогда $X * P \approx CX$.

Задача 51. $X * S^0 \approx \Sigma X$.

Задача 52. $S^m * S^n \approx S^{m+n+1}$.

Задача 53. Пусть X, Y и Z — топологические пространства. Тогда имеется естественная биекция множеств

$$(X * Y) * Z \leftrightarrow X * (Y * Z) \leftrightarrow X * Y * Z,$$

где последнее пространство получено факторизацией (какой ?) пространства $X \times Y \times Z \times \Delta$, где Δ — треугольник.

Если X, Y и Z — компактные пространства, то данные биекции являются гомеоморфизмами. Утверждение верно для многих некомпактных пространств, но не для всех.

Определение 2.10. Определим пространство $C(X, Y)$ или Y^X как пространство непрерывных отображений $X \to Y$, снабженное *компактно-открытой топологией,* база которой состоит из множеств

$$U(K, V) = \{f \in C(X, Y) \mid f(K) \subset V\},$$

где $K \subset X$ — произвольное компактное, а $V \subset Y$ — произвольное открытое множества.

Задача 54. Пусть $\mathbf{n}$ — (метрическое) пространство, состоящее из n точек. Тогда
$$Y^{\mathbf{n}} \approx Y^n := \underbrace{Y \times \cdots \times Y}_{n}.$$

Задача 55. Пусть X, Y и Z — топологические пространства. Тогда имеется естественное отображение
$$e : C(X, C(Y, Z)) \to C(X \times Y, Z), \qquad e(f)(x, y) := f(x)(y).$$
Если X и Y хаусдорфовы и локально компактны, то e — гомеоморфизм: $(Z^Y)^X \approx Z^{X\times Y}$.

Определение 2.11. В *пространстве путей* $C(I, X)$ пространства X выделим следующие подпространства. (*Началом пути* $\varphi : I \to X$ называется $x_0 = \varphi(0)$, *концом* — $x_1 = \varphi(1)$, *петлей* называется путь, у которого $x_0 = x_1$.)

Пространство $E(X; x_0, x_1)$ путей с началом и концом в фиксированных точках x_0 и x_1, соответственно.

Пространство $E(X; x_0)$ путей с началом в фиксированной точке x_0.

Пространство $\Omega(X, x_0) = E(X; x_0, x_0)$ петель с началом в фиксированной точке x_0.

Задача 56. Пространство $E(S^n; x_0, x_1)$ не зависит (с точностью до гомеоморфизма) от выбора точек, даже если они совпадают. Найти более широкий класс пространств с этим свойством, а также контрпримеры.

Модифицируем основные приведенные определения на случай пространств с отмеченной точкой (пунктированные пространства). Последние будем часто обозначать через (X, x_0) вместо X, чтобы указать отмеченную точку. Таким образом, мы хотим, чтобы в результате получалось снова пунктированное пространство.

- В произведении $X \times Y$ отмеченной точкой считается (x_0, y_0), где x_0 и y_0 — отмеченные точки X и Y, соответственно.
- В цилиндре,конусе и надстройке пространства X образующая, проходящая через отмеченную точку X, факторизуется в точку, которая и объявляется отмеченной точкой CX.
- В джойне $X * Y$ факторизуется в отмеченную точку отрезок, соединяющий отмеченные точки пространств X и Y.
- Все отображения предполагаются переводящими отмеченную точку в отмеченную.
- В частности, в цилиндре и конусе отображения имеется образующая, соединяющая отмеченные точки пространств X и Y — x_0 и $y_0 = \varphi(x_0)$. Эта образующая факторизуется и объявляется отмеченной точкой.
- Отмеченной точкой пространства $C(X, Y)$ считается отображение, переводящее все X в отмеченную точку Y.
- Если X — пунктированное пространство, то EX — пространство путей, начинающихся в отмеченной точке, а ΩX — пространство петель начинающихся и заканчивающихся в отмеченной точке. В соответствии с предыдущим пунктом, отмеченная точка этих пространств — путь, отображающий все точки I в отмеченную точку X.

Если не оговорено противного, выделенная точка стандартной сферы S^{n-1} и шара D^n — $(1, 0, \ldots, 0)$.

Задача 57. Для пространств с отмеченной точкой сохраняются гомеоморфизмы

$$CS^n \approx D^{n+1}, \qquad \Sigma S^n \approx S^{n+1}, \qquad S^m * S^n \approx S^{m+n+1}.$$

Задача 58. Пусть X и Y — пунктированные пространства. Тогда имеется гомеоморфизм $h_{X,Y} : C(\Sigma X, Y) \to C(X, \Omega Y)$, естественный в том смысле что для любых непрерывных отображений $\varphi : X' \to X$, $\psi : Y \to Y'$ коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd} C(\Sigma X, Y) \arrow[r, "h_{X,Y}"] \arrow[d, "\alpha"] & C(X, \Omega Y) \arrow[d, "\beta"] \\ C(\Sigma X', Y') \arrow[r, "h_{X',Y'}"] & C(X', \Omega Y'), \end{tikzcd}$$

где $\alpha(f)(x', t) = \psi(f(\varphi(x'), t))$, $\beta(g)(x')(t) = \psi(g(\varphi(x'))(t))$.

Определение 2.12. Для пунктированных пространств (X, x_0), (Y, y_0) естественным аналогом несвязной суммы служит *букет* $X \vee Y \subset X \times Y$,

$$X \vee Y := \{(x, y) \in X \times Y \mid x = x_0 \text{ или } y = y_0\}$$

Определение 2.13. *Смеш-произведение* или *тензорное произведение* $X \otimes Y := X \times Y / X \vee Y$.

3. Гомотопии, эквивалентности, классы

Определение 3.1. Непрерывные отображения $f, g : X \to Y$ *гомотопны* ($f \sim g$), если имеется такое непрерывное отображение $F : X \times I \to Y$, $f_t(x) := F(x, t)$, что $f_0 = f$ и $f_1 = g$. Тогда F — *гомотопия, связывающая* f и g.

Задача 59. (и определение) Проверить, что гомотопность — отношение эквивалентности в пространстве $C(X, Y)$ и, следовательно, определено множество *гомотопических классов* $\pi(X, Y) = C(X, Y)/\sim$. Класс элемента f будем обозначать $[f]$ или $cls(f)$.

Задача 60. Для любого X множество $\pi(X, I)$ одноэлементно.

Замечание 3.2. Для достаточно хороших пространств эти определения равносильны следующим: гомотопия — это путь в пространстве отображений, а $\pi(X, Y)$ — множество компонент линейной связности $C(X, Y)$.

Задача 61. Проверить, что гомотопность хорошо ведет себя по отношению взятию композиции непрерывных отображений, т. е. если $f \sim f' : X \to Y$ и $g \sim g' : Y \to Z$, то $(g \circ f) \sim (g' \circ f') : X \to Z$.

В силу этого для непрерывных отображений

$$h : X \to X', \qquad g : Y \to Y',$$

корректно определены отображения

$$h^* : \pi(X', Y) \to \pi(X, Y), \qquad g_* : \pi(X, Y) \to \pi(X, Y')$$

по формулам

$$h^*[f] = [f \circ h], \qquad g_*[q] = [q \circ g],$$

т. е. путем перехода к гомотопическим классам в диаграммах

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, "f"] & Y \\ X \arrow[u, "h"] \arrow[ur] & \end{tikzcd}, \qquad \begin{tikzcd} X \arrow[r, "q"] \arrow[dr] & Y \arrow[d, "g"] \\ & Y' \end{tikzcd}.$$

Определение 3.3. Пространства X_1 и X_2 называются *гомотопически эквивалентными* (пишем $X_1 \sim X_2$), если имеются такие $f \in C(X_1, X_2)$, $g \in C(X_2, X_1)$, что $g \circ f \sim \mathrm{Id}_{X_1}$, $f \circ g \sim \mathrm{Id}_{X_2}$.

Теорема 3.4. *Это определение эквивалентно следующим двум свойствам.*

(1) *Для любого пространства Y существует такая биекция $\varphi_Y : \pi(X_1, Y) \to \pi(X_2, Y)$, что для любого Y' и $h \in C(Y, Y')$ коммутативна диаграмма*

$$\begin{tikzcd} \pi(X_1, Y) \arrow[r, "\varphi_Y"] \arrow[d, "h_*"] & \pi(X_2, Y) \arrow[d, "h_*"] \\ \pi(X_1, Y') \arrow[r, "\varphi_{Y'}"] & \pi(X_2, Y'). \end{tikzcd}$$

(2) *Для любого пространства Y существует такая биекция $\varphi^Y : \pi(Y, X_1) \to \pi(Y, X_2)$, что для любого Y' и $h \in C(Y, Y')$ коммутативна диаграмма*

$$\begin{tikzcd} \pi(Y, X_1) \arrow[r, "\varphi^Y"] & \pi(Y, X_2) \\ \pi(Y', X_1) \arrow[r, "\varphi^{Y'}"] \arrow[u, "h^*"] & \pi(Y', X_2). \arrow[u, "h^*"'] \end{tikzcd}$$

Доказательство. Пусть выполнены условия пункта (1). В частности, имеются биекции $\varphi_{X_2} : \pi(X_1, X_2) \to \pi(X_2, X_2)$, $\varphi_{X_1} : \pi(X_1, X_1) \to \pi(X_2, X_1)$. Выберем $f \in (\varphi_{X_2})^{-1}[\mathrm{Id}_{X_2}]$, $g \in (\varphi_{X_1})[\mathrm{Id}_{X_1}]$. Имеем коммутативную диаграмму:

$$\begin{tikzcd} \pi(X_1, X_1) \arrow[r, "\varphi_{X_1}"] \arrow[d, "f_*"] & \pi(X_2, X_1) \arrow[d, "f_*"] \\ \pi(X_1, X_2) \arrow[r, "\varphi_{X_2}"] & \pi(X_2, X_2). \end{tikzcd}$$

Откуда

$$\begin{array}{rcl} (\varphi_{X_2} \circ f_*)[\mathrm{Id}_{X_1}] & = & \varphi_{X_2}[f \circ \mathrm{Id}_{X_1}] = \varphi_{X_2}[f] = [\mathrm{Id}_{X_2}], \\ \| & & \\ (f_* \circ \varphi_{X_1})[\mathrm{Id}_{X_1}] & = & f_*[g] = [f \circ g], \end{array}$$

так что $f \circ g \sim \mathrm{Id}_{X_2}$. Аналогично для обратной композиции.

Пусть теперь $X_1 \sim X_2$, т. е. имеются f и g с соответствующими свойствами. Положим для любого пространства Y: $\varphi_Y := g^*$. Покажем, что φ_Y — биекция, точнее, что f^* является обратным. Действительно, имеем для любого $r \in C(X_1, Y)$:

$$(f^* \circ g^*)[r] = f^*[r \circ g] = [r \circ g \circ f] = [r],$$

и, совершенно аналогично, в другом порядке. Осталось проверить коммутативность диаграммы

$$\begin{array}{ccc} \pi(X_1,Y) & \xrightarrow{\varphi_Y=g^*} & \pi(X_2,Y) \\ \downarrow{\scriptstyle h_*} & & \downarrow{\scriptstyle h_*} \\ \pi(X_1,Y') & \xrightarrow{\varphi_{Y'}=g^*} & \pi(X_2,Y'). \end{array}$$

Имеем для любого $r \in C(X_1, Y)$:

$$(g^* h_*)[r] = g^*[h \circ r] = [h \circ r \circ g], \qquad (h_* g^*)[r] = h_*[r \circ g] = [h \circ r \circ g].$$

Для (2) доказательство аналогично. □

Определение 3.5. Классы гомотопической эквивалентности называются *гомотопическими типами.*

Задача 62. Доказать, что а) точка и плоскость, б) кольцо и окружность гомотопически эквивалентны, но не гомеоморфны.

Определение 3.6. Пространство называется *стягиваемым,* если его тождественное отображение гомотопно отображению в точку. Это равносильно гомотопической эквивалентности точке (проверьте !).

Задача 63. Для любого X пространства CX и $E(X, x_0)$ стягиваемы.

Задача 64. $C(f) \sim Y$, где $f : X \to Y$.

Задача 65. Если $X \sim Y$, то $\Sigma X \sim \Sigma Y$.

Определение 3.7. Подпространство $A \subset X$ называется *ретрактом* X, если имеется непрерывное отображение r (*ретракция*) пространства X на A, тождественное на A:

$$r : X \to X, \qquad r(X) \subset A, \qquad r(a) = a \quad \forall\, a \in A.$$

Ректракт называется *деформационным,* если существует ретракция с $r \sim \mathrm{Id}_X$ и *строгим деформационным,* если эта гомотопия неподвижна на A.

Задача 66. Любая точка X является его ретрактом. Приведите пример, что она не является деформационным ретрактом.

Задача 67. Вообще: докажите, что A является деформационным ретрактом X тогда и только тогда, когда включение A является гомотопической эквивалентностью. Приведите пример, когда $A \subset X$, $A \sim X$, но не является деформационным ретрактом X.

Задача 68. Докажите, что двоеточие (концы отрезка) не является его ретрактом.

Задача 69. Основания цилиндра являются его ретрактами.

Задача 70. Основание CX является ретрактом тогда и только тогда, когда X стягиваемо.

Если, как и ранее, переходя к пунктированным пространствам, мы будем требовать, чтобы все отображения, в том числе и гомотопии, сохраняли отмеченные точки, мы получим обобщения всех этих понятий, включая гомотопические типы. Соответствующие множества гомотопических классов будут обозначаться $\pi_b(X, Y)$.

Задача 71. Проверить, что для пунктированных пространств основные конструкции сохраняют гомотопические эквивалентности, т. е . являются операциями на гомотопических типах.

Нам также понадобятся гомотопии отображений пар, т. е. таких непрерывных отображений $f : X \to Y$, что $f(A) \subset B$, где $A \subset X$ и $B \subset Y$ — фиксированные подмножества. Если пространства пунктированы, то подразумевается, что $x_0 \in A$, $y_0 \in B$.

4. H- и H'-пространства, групповые структуры

Зафиксируем пунктированное пространство (Y, y_0).

Определение 4.1. *Естественная групповая структура* на множествах $\pi_b(X, Y)$ — это структура группы на каждом из них, причем для любого $f : X_1 \to X_2$ соответствующее отображение $f^* : \pi_b(X_2, Y) \to \pi_b(X_1, Y)$ является гомоморфизмом групп.

Соответственно, естественная групповая структура на множествах $\pi_b(Y, X)$ — это структура группы на каждом из них, причем для любого $f : X_1 \to X_2$ соответствующее отображение $f_* : \pi_b(Y, X_1) \to \pi_b(Y, X_2)$ является гомоморфизмом групп.

Лемма 4.2. *Если имеется естественная групповая структура на множествах $\pi_b(X, Y)$, то единицей группы $\pi_b(Y, Y)$ является класс постоянного отображения $c : Y \to y_0$.*

Доказательство. Рассмотрим (единственное) вложение одноточечного пространства $i : pt \to Y$, так что $i(pt) = y_0$, и индуцированное отображение $i_* : \pi_b(Y, pt) \to \pi_b(Y, Y)$, где первая группа состоит лишь из единицы $e = [\varepsilon : Y \to pt]$. Значит, ее образ $i_*(e) = i_*[\varepsilon] = [i \circ \varepsilon] = [c]$ — единица $\pi_b(Y, Y)$. □

Определение 4.3. Пространство Y называется *H-пространством,* если определены отображения $\mu : Y \times Y \to Y$ (умножение) и $\nu : Y \to Y$ (взятие обратного), обладающие следующими свойствами

(1) (гомотопическая единица). Отображения

$$\mu \circ j_1 : Y \xrightarrow{j_1} Y \times Y \xrightarrow{\mu} Y, \quad j_1(y) = (y, y_0),$$
$$\mu \circ j_2 : Y \xrightarrow{j_2} Y \times Y \xrightarrow{\mu} Y, \quad j_2(y) = (y_0, y),$$

гомотопны тождественному: $\mu \circ j_1 \sim \mathrm{Id}_Y$, $\mu \circ j_2 \sim \mathrm{Id}_Y$.

(2) (гомотопическая ассоциативность). Отображения

$$Y \times (Y \times Y) \xrightarrow{\mathrm{Id} \times \mu} Y \times Y \xrightarrow{\mu} Y, \qquad (Y \times Y) \times Y \xrightarrow{\mu \times \mathrm{Id}} Y \times Y \xrightarrow{\mu} Y$$

гомотопны.

(3) (гомотопическое обращение). Отображения

$$Y \xrightarrow{\mathrm{diag}} Y \times Y \xrightarrow{\mathrm{Id} \times \nu} Y \times Y \xrightarrow{\mu} Y, \qquad Y \xrightarrow{\mathrm{diag}} Y \times Y \xrightarrow{\nu \times \mathrm{Id}} Y \times Y \xrightarrow{\mu} Y$$

гомотопны отображению в точку.

Задача 72. Доказать, что на пространстве петель ΩZ отображения

$$\mu(f, g)(t) := \begin{cases} f(2t), & t \in [0, 1/2], \\ g(2t - 1), & t \in [1/2, 1], \end{cases} \qquad \nu(f)(t) := f(1 - t),$$

(пробегание двух петель последовательно и пробегание петли в противоположном направлении) задают структуру H-пространства.

Задача 73. Доказать, что на топологической группе групповые операции задают структуру H-пространства.

Теорема 4.4. *Естественная по X групповая структура на $\pi_b(X,Y)$ существует тогда и только тогда, когда Y является H-пространством.*

Мы не будем доказывать эту теорему, а перейдем к более важному сейчас для нас двойственному понятию.

Определение 4.5. Пространство Y называется *H'-пространством,* если определены отображения $\mu : Y \to Y \vee Y$ (коумножение) и $\nu : Y \to Y$ (взятие кообратного), обладающие следующими свойствами

(1) (гомотопическая коединица). Отображения

$$\begin{aligned} p_1 \circ \mu : Y \xrightarrow{\mu} Y \vee Y \xrightarrow{p_1} Y, \quad p_1(y, y_0) = y,\ p_1(y_0, y) = y_0,\\ p_2 \circ \mu : Y \xrightarrow{\mu} Y \vee Y \xrightarrow{p_2} Y, \quad p_2(y, y_0) = y_0,\ p_1(y_0, y) = y, \end{aligned}$$

гомотопны тождественному: $p_1 \circ \mu \sim \mathrm{Id}_Y$, $p_2 \circ \mu \sim \mathrm{Id}_Y$.

(2) (гомотопическая коассоциативность). Отображения

$$Y \xrightarrow{\mu} Y \vee Y \xrightarrow{\mathrm{Id}\vee\mu} Y \vee (Y \vee Y), \qquad Y \xrightarrow{\mu} Y \vee Y \xrightarrow{\mu\vee\mathrm{Id}} (Y \vee Y) \vee Y$$

гомотопны.

(3) (гомотопическое кообращение). Отображения

$$Y \xrightarrow{\mu} Y \vee Y \xrightarrow{\mathrm{Id}\vee\nu} Y \vee Y \xrightarrow{p} Y, \qquad Y \xrightarrow{\mu} Y \vee Y \xrightarrow{\nu\vee\mathrm{Id}} Y \vee Y \xrightarrow{p} Y$$

гомотопны отображению в точку, где $p(y, y_0) = p(y_0, y) = y$.

Задача 74. Доказать, что на надстройке ΣZ отображения

$$\mu(z,t) := \begin{cases} ((z, 2t), y_0), & t \in [0, 1/2],\\ (y_0, (z, 2t-1)), & t \in [1/2, 1], \end{cases} \qquad \nu(z,t) := (z, 1-t),$$

где y_0 — отмеченная точка ΣZ, задают структуру H'-пространства.

Теорема 4.6. *Естественная по X групповая структура на $\pi_b(Y,X)$ существует тогда и только тогда, когда Y является H'-пространством.*

Доказательство. Пусть групповая структура существует. Положим

$$i_{1,2} : Y \to Y \vee Y, \qquad i_1(y) = (y, y_0), \qquad i_2(y) = (y_0, y).$$

Пусть $m = [i_1] \cdot [i_2] \in \pi_b(Y, Y \vee Y)$ в смысле этой групповой структуры (групповое умножение обозначается через $\cdot$), а $\mu : Y \to Y \vee Y$ — любой представитель класса m. Возьмем $n = [\mathrm{Id}]^{-1} \in \pi_b(Y,Y)$, а ν — любой его представитель.

Проверим первое свойство пункта (1). Отображение $p_1 : Y \vee Y \to Y$ индуцирует гомоморфизм $(p_1)_* : \pi_b(Y, Y \vee Y) \to \pi_b(Y,Y)$, причем

$$(p_1)_*[i_1] = [p_1 \circ i_1] = [\mathrm{Id}_Y], \qquad (p_1)_*[i_2] = [p_1 \circ i_2] = [c : Y \to y_0]. \tag{1}$$

В силу мультипликативности, (1) и леммы 4.2

$$[p_1 \circ \mu] = (p_1)_*([i_1] \cdot [i_2]) = (p_1)_*[i_1] \cdot (p_1)_*[i_2] = [\mathrm{Id}_Y] \cdot [c] = [\mathrm{Id}_Y],$$

что и требовалось. Свойство (2) проверяется следующим образом. Сначала заметим следующее. Пусть

$$j_1, j_2, j_3 : Y \to Y \vee Y \vee Y,\ j_1(y) = (y, y_0, y_0),\ j_2(y) = (y_0, y, y_0),\ j_3(y) = (y_0, y_0, y),$$

а

$$\mu_{12}, \mu_{23} : Y \to Y \vee Y \vee Y, \qquad \mu_{12}(y) = (\mu(y), y_0), \qquad \mu_{23}(y) = (y_0, \mu(y)).$$

Тогда

$$[\mu_{12}] = [j_1] \cdot [j_2]. \tag{2}$$

Действительно, положим $J_{12} : Y \vee Y \to Y \vee Y \vee Y$ по формуле $(y, z) \mapsto (y, z, y_0)$. Тогда

$$\mu_{12} = J_{12} \circ \mu, \qquad j_1 = J_{12} \circ i_1, \qquad j_2 = J_{12} \circ i_2,$$

так что (2) равносильно

$$(J_{12})_*[\mu] = (J_{12})_*[i_1] \cdot (J_{12})_*[i_2].$$

Последнее сразу следует из естественности групповой структуры и определения μ. Аналогично (2) получаем

$$[\mu_{23}] = [j_2] \cdot [j_3]. \tag{3}$$

Из (2) и (3) получаем

$$\begin{aligned}[(\mathrm{Id} \vee \mu) \circ \mu] &= (\mathrm{Id} \vee \mu)_*([i_1] \cdot [i_2]) = (\mathrm{Id} \vee \mu)_*[i_1] \cdot (\mathrm{Id} \vee \mu)_*[i_2] = \\ &= [(\mathrm{Id} \vee \mu) \circ i_1] \cdot [(\mathrm{Id} \vee \mu \circ i_2] = [j_1] \cdot [\mu_{23}] = [j_1] \cdot [j_2] \cdot [j_3],\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}[(\mu \vee \mathrm{Id}) \circ \mu] &= (\mu \vee \mathrm{Id})_*([i_1] \cdot [i_2]) = (\mu \vee \mathrm{Id})_*[i_1] \cdot (\mu \vee \mathrm{Id})_*[i_2] = \\ &= [(\mu \vee \mathrm{Id}) \circ i_1] \cdot [(\mu \vee \mathrm{Id} \circ i_2] = [\mu_{12}] \cdot [j_3] = [j_1] \cdot [j_2] \cdot [j_3].\end{aligned}$$

Проверим свойство (3):

$$\begin{aligned}[p \circ (\mathrm{Id} \vee \nu) \circ \mu] &= p_*(\mathrm{Id} \vee \nu)_*([i_1] \cdot [i_2]) = \\ &= p_*(\mathrm{Id} \vee \nu)_*[i_1] \cdot p_*(\mathrm{Id} \vee \nu)_*[i_2] = [\mathrm{Id}] \cdot [\nu] = [\mathrm{Id}] \cdot [\mathrm{Id}]^{-1} = e = [c].\end{aligned}$$

Остальные свойства проверяются аналогично.

Обратно, пусть Y является H'-пространством. Определим на $\pi_b(Y, X)$ умножение по формуле

$$\pi_b(Y, X) \times \pi_b(Y, X) \cong \pi_b(Y \vee Y, X) \xrightarrow{\mu^*} \pi_b(Y, X),$$

а взятие обратного —

$$\pi_b(Y, X) \xrightarrow{\nu^*} \pi_b(Y, X).$$

Тогда они задают естественную групповую структуру. Проверим, например, ассоциативность умножения. После естественного отождествления букетов, взятых в разном порядке, это следует из гомотопической коассоциативности. Единицей должен быть класс постоянного отображения. Действительно,

$$[f]\,[c] = \mu^*(p_1)^*[f] = [f \circ p_1 \circ \mu] = [f]$$

в силу первого свойства из (1) (гомотопической коединицы). Аналогично проверяется, что $\nu^*[f]$ — обратный к $[f]$:

$$[f]\,\nu^*[f] = \mu^*(\mathrm{Id} \vee \nu)^* p^*[f] = [f \circ p \circ (\mathrm{Id} \vee \nu) \circ \mu] = [f]$$

в силу гомотопического кообращения. Естественность по X, т. е. коммутативность диаграммы

$$\begin{array}{ccc} \pi_b(Y \vee Y, X) & \xrightarrow{\mu^*} & \pi_b(Y, X) \\ {\scriptstyle h_*}\downarrow & & {\scriptstyle h_*}\downarrow \\ \pi_b(Y \vee Y, X') & \xrightarrow{\mu^*} & \pi_b(Y, X') \end{array}$$

для любого $h : X \to X'$ следует из того, что h_* и g^* всегда коммутируют (мы с этим уже встречались):

$$h_*g^*[f] = h_*[f \circ g] = [h \circ f \circ g], \qquad g^*h_*[f] = g^*[h \circ f] = [h \circ f \circ g].$$

□

Задача 75. Доделать детали доказательства.

Следствие 4.7. *Поскольку сферы являются надстройками, то $\pi_b(S^n, X)$ несут естественную групповую структуру.*

Определение 4.8. *Гомотопическими группами* $\pi_n(X)$ пространства X называются группы $\pi_b(S^n, X)$.

Задача 76. Если $f \sim g : X \to Y$, то $f_* = g_* : \pi_n(X) \to \pi_n(Y)$.

5. Фундаментальная группа

Определение 5.1. *Фундаментальной группой* пространства $X = (X, x_0)$ называется $\pi_1(X) = \pi_1(X, x_0) = \pi_b(S^1, X)$. В соответствии со сказанным в предыдущем параграфе, $\pi_1(X)$ как множество совпадает с гомотопическими классами петель как отображений $S^1 \to X$, сохраняющих отмеченную точку, а групповое умножение задается последовательным пробеганием двух петель (см. задачу 74).

Замечание 5.2. Перемножать таким способом можно не только петли, но и любые пути, если конец первого совпадает с началом второго.

Теорема 5.3. *Пусть X линейно связно. Тогда $\pi_1(X, x_0) \cong \pi_1(X, x_1)$ для любых x_0, x_1.*

Доказательство. Выберем (неоднозначно) в силу линейной связности путь $a : I \to X$, соединяющий x_0 и x_1. Определим

$$a_\bullet : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(X, x_1), \qquad a_\bullet(\varphi) := (a\varphi)a^{-1}.$$

Ясно, что класс результата одинаков для гомотопных петель, так что $a_\bullet$ действительно отображает гомотопические множества, причем, так как

$$(a\varphi)a^{-1} \cdot (a\psi)a^{-1} = (a\varphi\psi)a^{-1},$$

то $a_\bullet$ — гомоморфизм. Поскольку $\varphi \mapsto (a^{-1}\varphi)a$, очевидно является обратным к $a_\bullet$, то $a_\bullet$ — изоморфизм. □

Задача 77. При изменении a изоморфизм изменяется на внутренний автоморфизм группы. При изменении a на гомотопный, изоморфизм не меняется.

Замечание 5.4. Мы ставили скобки, т. к. перемножение петель и путей не ассоциативно — другой способ пробегания параметра. Ассоциативность имеется только на гомотопическом уровне.

Теорема 5.5. $\pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$.

Доказательство. Каждая точка S^1 — это вещественное число t, определенное с точностью до $2k\pi$: $\mathbb{C} \supset S^1 \ni z = e^{it}$. При этом отождествлении петля $\varphi : I \to S^1$ превращается в многозначную функцию $\overline{\varphi} : I \to \mathbb{R}$, значения которой определены с точностью до $2k\pi$, причем на концах отрезка — в точности числа вида $2k\pi$.

Определим однозначную функцию $f = f_\varphi : I \to \mathbb{R}$ следующим образом. Поскольку I — компакт, то отображение φ равномерно непрерывно и можно выбрать достаточно большое n чтобы $\varphi(x)$ и $\varphi(x')$ не были бы диаметрально противоположными точками S^1 при $|x - x'| \leqslant 1/n$. Значения f будем определять последовательно на отрезках $[0, 1/n]$, $[1/n, 2/n]$, $\ldots [(n-1)/n, 1]$. Положим $f(0) = 0$, а при $x \in [0, 1/n]$ в качестве значения $f(x)$ будем брать то (единственное) значение $\overline{\varphi}(x)$, которое отличается от $0 = f(0)$ меньше, чем на π. На последующих отрезках то же самое делается относительно (уже полученного) значения в начальной точке (не обязательно нулевого). Поскольку при сделанных предположениях функция не может на этих отрезках сделать скачок в $2k\pi$, $k \neq 0$, то она непрерывна.

При этом функция f_φ непрерывно зависит от φ, а значит и ее значение $f_\varphi(1)$. Но последнее принимает дискретные значения, а значит не меняется при малых возмущениях, а следовательно, и при гомотопиях. Получаем отображение

$$e : \pi(S^1) \to \mathbb{Z}, \qquad [\varphi] \mapsto \frac{f_\varphi(1)}{2\pi}.$$

Оно является сюръективным, поскольку для любого k мы можем взять петлю ρ_k, получающуюся равномерной намоткой в нужном направлении окружности на себя k раз. Ей будет отвечать линейная функция f_{ρ_k}, $f_{\rho_k}(0) = 0$, $f_{\rho_k}(1) = 2k\pi$. Более того, всякая функция f_ψ, удовлетворяющая этим условиям, (линейно) гомотопна f_{ρ_k}: $F(x,t) = tf_\psi(x) + (1-t)f_{\rho_k}(x)$. Тогда $G(e^{2\pi ix}, t) = e^{iF(x,t)}$ — корректно определенная гомотопия ρ_k и ψ. Значит, e — инъективно и, таким образом, биективно. Более того, мы показали, что всякая петля гомотопна равномерной намотке ρ_k, а для таких петель, очевидно, выполнено мультипликативное свойство:

$$e([\rho_k] \cdot [\rho_m]) = e[\rho_{k+m}] = k + m = e[\rho_k] + e[\rho_m].$$

Значит, e — изоморфизм групп. □

Замечание 5.6. При доказательстве этой теоремы мы использовали очень важное и общее наблюдение в теории гомоморфизмов групп гомотопических классов отображений: если имеется инъекция на представителях, сюръекция и на отображениях, и на их гомотопиях, то имеется инъекция на классах.

Замечание 5.7. Другое доказательство может быть основано на гладких аппроксимациях и степени отображения, либо на клеточной аппроксимации, о которой речь пойдет ниже,

6. Клеточные пространства

Определение 6.1. *Клеточное пространство* (или *клеточное разбиение, клеточный комплекс,* CW-*комплекс*) — хаусдорфово топологическое пространство K, для которого:

- зафиксировано разбиение K на непересекающиеся подмножества (*клетки*):

$$K = \bigcup_{q=0}^{\infty} \bigcup_{i \in I_q} e_i^q,$$

- для каждой клетки e_i^q существует (иногда фиксируется) такое непрерывное *характеристическое отображение* $\chi_i^q : D^q \to K$ замкнутого шара размерности q, что его ограничение на внутренность шара является гомеоморфизмом

$$\chi_i^q|_{\operatorname{Int} D^q} : \operatorname{Int} D^q \approx e_i^q,$$

причем требуется выполнение следующих двух аксиом:

(C) *граница* $\dot{e}_i^q = \overline{e_i^q} \setminus e_i^q$ содержится в объединении конечного числа клеток, причем они имеют меньшую размерность, чем q;

(W) множество $F \subset K$ замкнуто тогда и только тогда, когда для любой клетки e_i^q замкнуто $F \cap \overline{e_i^q}$ (т. е. топология K — слабейшая, для которой все χ_i^q непрерывны — проверьте !).

Определение 6.2. *Клеточное подпространство* — объединение некоторого набора клеток, являющееся замкнутым подмножеством K.

Задача 78. Проверьте, что оно само является клеточным пространством.

Определение 6.3. Подмножество $\operatorname{sk}_n K \subset K$, составленное из его клеток размерности, не превосходящей n, называется его *n-остовом.*

Задача 79. Проверьте, что $\operatorname{sk}_n K$ — клеточное подпространство.

Определение 6.4. Клеточное пространство называется *конечным* (соотв., *счетным*), если оно состоит из конечного (соотв., счетного) числа клеток, и *локально конечным,* если для каждой точки его найдется окрестность, содержащаяся в некотором конечном клеточном подпространстве.

Задача 80. Для конечных клеточных пространств аксиомы (C) и (W) следуют из первой части определения.

Задача 81. Каждая точка клеточного пространства содержится в некотором конечном клеточном подпространстве.

Задача 82. Каждое компактное подмножество клеточного пространства содержится в некотором конечном клеточном подпространстве.

Задача 83. Докажите, что клеточное пространство конечно (локально конечно) тогда и только тогда, когда оно компактно (локально компактно).

Задача 84. Докажите, что отображение клеточного пространства в другое топологическое пространство непрерывно тогда и только тогда, когда оно непрерывно на любом конечном подпространстве.

Определение 6.5. Непрерывное отображение f клеточного пространства X в клеточное пространство Y называется *клеточным*, если $f(\operatorname{sk}_n X) \subset \operatorname{sk}_n Y$ при любом n.

Задача 85. Пусть X и Y обозначают отрезок I, представленный как клеточное пространство двумя способами:

$$X = \{0\} \cup (0,1) \cup \{1\}, \qquad Y = \{0\} \cup (0,1/2) \cup \{1/2\} \cup (1/2,1) \cup \{1\}.$$

Будут ли клеточными тождественные отображения $X \to Y$ и $Y \to X$?

Приведем некоторые контрпримеры.

Замечание 6.6. Замыкание клетки может не быть клеточным пространством. Пример: разбиение букета $S^2 \vee S^1$, состоящее из одной двумерной клетки (S^2 без отмеченной точки A), одной нульмерной клетки (точка B, противоположная A на S^1), и одной одномерной клетки (S^1 без B). Тогда замыкание двумерной клетки не является клеточным подпространством.

Замечание 6.7. Из (W) не следует (C). Разбиение диска D^2 на двумерную клетку, равную внутренности $\operatorname{Int} D^2$ и бесконечное множество нульмерных клеток, отвечающих точкам граничной окружности S^1 удовлетворяет аксиоме (W) (потому что всегда $F \cap \overline{\operatorname{Int} D^2} = F$), но не удовлетворяет аксиоме (C).

Замечание 6.8. Из (C) не следует (W). Возьмем бесконечное семейство $\{I_\alpha\}_{\alpha=1}^\infty$ копий отрезка I, отождествим нулевые концы и топологизируем получившееся множество при помощи метрики: расстояние между точками $t' \in I_{\alpha'}$ и $t \in I_\alpha$ равно $|t-t'|$, если $\alpha = \alpha'$, и равно $t+t'$, если $\alpha \neq \alpha'$. Разбиение построенного пространства на множества $\operatorname{Int} I_\alpha$ и оставшиеся точки не удовлетворяет только аксиоме (W): точки $1/\alpha \in I_\alpha$ составляют последовательность, сходящуюся к 0, и, значит, незамкнутое множество, но пересечение этой последовательности с замыканием любой клетки замкнуто.

Замечание 6.9. Клеточные разбиения хорошо ведут себя по отношению к операциям, за исключением произведения, тензорного произведения и джойна. При последних трех конструкциях может потеряться (W). Тем не менее, если одно из двух пространств локально конечно, то проблемы не возникает.

Задача 86. Проверьте.

С точностью до осторожности с аксиомой (W) клеточные пространства могут быть построены по индукции путем приклеивания клеток следующей размерности к остову предыдущей размерности. Точнее, пусть $\{e^n_\alpha\}$ — все n-мерные клетки пространства X, а $f^n_\alpha : D^n \to X$ — соответствующие характеристические отображения. Поскольку $f^n_\alpha(S^{n-1}) \subset \operatorname{sk}_{n-1} X$, мы можем сузить f^n_α до отображения $g^n_\alpha : S^{n-1} \to \operatorname{sk}_{n-1} X$ (отображения g^n_α называются приклеивающими). Рассмотрим несвязную сумму $D = \sqcup_\alpha D^n_\alpha$ n-мерных шаров, по одному на каждую n-мерную клетку пространства X, и положим $S = \sqcup_\alpha S^{n-1}_\alpha \subset D$. Далее, рассмотрим отображения $g^n : S \to X$ по формуле $g^n|_{S^{n-1}_\alpha} = g^n_\alpha$. Тогда

$$\operatorname{sk}_n X = (\operatorname{sk}_{n-1} X) \cup_{g^n} D.$$

Задача 87. Докажите, что клеточное пространство линейно связно тогда и только тогда, когда линейно связен его первый остов.

Задача 88. Докажите, что клеточное пространство линейно связно тогда и только тогда, когда оно связно.

Определение 6.10. Пара (X, A) называется *парой Борсука* (или корасслоением), если для любого пространства Y и любого непрерывного отображения $F : X \to Y$ всякая гомотопия $f_t : A \to Y$, такая, что $f_0 = F|_A$ может быть продолжена до гомотопии $F_t : X \to Y$, у которой $F_0 = F$.

Теорема 6.11 (Борсук)**.** *Если X — клеточное пространство и A — его клеточное подпространство, то (X, A) — пара Борсука.*

Доказательство. Нам даны отображения $f : A \times I \to Y$ (гомотопия f_t) и $F : X \times 0 \to Y$, причем $f|_{A\times 0} = F|_{A\times 0}$. Нам нужно определить такое отображение $\overline{F} : X \times I \to Y$, что $\overline{F}|_{A\times I} = f$ и $\overline{F}|_{X\times 0} = F$. Мы это сделаем индукцией по остовам. Продолжим сначала f на $(A \cup \operatorname{sk}_0 X) \times I$ "тождественно":

$$\overline{F}(x,t) := \begin{cases} F(x,0), & \text{если } x \in (\operatorname{sk}_0 X \setminus A), \\ f(x,t), & \text{если } x \in A. \end{cases}$$

Вопрос о непрерывности мы пока не обсуждаем. Заметим только, что отображение непрерывно на замыкании каждой одномерной клетки, полученной умножением нульмерной клетки на внутренность отрезка. Допустим, что мы продолжили таким образом f на $(A\cup\operatorname{sk}_n X)\times I$, причем отображение непрерывно на замыкании каждой $i{+}1$-мерной клетки, полученной умножением i-мерной клетки на внутренность отрезка, $i \leqslant n$. Продолжим теперь f на $(A\cup\operatorname{sk}_{n+1} X)\times I$, поступая для каждой $n{+}1$-мерной клетки e^{n+1}_α следующим образом. Отображение уже задано на замкнутой части границы $e^{n+1}_\alpha \times \operatorname{Int}(I)$, именно, на $e^{n+1}_\alpha \times 0$ (где оно равняется F) и на $\dot{e}^{n+1}_\alpha \times I$. Поскольку это множество равняется объединению конечного числа замкнутых множеств, на которых $\overline{F}$ по предположению индукции непрерывно, то $\overline{F}$ непрерывно и на всем этом множестве. Пусть $p : D^{n+1} \times I \to (S^n \times I) \cup (D^{n+1} \times 0)$ — проектирование цилиндра из точки находящейся "несколько выше" верхнего основания. Это ретракция. Определим $p' := \overline{F} \circ \chi \circ p$. Поскольку на внутренности $D^{n+1} \times 1$ верхнего основания цилиндра при приклеивании никаких отождествлений не происходит, то отображение p' определяет продолжение $\overline{F}$ на соответствующую клетку цилиндра. В итоге получаем $\overline{F}$, продолженное на все пространство. Убедимся, что оно непрерывно, поскольку по построению, ограничение его на замыкание каждой клетки непрерывно. Прообраз замкнутого множества K равняется объединению прообразов $(\overline{F}_\beta)^{-1}(K)$, где $\overline{F}_\beta$ — ограничения на замыкания клеток. В силу их непрерывности соответствующие прообразы замкнуты. Значит, по аксиоме (W) множество $(\overline{F})^{-1}(K)$ замкнуто, что и требовалось. $\square$

Следствие 6.12. *Пусть X — клеточное пространство, а A — его клеточное подпространство. Если A стягиваемо по себе в точку, то $X/A \sim X$.*

Доказательство. Обозначим через p проектирование $X \to X/A$. Так как A стягиваемо, то существует такая гомотопия $f_t : A \to A$, что $f_0 = \mathrm{Id}_A$ и $f_1(A)$ есть точка. В силу теоремы Борсука, существует такая гомотопия $F_t : X \to X$, что $F_0 = \mathrm{Id}_X$ и $F_t|_A = f_t$. В частности, $F_1(A) = x_0 \in A \subset X$. Это означает, что $F_1 = q \circ p$, где $q : X/A \to X$ — некоторое непрерывное отображение. По построению, $F_1 \sim F_0$, т. е. $q \circ p \sim \mathrm{Id}_X$. Далее, при любом t имеем $F_t(A) \subset A$. Следовательно, $p \circ F_t = q_t \circ p$, где $q_t : X/A \to X/A$ — некоторая гомотопия. При этом $q_0 = \mathrm{Id}_{X/A}$ и $q_1 = p \circ q$; следовательно, $p \circ q \sim \mathrm{Id}_{X/A}$. $\square$

Следствие 6.13. *Если X — клеточное пространство и A — его клеточное подпространство, то $X/A \sim X \cup CA$, где CA конус над A.*

Доказательство. $X/A = (X \cup CA)/CA \sim X \cup CA$; последнее вытекает из предыдущего следствия, примененного к клеточному пространству $X \cup CA$ и его стягиваемому клеточному подпространству CA. $\square$

Лемма 6.14 (о свободной точке)**.** *Пусть U — открытое подмножество пространства $\mathbb{R}^p$ и $\varphi : U \to \operatorname{Int} D^q$ — такое непрерывное отображение, что множество $V = \varphi^{-1}(d^q) \subset U$ компактно, где d^q — некоторый замкнутый шар в $\operatorname{Int} D^q$. Если $q > p$, то существует такое непрерывное отображение $\psi : U \to \operatorname{Int} D^q$, совпадающее с φ вне V, что его образ не покрывает всего шара d^q. При этом новое отображение (линейно) гомотопно исходному.*

Идея доказательства. Существует два подхода к доказательству. Один основан на аппроксимации отображения гладким. Второй — на аппроксимации линейным на маленьких кусках. Точнее, устраивается триангуляция, достаточно мелкая по сравнению со степенью равномерной непрерывности отображения компакта. $\square$

Теорема 6.15 (о клеточной аппроксимации)**.** *Пусть f — непрерывное отображение клеточного пространства X в клеточное пространство Y, причем на клеточном подпространстве A пространства X отображение f клеточно. Тогда существует такое клеточное отображение $g : X \to Y$, что $g|_A = f|_A$ и, более того, f гомотопно g относительно A ($f \sim g \operatorname{rel} A$), т.е. гомотопия постоянна на A.*

Доказательство. Пусть отображение f уже сделано клеточным не только на всех клетках из A, но и на всех клетках из X, имеющих размерность $< p$. Возьмем p-мерную клетку $e^p \subset X \setminus A$. Ее образ $f(e^p)$ пересекается лишь с конечным числом клеток пространства Y (это следует из компактности $\overline{e}^p$ по доказательству упражнения 81, а значит, и $f(\overline{e}^p)$, так что можно применить упражнение 82). Выберем среди этих клеток пространства Y клетку наибольшей размерности, скажем, e^q, $\dim e^q = q$. Если $q < p$, она уже удовлетворяет условиям. В противном случае по лемме 6.14 сужение $f|_{A \cup \operatorname{sk}_{p-1} X \cup e^p}$ гомотопно $\operatorname{rel}(A \cup \operatorname{sk}_{p-1} X)$ такому отображению $f' : A \cup \operatorname{sk}_{p-1} X \cup e^p \to Y$, что $f'(e^p)$ задевает те же клетки, что и $f(e^p)$, но $f'(e^p)$ не содержит всю клетку e^q. В самом деле, пусть $h : D^p \to X$, $k : D^q \to Y$ — характеристические отображения, соответствующие клеткам e^p, e^q. Положим $U = h^{-1}(f^{-1}(e^q) \cap e^p)$ и определим отображение $\varphi : U \to \operatorname{Int} D^q$ как композицию:

$$U \xrightarrow{h} f^{-1}(e^q) \cap e^p \xrightarrow{f} e^q \xrightarrow{k^{-1}} \operatorname{Int} D^q.$$

Заметим, что U является открытым множеством в $\operatorname{Int} D^p \subset \mathbb{R}^p$. Обозначим через $d^q \subset \operatorname{Int} D^q \subset D^q$ замкнутый концентрический шар в D^q. По аксиоме (W) $k(d^q) \subset e^q$ замкнуто в Y, а значит и в $\overline{e}^q$. Тогда множество $V := \varphi^{-1} d^q$ совпадает с прообразом $k(d^q)$ при отображении $f \circ h : U_* \to \overline{e}^q$, где $U_* := h^{-1}(f^{-1}(\overline{e}^q) \cap \overline{e}^p)$, $U \subset U_*$. В силу непрерывности f, множество $f^{-1}(\overline{e}^q)$ замкнуто, а значит, и U_* — замкнутое подмножество компакта D^p. Поэтому V компактно как замкнутое подмножество D^p. Поэтому можем применить лемму 6.14 и получить отображение $\psi : U \to \operatorname{Int} D^q$. Отображение f' мы определим как совпадающее с f вне $h(U)$ и как композицию

$$h(U) \xrightarrow{h^{-1}} U \xrightarrow{\psi} \operatorname{Int} D^q \xrightarrow{k} e^q \subset Y \qquad (4)$$

на $h(U)$. Так как ψ совпадает с φ на $U \setminus V$, то (4) совпадает с f на $h(U \setminus V)$, так что f' непрерывно. Оно гомотопно f' относительно $A \cup \operatorname{sk}_{p-1} X$, и даже $A \cup \operatorname{sk}_{p-1} X \cup (e^p \setminus h(V))$. Ясно также, что $f'(e^p)$ не покрывает e^q. Итак, отображение f' обладает всеми необходимыми свойствами.

Теперь выберем точку $y_0 \in e^q$, $y_0 \notin f'(e^p)$, и подвергнем $f'|_{e^p}$ "радиальной гомотопии": если точка $x \in e^p$ не принадлежит $(f')^{-1}(e^q)$, то $f'(x)$ не меняется, а если $f'(x) \in e^q$, то при гомотопии $f'(x)$ движется по образу при характеристическом отображении k прямолинейного отрезка, начинающегося в точке $k^{-1}(y_0)$, проходящего через точку $k^{-1}(f'(x)) \neq k^{-1}(y_0)$ и кончающегося на граничной сфере S^q шара D^q.

Получающееся отображение $f'' : A \cup \operatorname{sk}_{p-1} X \cup e^p$ гомотопно $f|_{A \cup \operatorname{sk}_{p-1} X \cup e^p}$ $\operatorname{rel}(A \cup \operatorname{sk}_{p-1} X)$ и обладает тем свойством, что $f''(e^p)$ задевает q-мерных клеток на одну меньше, чем $f(e^p)$ (и, как и $f(e^p)$, не задевает клеток размерности $> q$). При этом число клеток меньших размерностей, с которыми пересекается образ e^p, может увеличиться. Применив эту процедуру конечное число раз (см. рассуждения в начале доказательства), мы прогомотопируем отображение $f|_{A \cup \operatorname{sk}_{p-1} X \cup e^p}$ к отображению, клеточному на $A \cup \operatorname{sk}_{p-1} X \cup e^p$, причем гомотопия будет неподвижной на $A \cup \operatorname{sk}_{p-1} X$. В силу аксиомы (C) это свойство позволяет нам таким образом исправить отображение сразу для всех p-мерных клеток $X \setminus A$, причем в силу (W) гомотопия действительно будет непрерывной. Теперь воспользуемся теоремой Борсука, чтобы продолжить эту гомотопию ограничения $f|_{A \cup \operatorname{sk}_p X}$ на все X, причем $\operatorname{rel}(A \cup \operatorname{sk}_{p-1} X)$. Неподвижную на A гомотопию f_t, связывающую отображение f с клеточным отображением, мы получим, если проделаем последовательно построенные гомотопии при $p = 0, 1, 2, \dots$, причем p-ю гомотопию мы производим при значении параметра гомотопии $t \in \left[1 - \frac{1}{2^p}, 1 - \frac{1}{2^{p+1}}\right]$. Конечное отображение гомотопии f_1 определяется следующим образом: $f_1|_e = f_{1-2^{-p-1}}|_e$, где $p = \dim e$. Непрерывность всей гомотопии обеспечивается аксиомой (W): для каждой клетки e из X гомотопия будет неподвижной, начиная с некоторого $t_e < 1$. $\square$

Следствие 6.16. *Если X – клеточное пространство с единственной нульмерной клеткой (вершиной), не имеющее других клеток размерности $< q$, то всякое отображение $Y \to X$ клеточного пространства Y размерности $< q$ гомотопно постоянному отображению. При этом можно рассматривать пунктированные пространства и считать вершину отмеченной точкой.*

Следствие 6.17. $\pi_m(S^n) = 0$ *(тривиальная группа) при* $m < n$.

Определение 6.18. Пространство X называется *n-связным*, если при $q \leqslant n$ множество $\pi(S^q, X)$ состоит из одного элемента (т.е. если любые два отображения $S^q \to X$ с $q \leqslant n$ гомотопны).

1-связное пространство называется *односвязным.*

Задача 89. Докажите, что каждое из следующих условий эквивалентно n-связности: (i) $\pi_b(S^q, X)$ состоит из одного элемента при $q \leqslant n$; (ii) любое непрерывное отображение $S^q \to X$ продолжается до непрерывного отображения $D^{q+1} \to X$ при $q \leqslant n$.

Задача 90. Докажите, что 0-связность — это то же самое, что линейная связность.

Теорема 6.19. *Всякое n-связное клеточное пространство гомотопически эквивалентно клеточному пространству с единственной вершиной и без клеток размерностей $1, 2, \dots, n$.*

Доказательство. Выберем в нашем пространстве X вершину e_0 и соединим с ней остальные вершины путями (возможно в силу задачи 90). Используя теорему о клеточной аппроксимации, мы можем добиться того, чтобы эти пути лежали в одномерном остове пространства X. Пусть s_i — путь, соединяющий вершину e_0 с вершиной e_i. Приклеим при каждом i к X двумерный диск по отображению нижней полуокружности в X при помощи пути s_i. Получим новое клеточное пространство $\widehat{X}$, которое будет содержать X и, кроме того, клетки e_i^1 (верхние полуокружности) и e_i^2 (внутренности приклеенных дисков). То, что границы клеток e_i^2 лежат в одномерном остове, вытекает из того, что этим свойством обладают пути s_i. Ясно, что X есть деформационный ретракт $\widehat{X}$: каждый приклеенный диск можно деформировать на нижнюю полуокружность. Обозначим через Y объединение замыканий клеток e_i^1. Очевидно, Y стягиваемо; следовательно, $\widehat{X}/Y \sim \widehat{X} \sim X$, причем у $\widehat{X}/Y$ всего одна вершина. Дальнейшее рассуждение совершенно аналогично. Предположим, что $X \sim X'$, причем X' имеет единственную вершину и не имеет клеток размерностей $1, \dots, k-1$, $k \leqslant n$. В этом случае замыкание каждой k-мерной клетки представляет собой k-мерную сферу. Ввиду n-связности X (и, следовательно, X') включение этой сферы в X' продолжается до непрерывного отображения $(k+1)$-мерного шара, образ которого, ввиду теоремы о клеточной аппроксимации, можно считать лежащим в $\operatorname{sk}_{k+1} X$. По этому отображению (которое мы считаем отображением нижней полусферы $(k+1)$-мерной сферы) мы приклеиваем к X' шар D^{k+2}, и подобным образом мы поступаем для каждой k-мерной клетки пространства X'. Полученное клеточное пространство $\widehat{X}'$ гомотопически эквивалентно X' и содержит стягиваемое подпространство Y — объединение замыканий всех вновь приклеенных $(k+1)$-мерных клеток (верхних полусфер приклеенных шаров), содержащее все k-мерные клетки. Получаем: $\widehat{X}'/Y \sim \widehat{X}' \sim X' \sim X$, причем у $\widehat{X}'/Y$ всего одна вершина и нет клеток размерностей $1, \dots, k$. □

Следствие 6.20. *Если клеточное пространство X n-связно, а клеточное пространство Y n-мерно, то множество $\pi(Y, X)$ состоит из одного элемента. Это же верно для $\pi_b(Y, X)$, если X и Y имеют отмеченные точки, являющиеся вершинами.*

Определение 6.21. Топологическая пара (X, A) называется *n-связной*, если всякое отображение (D^n, S^{n-1}) гомотопно (как отображение пар) отображению, отображающему все D^n в A.

Теорема 6.22. *Всякая n-связная клеточная пара гомотопически эквивалентна клеточной паре (Y, B), у которой $B \supset \operatorname{sk}_n Y$ (т. е. разность $Y \setminus B$ не содержит клеток размерности $< n$).*

Задача 91. Докажите эту теорему.

Задача 92. Придумайте эквивалентные определения n-связной пары в духе упражнения 89 и интерпретации 0-связности и 1-связности пар в духе упражнения 90.

7. Накрытия

Мы предполагаем, что все участвующие пространства являются клеточными.

Определение 7.1. (Линейно связное) пространство T называется *накрывающей* для линейно связного пространства X, если задано такое отображение $p : T \to X$, что у любой точки $x \in X$ имеется окрестность $U \subset X$, для которой $p^{-1}(U)$ гомеоморфно $U \times \Gamma$, где Γ — дискретное множество, причем диаграмма

$$\begin{tikzcd} p^{-1}(U) \arrow[rr, phantom, "\approx"] \arrow[dr, "p"'] & & U \times \Gamma \arrow[dl, "\text{проекция}"] \\ & U & \end{tikzcd}$$

коммутативна. Отображение $p : T \to X$ называется в этой ситуации *накрытием*, а окрестности вида U — *элементарными.*

Пример 7.2. а) $p : \mathbb{R} \to S^1 \subset \mathbb{C}$, $x \mapsto e^{1\pi ix}$.

б) $p : S^1 \to S^1$, $z \mapsto z^k$.

в) $p : S^n \to \mathbb{R}P^n$ — отображает точку сферы в прямую, ее содержащую.

г) Декартов квадрат накрытия является накрытием. Для пункта а) — это $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{T}^2$.

Задача 93. Покажите, что при любом $g \geqslant 2$ сфера с g ручками способна накрывать сферу с 2 ручками.

Задача 94. Покажите, что при любом $n \geqslant 2$ букет n окружностей способен накрывать букет двух окружностей.

Лемма 7.3 (о накрывающем пути)**.** *Для любого пути $s : I \to X$ и любой точки $\widetilde{x} \in T$, такой, что $p(\widetilde{x}) = s(0)$ существует единственный путь $\widetilde{s} : I \to T$, такой, что $\widetilde{s}(0) = \widetilde{x}$ и $p \circ \widetilde{s} = s$.*

Доказательство. Для каждого $t \in I$ найдем элементарную окрестность $U(t) \subset X$ точки $s(t)$. В силу компактности I из этих окрестностей можно выбрать последовательность $U_1, \ldots, U_N$, таким образом, что $U_i \supset s(t_i, t_{i+1})$, где $0 = t_1 < t_2 < \ldots t_{N+1} = 1$. Прообраз $p^{-1}U_1$ окрестности U_1 гомеоморфен дискретному семейству таких же окрестностей. Пусть $\widetilde{U}_1$ — та из них, которая содержит точку x. Возьмем $\widetilde{s} : [0, t_2] \to \widetilde{U}_1$ равным $(p')^{-1} \circ s|_{[0,t_2]}$, где $p' := p|_{\widetilde{U}_1}$ — гомеоморфизм. Заметим, что это поднятие маленького фрагмента пути определено однозначно, так как результирующее отображение $\widetilde{s}$ отрезка $[0, t_2]$ должно быть непрерывно, а отрезок, а значит и его образ, связны, так что $\widetilde{s}[0, t_2]$ должно лежать в одной из окрестностей, накрывающих U_1, именно в той, где находится $\widetilde{x}$. Так как p' — гомеоморфизм, то поднятие однозначно.

Затем проделаем то же самое с окрестностью U_2, точкой $\widetilde{s}(t_2)$ и куском пути и т.д. Так как число окрестностей конечно, то процесс конечен, а так как для каждой окрестности он однозначен, то путь с нужными свойствами существует только один. $\square$

Теорема 7.4 (о накрывающей гомотопии)**.** *Пусть $p : T \to X$ — накрытие, Z - клеточный комплекс, $F : Z \to T$ — непрерывное отображение и $f_t : Z \to X$ — такая гомотопия, что $f_0 = p \circ F$. Тогда существует единственная гомотопия $F_t : Z \to T$, такая, что $F_0 = F$ и $f_t = p \circ F_t$.*

Доказательство. Пусть $z \in Z$ — произвольная точка. Формула $t \mapsto f_t(z)$ определяет путь в X. Этот путь единственным образом можно поднять на T так, чтобы поднятый путь начинался в точке $F(z)$. Заставив z пробегать Z, мы получим отображение $Z \times I \to T$. Это и есть нужная гомотопия. Проверим ее непрерывность и единственность. Единственность сразу следует из единственности накрывающего пути. Непрерывность, по определению клеточного пространства, достаточно проверить на замыканиях клеток, причем можно выбрать более мелкое разбиение на клетки таким образом, что образ замыкания d соответствующей клетки вида $e \times (\alpha, \beta) \subset Z \times I$ при f_t содержится в элементарной окрестности. Тогда $F_t|_d = (p')^{-1} \circ f_t|_d$, поскольку F_t мы определяли через пути, а значит, как в лемме о накрывающем пути. Значит, F_t непрерывно на d и поэтому везде. $\square$

Теорема 7.5. *Пусть $p : T \to X$ — накрытие, $p(\widetilde{x}_0) = x_0$. Тогда $p_* : \pi_1(T, \widetilde{x}_0) \to \pi_1(X, x_0)$ — мономорфизм.*

Доказательство. Нам надо доказать, что если петля $s : I \to T$ с началом $\widetilde{x}_0$ проектируется в петлю $s : I \to X$, гомотопную постоянной петле, то она и сама гомотопна нулю. Фиксируем такую гомотопию $s_t : I \to X$, что $s_0 = s$, $s_t(0) = s_t(0) = x_0$, $s_1(I) = x_0$. По теореме о накрывающей гомотопии существует такая гомотопия $\widetilde{s}_t : I \to T$, $\widetilde{s}_0 = \widetilde{s}$ и $p \circ \widetilde{s}_t = s_t$. Но так как полный прообраз точки x_0 дискретен в T, то $\widetilde{s}_t(0) = \widetilde{s}(0) = \widetilde{x}_0$. $\widetilde{s}_t(1) = \widetilde{s}(1) = \widetilde{x}_0$. $\widetilde{s}_1(I) = \widetilde{x}_0$, что и требовалось. $\square$

Определение 7.6. Подгруппа $p_*(\pi_1(T, \widetilde{x}_0))$ группы $\pi_1(X, x_0)$ называется *группой накрытия.*

Замечание 7.7. Ясно, что если мы изменим точку $\widetilde{x}_0$ на $\widetilde{x}'_0 \in p^{-1}(x_0)$, не меняя точку x_0, то подгруппа заменится сопряженной (сопряженность определяется классом петли в X, получающейся при проектировании пути, соединяющего $\widetilde{x}_0$ и $\widetilde{x}'_0$ в T). При замене же точки x_0 группы накрытия переводятся друг в друга изоморфизмами вида $\alpha_\bullet$ (см. доказательство теоремы 5.3).

Теорема 7.8. *Имеется каноническое взаимно однозначное соответствие между элементами фактормножества $\pi_1(X, x_0)/p_*(\pi_1(T, \widetilde{x}_0))$ и элементами множества $p^{-1}(x_0) \subset T$.*

Доказательство. Рассмотрим петлю с началом x_0 в X. Поднимем ее в T как путь с началом в точке $\widetilde{x}_0$. Поставим в соответствие петле конец этого пути. Получим точку из $p^{-1}(x_0)$. Ясно, что эта точка зависит только от гомотопического класса исходной петли: при гомотопии петли накрывающий путь тоже подвергается гомотопии, но его конец может варьироваться только в пределах дискретного множества и потому не меняется. Ясно, далее, что петли s_1 и s_2 тогда и только тогда определяют одну точку множества $p^{-1}(x_0)$ (конец поднятия), когда петля $s_1 s_2^{-1}$ накрывается в T петлей, т.е. определяет элемент группы $\pi_1(T, \widetilde{x}_0)$. Таким образом, мы определили инъективное отображение $\pi_1(X, x_0)/p_*(\pi_1(T, \widetilde{x}_0)) \to p^{-1}(x_0)$. Его сюръективность следует из связности T: любая точка из $p^{-1}(x_0)$ соединяется с $\widetilde{x}_0$ путем, и проекция этого пути есть петля, поднятие которой есть путь, кончающийся в выбранной точке. $\square$

Определение 7.9. По теореме и замечанию 7.7 мощность множества $p^{-1}(x_0) \subset T$ не зависит от выбора точки. Эта мощность называется *числом листьев* накрытия p.

Следствие 7.10 (из доказательства теоремы 7.5)**.** *Пусть $\widetilde{x} \neq \widetilde{x}' \in T$, $p(\widetilde{x}) = p(\widetilde{x}')$, $\widetilde{s}$ — любой путь, соединяющий их. Тогда петля $p \circ \widetilde{s}$ не гомотопна нулю в X.*

Доказательство. Пусть $p \circ \widetilde{s}$ гомотопна нулю. Тогда поднятие соответствующей гомотопии сдвигает точку $\widetilde{x}$ в $\widetilde{x}'$, причем при этой гомотопии точка все время проектируется в $p(\widetilde{x}) = p(\widetilde{x}')$. Противоречие с дискретностью слоя. $\square$

Теорема 7.11. *Фундаментальная группа $\pi_1(\vee_{\alpha\in A}S^1_\alpha)$ букета окружностей — это свободная группа с системой образующих, соответствующих элементам A.*

Доказательство. Пусть i_α — фиксированное вложение стандартной окружности S^1 в букет X (на α-место), определяющее класс ι_α в фундаментальной группе букета, а также ориентацию S^1_α. Прежде всего мы докажем при помощи кусочно линейной аппроксимации, что любая петля гомотопна конечному произведению элементов вида ι_α и $(\iota_\alpha)^{-1}$.

На каждой из окружностей S^1_α, входящих в букет, отметим два отрезка (замкнутых дуги), I_α, и J_α, не содержащих отмеченной точки и таких, что $J_\alpha \subset \operatorname{Int} I_\alpha$. Возьмем петлю $\varphi : I \to X$ и фиксируем такое n, что если образ некоторого отрезка $J \subset I$ длины $1/n$ пересекается с J_α, то он содержится в I_α. Это возможно в силу равномерной непрерывности. Обозначим через K обьединение отрезков вида $[k/n,(k+1)/n]$, образы которых пересекаются с $\cup_\alpha J_\alpha$, и заменим отображение φ отображением $\varphi' : I \to X$, совпадающим с φ вне K и во всех точках вида k/n и линейным на каждом из отрезков указанного вида (линейное отображение отрезка в окружность это отображение вида $x \mapsto (\cos(\lambda(x)), \sin(\lambda(x)))$, где $\lambda(x)$ — линейная функция). Очевидно, что φ' — петля, гомотопная φ. Выделим теперь в каждом отрезке J_α меньший отрезок K_α, не содержащий ни одной точки вида $\varphi'(k/n)$. Заметим, что прообраз $(\varphi')^{-1}(\cup_\alpha K_\alpha)$ состоит из конечного числа отрезков, каждый из которых отображается на свое K_α линейно. Наконец подвергнем φ' гомотопии

$$I \xrightarrow{\varphi'} X \xrightarrow{h_t} X,$$

где h_t — гомотопия, растягивающая каждый из отрезков K_α равномерно на свою окружность S^1_α и сжимающая дополнение $S^1_\alpha \setminus K_\alpha$ в отмеченную точку. Мы приходим к петле $\psi : I \to X$, устроенной так: на отрезке I расположено некоторое конечное количество маленьких отрезков, каждый из которых отображением ψ линейно наматывается на свою окружность S^1_α (в том или в другом направлении); промежутки между этими отрезками отображаются в отмеченную точку. Ясно, что эта петля принадлежит классу требуемого вида

$$\iota^{\pm 1}_{\alpha_1} \dots \iota^{\pm 1}_{\alpha_s}. \tag{5}$$

Для завершения доказательства остается показать, что петля вида (5) не гомотопна нулю, если среди сомножителей не встречаются идущие подряд элементы ι_α и ι_α^{-1}. Рассмотрим $s+1$ экземпляров нашего букета окружностей и расположим их один над другим. Под этими $s+1$ экземплярами расположим еще один экземпляр и будем считать, что верхние экземпляры вертикально проектируются на нижний экземпляр. Возьмем теперь первую букву слова (5). В первом и втором экземплярах нашего букета (снизу) в окружности, соответствующей этой первой букве, вырежем один над другим по маленькому отрезку и концы образовавшихся дырок соединим крест-накрест, соответствующим очевидным образом изменив отображение проекции. Затем аналогичным образом соединяем второй экземпляр с третьим, используя вторую букву, потом — третий с четвертым и т.д. Если в нашем слове идут подряд две одинаковые буквы, то нам придется выкидывать два отрезка из одной и той же окружности. Мы сделаем это так, чтобы вторая дырка предшествовала первой, если соответствующие буквы стоят в степени $+1$, и следовала за ней, если буквы стоят в степени -1. Очевидно, что мы построили $(s+1)$-листное накрытие над нашим букетом окружностей и что петля (5) накрывается в нем путем, который начинается в самой нижней точке, проектирующейся в отмеченную, а кончается в самой верхней. Следовательно, наша петля не гомотопна нулю по следствию 7.10. □

Определение 7.12. Накрытие $p : T \to X$ называется *регулярным,* если группа накрытия $p_*(\pi_1(T, \widetilde{x}_0))$ является нормальной подгруппой в $\pi_1(X, x_0)$.

Задача 95. Докажите, что накрытие $p : T \to X$ регулярно тогда и тольео тогда, когда никакая петля в X не служит образом одновременно образом замкнутого пути и образом незамкнутого пути в T.

Задача 96. Докажите, что если $p : T \to X$ — регулярное накрытие, то существует такое свободное действие группы $G = \pi_1(X, x_0)/\pi_1(T, \widetilde{x}_0)$ в T, что $X = T/G$, точнее, что орбиты этого действия совпадают с множествами $p^{-1}(x)$.

Задача 97. Верно и обратное: если группа G действует в пространстве T свободно и дискретно (т. е. каждая точка $\widetilde{x} \in T$ обладает такой окрестностью U, что $gU \cap g'U = \emptyset$ для любых различных $g, g' \in G$), то проекция $p : T \to T/G =: X$ является регулярным накрытием, причем $\pi_1(X)/\pi_1(T) = G$.

Задача 98. Докажите, что двулистные накрытия всегда регулярны. Постройте пример трехлистного нерегулярного накрытия над восьмеркой.

Определение 7.13. Накрытие $p : T \to X$ называется *универсальным,* если T односвязно. Очевидно, что универсальное накрытие регулярно.

Замечание 7.14. Прообраз произвольной точки пространства X в его универсальной накрывающей находится во взаимно однозначном соответствии с группой $\pi_1(X)$.

Теорема 7.15. *Фундаментальная группа пространства $\mathbb{R}P^n$, $n \geqslant 2$, изоморфна $\mathbb{Z}_2$.*

Доказательство. Естественная проекция $S^n \to \mathbb{R}P^n$, является универсальным двулистным накрытием. □

Теорема 7.16 (теорема о поднятии отображения)**.** *Пусть $p : T \to X$ — накрытие, Z — линейно связное клеточное пространство, причем $\widetilde{x}_0 \in T$, $x_0 = p(\widetilde{x}_0) \in X$ и $z_0 \in Z$ — отмеченные точки. а $f : Z \to X$ — непрерывное отображение, переводящее z_0 в x_0. Тогда для существования такого непрерывного отображения $F : Z \to T$, что $F(z_0) = \widetilde{x}_0$ и $p \circ F = f$ необходимо и достаточно, чтобы $f_*(\pi_1(Z, z_0)) \subset p_*(\pi_1(T, \widetilde{x}_0))$.*

Доказательство. Пусть F' и F'' — два таких отображения. Если $z \in Z$ — произвольная точка и $s : I \to Z$ — путь, соединяющий z_0 с z, то пути $F' \circ s$ и $F'' \circ s$ накрывают путь $f \circ s$ и имеют общее начало, поэтому совпадают; следовательно, $F''(z) = F'' \circ s(1) = F' \circ s(1) = F'(z)$.

Для построения F берем для точки $z \in Z$ путь $s : I \to Z$, соединяющий z_0 и z, строим поднятие $\widetilde{s}$ с началом в точке $\widetilde{x}_0$ пути $f \circ s : I \to X$ и полагаем $F(z) = \widetilde{s}(1)$. Для того чтобы эта конструкция была корректной, необходимо и достаточно, чтобы для любого другого пути $s' : I \to Z$, соединяющего z_0 с z, соответствующий путь $\widetilde{s}'$ кончался в той же точке, что и $\widetilde{s}$, т. е. чтобы петля $f \circ (s(s')^{-1})$ накрывалась в T петлей. Это, очевидно, равносильно включению из формулировки. □

Следствие 7.17. *Пусть Z — односвязный клеточный комплекс, а $p : T \to X$ — накрытие. Тогда $p_* : C_b(Z, T) \to C_b(Z, X)$ — гомеоморфизм, а $p_* : \pi_b(Z, T) \to \pi_b(Z, X)$ — биекция.*

8. Клеточные пространства и фундаментальная группа

Как уже указывалось, отображение окружности, не обязательно переводящее отмеченную точку в отмеченную, определяет элемент фундаментальной группы с точностью до сопряженности. Пусть X — клеточное пространство с единственной вершиной e^0, одномерными клетками e_i^1, $i \in I$, и двумерными клетками e_j^2, $j \in J$. Характеристические отображения $f_j : D^2 \to X$ определяют отображения $g_j : S^1 \to X$ ("приклеивающие отображения), которые, в силу сказанного, определяют некоторые элементы $\beta_j \in \pi_1(\operatorname{sk}_1 X)$ с точностью до сопряженности. При этом $\operatorname{sk}_1 X$ — букет окружностей $\overline{e}_i^1$, и по теореме 7.11 $\pi_1(\operatorname{sk}_1 X, e^0)$ — свободная группа с соответствующими образующими.

Теорема 8.1. *Группа $\pi_1(X, e^0)$ есть группа с системой образующих e_i^1, $i \in I$, и с системой определяющих соотношений β_j, $j \in J$.*

Доказательство. По теореме о клеточной аппроксимации, отображение

$$i_* : \pi_1(\operatorname{sk}_1 X, e^0) \to \pi_1(X, e^0),$$

индуцируемое включением $i : \operatorname{sk}_1 X \to X$, является эпиморфизмом.

Покажем, что $\beta_j \in \operatorname{Ker} i_*$ для любого $j \in J$. Действительно, отображение $g_j : S^1 \to \operatorname{sk}_1 X$ продолжается до отображения $f_j : D^2 \to X$ и потому определяет тривиальный элемент в группе $\pi_1(X, g_j(y_0))$; но этот элемент соответствует элементу β_j при некотором изоморфизме $\pi_1(X, g_j(y_0)) \cong \pi_1(X, e^0)$ вида $\alpha_\bullet$. По теореме о клеточной аппроксимации он поднимается до изоморфизма соответствующих групп $\operatorname{sk}_1 X$ (можно считать α лежащим в $\operatorname{sk}_1 X$). Но $\alpha_\bullet$ переводит ядро в себя.

Обратно, покажем, что нормальная подгруппа $\operatorname{Ker} i_*$ содержится в нормальной подгруппе группы $\pi_1(\operatorname{sk}_1 X, e^0)$, порожденной β_j, $j \in J$. Будем считать, что клетки e_j^2 отождествлены с копиями открытого диска $\operatorname{Int} D^2$ посредством характеристических отображений; таким образом, мы получаем возможность говорить о концентрических дисках, прямолинейных отрезках и т.п. в клетках e_j^2. Построим в каждой клетке e_j^2 концентрические диски d_{1j}, d_{2j}, d_{3j}, d_{4j}, радиусов $1/5$, $2/5$, $3/5$, $4/5$. Пусть $\gamma \in \operatorname{Ker} i_*$, а $\varphi : S^1 \to \operatorname{sk}_1 X$ — его представитель. В силу выбора γ отображение φ продолжается до непрерывного отображения $\Phi : D^2 \to X$, причем теорема о клеточной аппроксимации позволяет считать, что $\Phi(D^2) \subset \operatorname{sk}_2 X$. Триангулируем D^2 настолько мелко, что если Δ — симплекс триангуляции и $\Phi(\Delta)$ при некотором j пересекается с d_{4j}, то $\Phi(\Delta) \subset e_j^2$ и $\operatorname{diam} \Phi(\Delta) < 1/5$. Пусть K — обьединение тех симплексов этой триангуляции, образы которых при Φ пересекаются с $\cup_j d_{4j}$. Рассмотрим отображение $\Phi' : K \to \operatorname{sk}_2 X$, совпадающее с Φ на вершинах триангуляции и линейное на каждом симплексе. Отображения $\Phi|_K$ и Φ' соединяются прямолинейной (в клетках e_j^2) гомотопией $\Phi_t : K \to \operatorname{sk}_2 X$, $\Phi_0 = \Phi|_k$, $\Phi_1 = \Phi'$. Определим отображение $\Phi'' : D^2 \to X$ формулой

$$\Phi''(u) = \begin{cases} \Phi(u), & \text{если } \Phi(u) \notin \cup_j d_{3j} \\ \Phi'(u), & \text{если } \Phi(u) \in \cup_j d_{2j} \\ \Phi_{3-5\rho(u)}(u), & \text{если } \Phi(u) \in \cup_j (d_{3j} \setminus d_{2j)} \end{cases}$$

где $\rho(u)$ — расстояние от $\Phi(u)$ до центра $e_j^2 \ni \Phi(u)$. Отображение Φ'' является кусочно линейным на прообразе объединения $\cup_j d_{1j}$. Зафиксируем в каждом d_{1j} маленький диск δ_j, не пересекающийся с Φ''-образами никаких вершин и ребер триангуляции K. Тогда Φ''-прообраз каждого из дисков δ_j будет состоять из конечного числа овальных областей (кусков плоскости, ограниченных эллипсами), каждая из которых линейно отображается посредством Φ'' на δ_j. Наконец, рассмотрим отображение $\omega : \mathrm{sk}_2 X \to \mathrm{sk}_2 X$, тождественное на $\mathrm{sk}_1 X$, линейно растягивающее каждый диск δ_j на свою клетку e_j^2 и сминающее $e_j^2 \setminus \delta_j$ на границу клетки e_j^2. Отображение $\Psi : D^2 \to X$, $\Psi(u) := \omega(\Phi''(u))$, продолжает, как и Φ, отображение $\varphi : S^1 \to \mathrm{sk}_1 X$, отображает в $\mathrm{sk}_1 X$ дополнение к конечному набору $E_1, \dots, E_N$ неперекрывающихся овальных областей и отображает каждую из этих овальных областей линейно на одну из двумерных клеток. Соединим точку $y_0 \in S^1 \subset D^2$ несамопересекающимися и попарно непересекающимися путями $s_1, \dots, s_N$ с какими-нибудь точками $y_1, \dots, y_N$ границ областей $E_1, \dots, E_N$ и обозначим через $\sigma_1, \dots, \sigma_N$ петли с началами $y_1, \dots, y_N$ обходящие эти границы против часовой стрелки; при этом можно считать, что пути $\sigma_1, \dots, \sigma_N$ занумерованы в порядке их выхода, против часовой стрелки, из точки y_0. Очевидно, петля σ, обходящая границу S^1 диска D^2 против часовой стрелки из точки y_0, гомотопна в $D^2 \setminus \cup_i \operatorname{Int} E_i$ петле

$$(s_1\sigma_1 s_1^{-1})(s_2\sigma_2 s_2^{-1}) \dots (s_N\sigma_N s_N^{-1}).$$

Следовательно, петля φ гомотопна (в $\mathrm{sk}_1 X$) петле

$$[\Psi \circ (s_1\sigma_1 s_1^{-1})]\,[\Psi \circ (s_2\sigma_2 s_2^{-1})] \dots [\Psi \circ (s_N\sigma_N s_N^{-1})].$$

Но петля $[\Psi \circ (s_i\sigma_i s_i^{-1})]$ определяет в $\pi_1(\mathrm{sk}_1 X, e^0)$ элемент, сопряженный с $\beta_j^{\pm 1}$, где j — номер клетки $\Psi(E_i)$, а знак в показателе зависит от того, в какую сторону петля $\Psi \circ \sigma_i$ обходит $\dot{e}_j^2$. Мы видим, что класс γ петли φ действительно принадлежит нормальной подгруппе группы $\pi_1(\mathrm{sk}_1 X, e^0)$, порожденной β_j, $j \in J$. $\square$

Следствие 8.2. $\pi_1(X) = \pi_1(\mathrm{sk}_2 X)$ *для любого клеточного пространства* X.

Напомним, что сфера с g ручками получается как клеточное пространство с одной 2-клеткой, представляемой как многоугольник с $4g$ сторонами, разбитыми на подряд идущие четверки вида $a_i b_i a_i^{-1} b_i^{-1}$, т. е. первая сторона склеивается с третьей, но с противоположным направлением, а вторая — с четвертой с противоположным направлением. Таким образом, одномерных клеток у этого разбиения имеется $2g$ штук: a_i, b_i, $i = 1, \dots, g$, а нульмерная — одна. Непосредственно из описания этой клеточной структуры и из теоремы 8.1 получаем следующее утверждение.

Теорема 8.3. *Фундаментальная группа сферы с g ручками порождена $2g$ образующими a_i, b_i, $i = 1, \dots, g$, связанными одним соотношением*

$$a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \dots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1} = e.$$

В частности, для тора $\pi_1(\mathbb{T}^2) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$. Это же можно получить из следующей задачи:

Задача 99. $\pi_1(X \times Y) = \pi_1(X) \times \pi_1(Y)$.

Для неориентируемых поверхностей (см. [1, §5 гл. 4]), используя аналогичное представление, получаем следующее.

Теорема 8.4. *Фундаментальная группа проективной плоскости с g ручками или бутылки Клейна с g ручками порождена образующими $c_1, \dots, c_h$, где в случае проективной плоскости $h = 2g + 1$ и в случае бутылки Клейна $h = 2g + 2$,связанными одним соотношением $(c_1)^2 \dots (c_h)^2 = e$.*

9. Гомотопические группы

В соответствии с общим определением, гомотопические группы $\pi_1(X, x_0)$ топологического пространства X с отмеченной точкой x_0 — множество гомотопических классов отображений $S^n \to X$, переводящих отмеченную точку сферы S^n в точку x_0. Сами эти отображения называются *сфероидами.* Это то же самое, что отображение n-мерного куба I^n в X, переводящее границу куба ∂I^n в точку x_0. *Сумма* двух сфероидов $f, g : S^n \to X$ определяется как сфероид построенный следующим образом. Сначала экватор сферы S^n (содержащий отмеченную точку) сжимается в точку, в результате чего сфера превращается в букет двух сфер, затем сферы, составляющие этот букет, отображаются в X с помощью отображений f и g. На языке кубов: если заданы сфероиды $f, g : I^n \to X$ то сумма $f + g$ определяется как отображение $I^n \to X$, совпадающее на левой половине куба с композицией f и сжатия куба вдвое, на правой половине — с композицией g и сжатия. Сложение сфероидов не является групповой операцией. Однако оно гомотопически инвариантно и индуцирует групповую операцию $\pi_1(X, x_0)$. При $n \geqslant 2$ эта операция коммутативна. Действительно, пусть f' и g' — указанные выше сжатия, так что

$$(f+g)(t_1,\dots,t_n) = \begin{cases} f'(t_1,\dots,t_n), & \text{если } t_1 \leqslant 1/2,\\ g'(t_1,\dots,t_n), & \text{если } t_1 \geqslant 1/2, \end{cases}$$

причем любые точки, у которых хотя бы одна координата равна 0 или 1, а также у которых $t_1 = 1/2$, отображаются в x_0. Определим гомотопию при $t \in [0, 1/2]$ как

$$h_t(t_1,\dots,t_n) = \begin{cases} f'(t_1, \frac{t_2}{1-t},\dots,t_n), & \text{если } t_1 \leqslant 1/2,\ t_2 \leqslant 1-t,\\ x_0, & \text{если } t_1 \leqslant 1/2,\ t_2 \geqslant 1-t,\\ x_0, & \text{если } t_1 \geqslant 1/2,\ t_2 \leqslant t,\\ g'(t_1, \frac{t_2-t}{1-t},\dots,t_n), & \text{если } t_1 \geqslant 1/2,\ t_2 \geqslant t. \end{cases}$$

Вспоминая, какие точки отображаются в x_0, видим, что гомотопия непрерывна. При $t \in [1/2, 1]$ определим гомотопию по формулам:

$$h_t(\mathbf{t}) = \begin{cases} f'(t_1 - t + \frac12, 2\cdot t_2,\dots,t_n), & \text{если } t_1 \in [t-\frac12, t],\ t_2 \leqslant \frac12,\\ x_0, & \text{если } t_1 \in [0, t-\frac12] \cup [t, 1],\ t_2 \leqslant \frac12,\\ x_0, & \text{если } t_1 \in [0, 1-t] \cup [\frac32 - t, 1],\ t_2 \geqslant \frac12,\\ g'(t_1 + t - \frac12, 2\cdot(t_2 - \frac12),\dots,t_n), & \text{если } t_1 \in [1-t, \frac32 - t],\ t_2 \geqslant \frac12, \end{cases}$$

где $\mathbf{t} = (t_1,\dots,t_n)$. Наконец, на третьем этапе применяем гомотопию “по t_2”, обратную к первой гомотопии, но с f' в области $t_1 \geqslant 1/2$ и g' — в области $t_1 \leqslant 1/2$ (т. е. наоборот по отношению к перовой гомотопии).

Задача 100. Выписать явные формулы для последней гомотопии.

Заметим, что построить указанную гомотопию можно было только имея два параметра — например, t_1 и t_2. Т. о. метод не работает для π_1. Более того, как показывает теорема 8.1, π_1 может быть некоммутативной (например, букет двух окружностей).

Путь $\alpha : I \to X$, соединяющий точки $x_0, x_1 \in X$, индуцирует изоморфизм $\alpha_\bullet$: $\pi_n(X, x_0) \to \pi_n(X, x_1)$, определенный следующим образом. Пусть $f : S^n \to X$, $f(*) = x_0$. Тогда $\alpha_\bullet f$ отображает экваториальную сферу S^{n-1} в точку x_0, верхнюю полусферу — при помощи отображения f, а нижнюю — на путь α (каждая нижняя половинка меридиана отображается на α). Точнее, если $\omega : S^n \to S^n \vee I$ отображает верхнюю полусферу на сферу, а нижнюю — на отрезок, то

$$\alpha_\bullet f : S^n \xrightarrow{\omega} S^n \vee I \xrightarrow{f \vee \alpha} X.$$

Легко проверить, что $\alpha_\bullet$ — изоморфизм групп (обратный — $(\alpha^{-1})_\bullet$), а при $n = 1$ он совпадает с изоморфизмом построенным ранее.

Если при данном n изоморфизм $\alpha_\bullet$ от α не зависит, то пространство X называется *n-простым.* Пространства, n-простые при всех n, называются *простыми.*

Задача 101. Докажите, что любое H-пространство просто, в частности, фундаментальная группа любого H-пространства коммутативна.

Задача 102. $\pi_n(X \times Y, (x_0, y_0)) = \pi_n(X, x_0) \times \pi_n(Y, y_0)$.

Теорема 9.1. *Если $p : T \to X$ — накрытие и $n \geqslant 2$, то $p_* : \pi_n(T, \widetilde{x}_0) \to \pi_n(X, p(\widetilde{x}_0))$ — изоморфизм.*

Доказательство. Это следует из следствия 7.17, поскольку $\pi_1(S^n) = 0$, при $n \geqslant 2$. □

Теорема 9.2.

$$\pi_n(S^1) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \textit{при } n = 1, \\ 0 & \textit{при } n \geqslant 2. \end{cases}$$

Доказательство. Первое доказано в теореме 5.5. В силу существования накрытия $\mathbb{R} \to S^1$, по предыдущей теореме $\pi_n(S^1) \cong \pi_n(\mathbb{R}) = 0$, поскольку $\mathbb{R}$ стягиваемо. □

Задача 103. а) Докажите, что гомотопические группы π_n, $n \geqslant 2$, букета окружностей тривиальны.

б) Используя а), докажите, что двумерная компактная поверхность с краем обладает тем же свойством.

в) Используя неуниверсальное накрытие докажите то же самое для поверхности без края.

Определение 9.3. Пусть (X, A) — пара с отмеченной точкой $x_0 \in A$ и $n \geqslant 2$. *Относительная гомотопическая группа* $\pi_n(X, A; x_0)$ определяется как множество гомотопических классов n-мерных *относительных сфероидов*, которые, в свою очередь, определяются с помощью шаров или кубов. Шаровой относительный сфероид — это отображение $D^n \to X$, переводящее $S^{n-1} \subset D^n$ в A и переводящее отмеченную точку $y_0 \in A \subset X$ в x_0. Кубический относительный сфероид — это отображение $I^n \to X$, переводящее в A границу ∂I^n и переводящее в x_0 часть $\partial I^n \setminus I^{n-1}$ этой границы. Относительные сфероиды называются *гомотопными*, если они гомотопны в классе относительных сфероидов. Сумма $f + g$ (кубических) относительных сфероидов (так же как и абсолютных) определяется формулой

$$(f+g)(t_1, t_2, \ldots, t_n) = \begin{cases} f(2t_1, t_2, \ldots, t_n), & \text{если } t_1 \leqslant 1/2, \\ g(2t_1 - 1, t_2, \ldots, t_n), & \text{если } t_1 \geqslant 1/2. \end{cases}$$

Задача 104. Проверьте для $\pi_n(X, A; x_0)$ выполнение групповых аксиом; нулем служит класс любого относительного сфероида $f : I^n \to X$,для которого $f(I^n) \subset A$.

Задача 105. Покажите, что при $n \geqslant 3$ группа $\pi_n(X, A; x_0)$ коммутативна.

Если (X,A), (Y,B) — пары с отмеченными точками $x_0\in A$, $y_0\in B$, то непрерывное отображение $f:X\to Y$ такое, что $f(A)\subset B$ и $f(x_0)=y_0$ (пишут $f:(X,A;x_0)\to(Y,B,y_0)$) индуцирует гомоморфизмы $f_*:\pi_n(X,A;x_0)\to\pi_n(Y,B,y_0)$. Гомотопные отображения индуцируют одинаковые гомоморфизмы, в частности, у гомотопически эквивалентных пар гомотопические группы одинаковы.

Зависимость групп $\pi_n(X,A;x_0)$ от отмеченной точки аналогична зависимости от отмеченной точки абсолютных гомотопических групп: путь $\alpha:I\to A$, соединяющий $x_0\in A$ с $x_1\in A$, индуцирует изоморфизм $\alpha_\bullet:\pi_n(X,A;x_0)\cong\pi_n(X,A;x_1)$.

В множествах $\pi_0(X,x_0)$ и $\pi_1(X,A;x_0)$ отсутствует естественная групповая структура, хотя имеется выделенный элемент — “единица” — класс постоянного сфероида $S^0\to x_0$ или $D^1\to x_0$.

Определение 9.4. Под точностью для отображений множеств с выделенным элементом. подразумевается, что образ предыдущего отображения совпадает с прообразом выделенного элемента.

Теорема 9.5 (точная гомотопическая последовательность пары)**.** *Последовательность*

$$\ldots\xrightarrow{\partial}\pi_n(A,x_0)\xrightarrow{i_*}\pi_n(X,x_0)\xrightarrow{j_*}\pi_n(X,A;x_0)\xrightarrow{\partial}\pi_{n-1}(A,x_0)\xrightarrow{i_*}\ldots$$
$$\ldots\xrightarrow{j_*}\pi_1(X,A;x_0)\xrightarrow{\partial}\pi_0(A,x_0)\xrightarrow{i_*}\pi_0(X,x_0)$$

в которой

(1) *гомоморфизм i_* индуцирован вложением пар $i:(A,x_0)\hookrightarrow(X,x_0)$;*
(2) *гомоморфизм j_* индуцирован тождественным отображением $j:X\to X$, рассматриваемым как отображение пар $j:(X,x_0)\to(X,A)$;*
(3) *гомоморфизм ∂ отображает класс относительного сфероида*

$$f:(I^n,\partial I^n,\partial I^n\setminus I^{n-1})\to(X,A,x_0)$$

в класс абсолютного сфероида $f|_{I^{n-1}}:(I^{n-1},\partial I^{n-1})\to(A,x_0)$, или, по-другому, класс относительного сфероида $f:(D^n,S^{n-1},y_0)\to(X,A,x_0)$ в класс абсолютного сфероида $f|_{S^{n-1}}:(S^{n-1},y_0)\to(A,x_0)$;

является точной.

Доказательство. $\boxed{\operatorname{Ker}j_*\supset\operatorname{Im}i_*}$ Для любого сфероида $f:I^n\to A$ сфероид $i\circ f:I^n\to X$ определяет нулевой элемент группы $\pi_n(X,A;x_0)$, поскольку его образ содержится в A.

$\boxed{\operatorname{Ker}j_*\subset\operatorname{Im}i_*}$ Пусть $f:I^n\to X$ — сфероид пространства X, представляющий элемент из $\operatorname{Ker}j_*$, а $F:I^n\times I\to X$ — гомотопия, соединяющая f с постоянным отображением в классе относительных сфероидов пары (X,A); очевидно, F является отображением куба I^{n+1} в X, совпадающее на грани $x_{n+1}=0$ с f, отображающее грань $x_n=0$ в A и отображающее оставшуюся часть границы ∂I^{n+1} в x_0. Пусть $I^n_t\subset I^{n+1}$ — сечение куба I^{n+1} плоскостью $tx_n+(1-t)x_{n+1}=0$. Тогда $I^n_t\approx I^n$ и $F|_{I^n_t}:I^n_t=I^n\to X$ — гомотопия, связывающая (в классе абсолютных сфероидов пространства X) сфероид f со сфероидом, образ которого содержится в A.

$\boxed{\operatorname{Ker}\partial\supset\operatorname{Im}j_*}$ Действительно, если $f:I^n\to X$ — абсолютный сфероид, то $f|_{I^{n-1}}$ — постоянное отображение.

$\boxed{\operatorname{Ker}\partial \subset \operatorname{Im} j_*}$ Пусть $f : I^n \to X$ — относительный сфероид, а $g_t : I^{n-1} \to A$ — гомотопия, связывающая абсолютный сфероид $f|_{I^{n-1}}$ пространства A с постоянным сфероидом. Рассмотрим гомотопию $f_t : \partial I^n \to X$, совпадающую с g_t на I^{n-1} и переводящую $\partial I^n \setminus I^{n-1}$ в x_0. Распространим ее (пользуясь теоремой Борсука) до гомотопии $h_t : I^n \to X$ сфероида f. Очевидно, h_t — гомотопия, соединяющая f в классе относительных сфероидов с постоянным сфероидом.

$\boxed{\operatorname{Ker} i_* \supset \operatorname{Im}\partial}$ Если абсолютный сфероид $f : I^{n-1} \to A$ является сужением относительного сфероида $g : I^n \to X$, то $g_t = g|_{I^{n-1}\times t} \approx I^{n-1} \to X$ — гомотопия, связывающая в X сфероид f с постоянным сфероидом.

$\boxed{\operatorname{Ker} i_* \subset \operatorname{Im}\partial}$ Если $g_t : I^{n-1} \to X$ — гомотопия, связывающая в X сфероид $f = g_0 : I^{n-1} \to A$ с постоянным сфероидом, то $g : I^n \to X$, $g(x_1, \dots, x_n) := g_{x_n}(x_1, \dots, x_{n-1})$ — относительный сфероид пары (X, A), сужение которого на A равно f. □

Следствие 9.6.
- *Если A стягиваемо, то $j_* : \pi_n(X) \cong \pi_n(X, A)$ при $n \geqslant 1$;*
- *если X стягиваемо, то $\partial : \pi_n(X, A) \cong \pi_{n-1}(A)$ при $n \geqslant 1$;*
- *если A есть деформационный ретракт X, то $\pi_n(X, A) = 0$ при $n \geqslant 1$;*

Задача 106. (1) Если A — ретракт X, то при всех n

$$\begin{array}{ll} i_* : \pi_n(A) \to \pi_n(X) & \text{— мономорфизм,} \\ j_* : \pi_n(X) \to \pi_n(X, A) & \text{— эпиморфизм,} \\ \partial : \pi_n(X, A) \to \pi_{n-1}(A) & \text{— нулевой гомоморфизм} \end{array}$$

и $\pi_n(X) = \pi_n(X, A) \oplus \pi_n(A)$.

(2) Если A стягиваемо по X в точку, то

$$\begin{array}{ll} j_* : \pi_n(X) \to \pi_n(X, A) & \text{— мономорфизм,} \\ \partial : \pi_n(X, A) \to \pi_{n-1}(A) & \text{— эпиморфизм,} \\ i_* : \pi_n(A) \to \pi_n(X) & \text{— нулевой гомоморфизм} \end{array}$$

и $\pi_n(X, A) = \pi_n(X) \oplus \pi_{n-1}(A)$.

(3) Если существует гомотопия $f_t : X \to X$, $f_0 = \mathrm{Id}$, $f_1(X) \subset A$, то

$$\begin{array}{ll} \partial : \pi_n(X, A) \to \pi_{n-1}(A) & \text{— мономорфизм,} \\ i_* : \pi_n(A) \to \pi_n(X) & \text{— эпиморфизм,} \\ j_* : \pi_n(X) \to \pi_n(X, A) & \text{— нулевой гомоморфизм} \end{array}$$

и $\pi_n(A) = \pi_n(X) \oplus \pi_{n+1}(X, A)$.

Из теоремы и леммы 1.29 о пяти гомоморфизмах получаем следующее

Следствие 9.7. *Пусть (X, A) и (Y, B) — топологические пары с отмеченными точками $x_0 \in A$ и $y_0 \in B$, а $f : X \to Y$ — такое непрерывное отображение, что $f(A) \subset B$ и $f(x_0) = y_0$. Тогда любые два из следующих трех утверждений влекут за собой третье:*

(1) *$f_* : \pi_n(X, x_0) \to \pi_n(Y, y_0)$ — изоморфизм при всех n;*
(2) *$(f|_A)_* : \pi_n(A, x_0) \to \pi_n(B, y_0)$ — изоморфизм при всех n;*
(3) *$f_* : \pi_n(X, A, x_0) \to \pi_n(Y, B, y_0)$ — изоморфизм при всех n.*

10. Расслоения

Определение 10.1. *(Локально тривиальным) расслоением* называется четверка (E, B, F, p), где E, B и F — пространства, а $p : E \to B$ — такое отображение, что любая точка $x \in B$ обладает такой окрестностью $U \subset B$, что имеется гомеоморфизм $\varphi : p^{-1}(U) \approx U \times F$, замыкающий коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
p^{-1}(U) \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "p"'] & & U \times F \arrow[dl, "\text{проекция}"] \\
& B. &
\end{tikzcd}$$

При этом p называется *проекцией*, E — *тотальным пространством*, B — *базой* и F — *слоем* расслоения, $p^{-1}(x) \approx F$ — *слоем над точкой* x. Расслоение $p : E \to B$ называется *тривиальным*, если имеется коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[rr, "\cong"] \arrow[dr, "p"'] & & B \times F \arrow[dl, "\text{проекция}"] \\
& B. &
\end{tikzcd}$$

Два расслоения (E, B, F, p) и (E', B, F', p') называются *эквивалентными*, если существует гомеоморфизм $f : E \to E'$ и коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[rr, "\approx", "f"'] \arrow[dr, "p"'] & & E' \arrow[dl, "p'"] \\
& B. &
\end{tikzcd}$$

При этом, конечно, $F = F'$.

Примерами расслоений являются накрытия (расслоения с дискретным слоем), лента Мебиуса с проекцией на серединную окружность (нетривиальное расслоение).

Задача 107. Докажите, что отображение

$$p : E = S^3 \to B = S^2 = \mathbb{C}P^1,\ S^3 = \{(z_1, z_2) | z_1\overline{z}_1 + z_2\overline{z}_2 = 1\} \subset \mathbb{C}^2,\ p(z_1, z_2) = (z_1 : z_2)$$

является локально тривиальным нетривиальным расслоением (*расслоение Хопфа*). Рассмотрите естественное обобщение $(S^{2n+1}, \mathbb{C}P^n, S^1, p)$. Убедитесь, что эти расслоения являются частными случаями следующих более общих.

Пусть G — группа Ли, H — ее компактная подгруппа, $p : G \to G/H$ — естественная проекция. Тогда $(G, G/H, H, p)$ — расслоение.

Пусть компактная группа Ли G свободно гладко действует на многообразии X, $p : X \to X/G$ — естественная проекция. Тогда $(X, X/G, G, p)$ — расслоение.

Определение 10.2. Пусть $\xi = (E, B, F, p)$ — расслоение, $B' \subset B$, и $E' = p^{-1}(B')$. Локально-тривиальное расслоение $\xi|_{B'} := (E', B', F, p')$, где $p' = p|_{E'}$, называется *сужением* ξ *на* B'.

Определение 10.3. Пусть $\xi = (E, B, F, p)$ — расслоение, а $f : B' \to B$ — непрерывное отображение. Обозначим через E' подмножество таких точек (e, b') произведения $E \times B'$, что $p(e) = f(b')$. Пусть $p' : E' \to B'$, $p(e, b') = b'$. Говорят, что локально тривиальное расслоение $f^*\xi = (E', B', F, p')$ *индуцировано расслоением* ξ *при помощи* f, или что оно является *обратным образом расслоения* ξ *при* f.

Задача 108. Если для локально тривиальных расслоений $\xi' = (E', B', F, p')$ и $\xi = (E, B, F, p)$ существует непрерывное отображение $E' \to E$, гомеоморфно отображающее слой над точкой $b' \in B$ в слой над точкой $f(b')$, то ξ' эквивалентно $f^*\xi$.

Теорема 10.4 (Фельдбау). *Всякое локально тривиальное расслоение над q-мерным кубом I^q тривиально.*

Доказательство. В силу локальной тривиальности существует такое (достаточно мелкое) разбиение куба на маленькие (одинаковые) кубы, что над каждым из них расслоение тривиально. Тогда для доказательства теоремы достаточно уметь доказывать следующий факт: если некоторый куб (параллелепипед) разбит на два параллелепипеда и над каждым из них расслоение тривиально, то и над всем кубом оно тоже тривиально. Будем считать, что это — исходный куб I^q и разбит он на

$$I_1^q = \{(x_1, \ldots, x_q) \in I^q \mid x_q \leqslant 1/2\}, \qquad I_2^q = \{(x_1, \ldots, x_q) \in I^q \mid x_q \geqslant 1/2\}.$$

Пусть $p_1 : E_1 \to I_1^q$, $p_2 : E_2 \to I_2^q$ — сужения; можно считать, что $E_1 = I_1^q \times F$, $E_2 = I_2^q \times F$. Точка из E_1 имеет координаты (x, y), $x \in I_1^q$, $y \in F$. Аналогично, точка из E_2 имеет координаты $[x, y]$. Если $x \in I_{12}^{q-1} := I_1^q \cap I_2^q$, то точка (x, y) имеет также координаты $[x, y']$. Таким образом, для каждого $x \in I_{12}^{q-1}$ определено отображение $f_x : F \to F$, $f_x(y) = y'$. Определим проекцию $\pi : I_2^q \to I_{12}^{q-1}$ формулой $\pi(x_1, \ldots, x_q) = (x_1, \ldots, x_{q-1}, 1/2)$ и положим $\varphi[x, y] = (x, f_{\pi(x)}(y))$. Получается гомеоморфизм $\varphi : E_2 \to I_2^q \times F$, который вместе с уже имеющимся (тождественным) гомеоморфизмом $E_1 \to I_1^q \times F$ составляет гомеоморфизм $E \to I^q \times F$, очевидно, удовлетворяющий условию из определения тривиального расслоения. $\square$

Теорема 10.5 (о накрывающей гомотопии). *Пусть (E, B, F, p) — локально тривиальное расслоение, Z — клеточное пространство, $\widetilde{g} : Z \to E$ — непрерывное отображение и $G : Z \times I \to B$ — такая гомотопия, что $G|_{Z \times 0} = p \circ \widetilde{g}$. Тогда существует такая гомотопия $\widetilde{G} : Z \times I \to E$, что $\widetilde{G}|_{Z \times 0} = \widetilde{g}$ и $p \circ \widetilde{G} = G$. Если на клеточном подпространстве $Z' \subset Z$ уже задана такая гомотопия $\widetilde{G}' : Z' \times I \to E$, что $\widetilde{G}'|_{Z' \times 0} = \widetilde{g}|_{Z'}$ и $p \circ \widetilde{G}' = G|_{Z' \times I}$, то можно выбрать $\widetilde{G}$ продолжающей $\widetilde{G}'$.*

Доказательство. Пусть данное расслоение тривиально: $E = B \times F$, и мы отождествляем отображения в E с парами отображений в B и F. Отображение $\widetilde{g}$ и гомотопия $\widetilde{G}'$ задаются парами

$$(g = G|_{Z \times 0}; \quad h : Z \to E), \qquad (G|_{Z' \times I}; \quad H' : Z' \times I \to F),$$

а то, что мы должны построить, — парой, первый элемент которой нам уже известен — это G, а второй — гомотопия $H : Z \times I \to F$ отображения h, продолжающая H'; существование H прямо следует из теоремы Борсука.

Пусть теперь расслоение произвольно, но $Z = D^k$ и $Z' = S^{k-1}$. Расслоение

$$G^*(E, B, F, p) = (E', D^k \times I \approx I^{k+1}, F, p')$$

тривиально в силу теоремы Фельдбау. Напомним, что $E' \subset (D^k \times I) \times E$, и обозначим через φ естественное отображение $E' \to E$. Отображение $\widetilde{h} : D^k \to E'$, $\widetilde{h}(x) = ((x, 0), \widetilde{g}(x))$ и гомотопии $H : D^k \times I \to D^k \times I$ (тождественная) и $\widetilde{H}' : S^{k-1} \times I \to E'$,

$\widetilde{H}'(x,t) = ((x,t), \widetilde{G}'(x,t))$, удовлетворяют требованиям теоремы о накрывающей гомотопии, и в силу доказанного случая существует гомотопия $\widetilde{H} : D^k \times I \to E'$ отображения $\widetilde{h}$, накрывающая H и продолжающая $\widetilde{H}'$. Ясно, что $\widetilde{G} = \varphi \circ \widetilde{H} : D^k \times I \to E$ — гомотопия отображения $\widetilde{g}$, накрывающая G и продолжающая $\widetilde{G}'$.

Пусть теперь расслоение E произвольно, а пространство Z конечно, точнее Z получается из Z' приклеиванием конечного числа клеток. Очевидная индукция позволяет считать, что $Z \setminus Z'$ состоит из одной клетки e; пусть $f : D^k \to Z$ — соответствующее характеристическое отображение. Отображение $\widetilde{h} = \widetilde{g} \circ f : D^k \to E$ и гомотопии $H = G \circ (f \times I) : D^k \times I \to B$ и $\widetilde{H}' = \widetilde{G}' \circ (f|_{S^{k-1}} \times I) : S^{k-1} \times I \to E$ удовлетворяют условиям теоремы о накрывающей гомотопии, и в силу доказанного ранее существует гомотопия $\widetilde{H} : D^k \times I \to E$ отображения $\widetilde{h}$, накрывающая H и продолжающая $\widetilde{H}'$. Нужную гомотопию $\widetilde{G} : Z \times I \to E$ мы определим на $Z' \times I$ как совпадающую с $\widetilde{G}'$, и на $e \times I$ формулой $\widetilde{G}(f(x),t) = \widetilde{H}(x,t)$ при $x \in \operatorname{Int} D^k$. Корректность определения очевидна.

В общем случае к бесконечному числу клеток одной размерности, не лежащих в Z', предыдущую конструкцию нужно применить одновременно. Если же в $Z \setminus Z'$ содержатся клетки сколь угодно большой размерности, то конструкция применяется бесконечное число раз и непрерывность гомотопии $\widetilde{G}$ следует из аксиомы (W) в силу непрерывности на клетках. □

Определение 10.6. *Расслоение в смысле Серра* — это тройка (E, B, p), где E и B — пространства и p — непрерывное отображение $E \to B$, удовлетворяющее условию CHP (накрывающей гомотопии — covering homotopy property) для клеточных пространств: для любого клеточного пространства Z и любых таких отображения $\widetilde{g} : Z \to E$ и гомотопии $G : Z \times I \to B$, что $p \circ \widetilde{g} = G|_{Z \times 0}$, существует гомотопия $\widetilde{G} : Z \times I \to E$, для которой $\widetilde{G}|_{Z \times 0} = \widetilde{g}$ и $p \circ \widetilde{G} = G$.

При этом единственности накрывающей гомотопии не требуется, а расслоение не обязательно является локально тривиальным.

Задача 109. В определении можно считать Z кубом.

Задача 110. В определении можно считать CHP относительным.

Определение 10.7. *Сильное расслоение в смысле Серра* или *расслоение в смысле Гуревича* — когда в предыдущем определении Z — произвольное топологическое пространство.

Пример 10.8. Пусть Y — произвольное топологическое пространство с отмеченной точкой y_0. Положим $E = E(Y, y_0)$ (пространство путей пространства Y, начинающихся в точке y_0), $B = Y$ и определим отображение $p : E \to B$ как относящее пути $s \in E$ его конец $s(1)$. Получаем (сильное) расслоение в смысле Серра. В самом деле, пусть $\widetilde{g} : Z \to E(Y, y_0)$ и $G : Z \times I \to Y$ отображение и гомотопия, удовлетворяющие условиям CHP. Накрывающая гомотопия $\widetilde{G} : Z \times I \to E(Y, y_0)$ может быть задана формулой

$$[\widetilde{G}(z,t)](\widetilde{t}) = \begin{cases} [\widetilde{g}(z)](\widetilde{t}(1+t)) & \text{при } \widetilde{t}(1+t) \leqslant 1, \\ G(z, \widetilde{t}(1+t) - 1) & \text{при } \widetilde{t}(1+t) \geqslant 1. \end{cases}$$

Заметим, что "слой"$p^{-1}(y_0)$ расслоения p есть не что иное, как пространство петель $\Omega(Y, y_0)$.

Задача 111. Пусть Y — произвольное пространство, (X, A) — пара Борсука (например, клеточная пара). Положим $E = C(X, Y)$ (пространство непрерывных отображений $X \to Y$), $B = C(A, Y)$ и определим отображение $p : E \to B$ формулой $p(f) = f|_A$. Покажите, что (E, B, p) — сильное расслоение в смысле Серра.

Хотя слои расслоения в смысле Серра не гомеоморфны друг другу, но все же они связаны между собой. Чтобы уточнить это, нам понадобится следующее определение.

Определение 10.9. Пространство X *слабо гомотопически эквивалентно пространству* Y, если для каждого клеточного пространства Z определено такое взаимно однозначное соответствие $\varphi_Z : \pi(Z, X) \to \pi(Z, Y)$, что для любого клеточного пространства Z' и любого непрерывного отображения $f : Z \to Z'$ коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd} \pi(Z,X) \arrow[r, "\varphi_Z"] & \pi(Z,Y) \\ \pi(Z',X) \arrow[u, "f^*"] \arrow[r, "\varphi_{Z'}"] & \pi(Z',Y). \arrow[u, "f^*"] \end{tikzcd}$$

Задача 112. Для клеточных пространств гомотопическая эквивалентность совпадает со слабой гомотопической эквивалентностью.

Теорема 10.10. *Если $p : E \to B$ — расслоение в смысле Серра, а x_0 и x_1 — точки из одной компоненты линейной связности B, то $p^{-1}(x_0)$ и $p^{-1}(x_1)$ слабо гомотопически эквивалентны.*

Доказательство. Положим $p^{-1}(x_0) = F_0$ и $p^{-1}(x_1) = F_1$ и зафиксируем непрерывное отображение $h_0 : Z \to F_0$, где Z — клеточное пространство. Зафиксируем также путь $s : I \to B$, соединяющий x_0 с x_1. Рассмотрим отображение $\widetilde{g} = i_0 \circ h_0 : Z \to E$, где i_0 — включение $p^{-1}(x_0)$ в E, и гомотопию $G : Z \times I \to B$, $G(z, t) = s(t)$. В силу CHP существует гомотопия $\widetilde{G} : Z \times I \to E$ отображения $\widetilde{g}$, такая, что $p \circ \widetilde{G} = G$, т.е. $\widetilde{G}(Z \times t) \subset p^{-1}(s(t))$. В частности, $\widetilde{G}(Z \times 1) \subset F_1$, ввиду чего возникает отображение $h_1 : Z \to F_1$. Мы покажем, что гомотопический класс этого отображения не зависит от выбора накрывающей гомотопии, так что сопоставление $h_0 \mapsto h_1$ корректно определяет отображение $\pi(Z, F_0) \to \pi(Z, F_1)$. Более того, мы покажем, что этот гомотопический класс не меняется при замене пути гомотопным путем.

Пусть s' — другой путь, соединяющий x_0 с x_1, и $G' : Z \times I \to B$, $\widetilde{G}' : Z \times I \to E$ и $h_1' : Z \to F_1$ — гомотопии и отображение, построенные при помощи пути s' так же, как гомотопии G, $\widetilde{G}$ и отображение h_1 были построены при помощи s. Предположим, что пути s и s' гомотопны, фиксируем гомотопию $S : I \times I \to B$ между ними и рассмотрим гомотопию $T : I \times I \to B$, определяемую формулой $T(t_1, t_2) = S(t_2, t_1)$. Таким образом, T — гомотопия, начальное отображение которой — отображение $I \to x_0 \in B$, промежуточное отображение — путь, соединяющий $s(t)$ с $s'(t)$, а конечное отображение $I \to x_1 \in B$. Рассмотрим, далее, гомотопию $G^* : (Z \times I) \times I \to B$, определенную формулой $G^*(z, t_1, t_2) = T(t_1, t_2)$ и отображение $\widetilde{g}^* : Z \times I \to E$, определенное формулой $\widetilde{g}^*(z, t_1) = \widetilde{g}(z)$. В силу относительного варианта CHP (см. упражнение 110) существует гомотопия $\widetilde{G}^* : (Z \times I) \times I \to E$ отображения $\widetilde{g}^*$, накрывающая G^* и совпадающая с $\widetilde{G}$ на $(Z \times 0) \times I$ и с $\widetilde{G}'$ на $(Z \times 1) \times I$. Конечное отображение этой гомотопии, $(z, t) \mapsto \widetilde{G}^*(z, t, 1)$, отображает $Z \times I$ в F_1 и представляет собой гомотопию, связывающую отображения h_1 и h_1'.

Таким образом, путь $s : I \to B$ корректно определяет отображение
$$\varphi_s : \pi(Z, p^{-1}(s(0))) \to \pi(Z, p^{-1}(1))),$$
зависящее только от гомотопического класса пути s. Очевидно, что отображение φ_s естественно по Z, причем постоянному пути $s : I \to b_0 \in B$ отвечает тождественное отображение φ_s и произведению путей отвечает композиция отображений $\varphi_{s_1 s_2} = \varphi_{s_1} \circ \varphi_{s_2}$. Это позволяет завершить доказательство: отображения φ_s и $\varphi_{s^{-1}}$ взаимно обратны и, таким образом, φ_s — взаимно однозначное соответствие. □

Задача 113. Для сильного расслоения в смысле Серра слои гомотопически эквивалентны.

Определение 10.11. Непрерывные отображения $f : X \to Y$ и $g : X_1 \to Y_1$ *гомотопически эквивалентны*, если существуют такие гомотопические эквивалентности $\varphi : X_1 \to X$, $\psi : Y_1 \to Y$, что диаграмма
$$\begin{tikzcd} X_1 \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\varphi"] & Y_1 \arrow[d, "\psi"] \\ X \arrow[r, "f"] & Y \end{tikzcd}$$
гомотопически коммутативна ($f \circ \varphi \sim \psi \circ g$).

Теорема 10.12. *Для любого непрерывного отображения $f : X \to Y$ существует (сильное) расслоение в смысле Серра, $p : X_1 \to Y_1$, гомотопически эквивалентное этому отображению.*

При этом можно выбрать $Y_1 = Y$, $\psi = \mathrm{Id}_Y$. Более того, это соответствие (по отображению $f : X \to Y$ канонически строятся расслоение $p(f) : X_1 \to Y$ и такая гомотопическая эквивалентность $\varphi(f) : X_1 \to X$, что $f \circ \varphi(f) \sim p(f)$) является естественным в том смысле, что если имеется коммутативная диаграмма
$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha"] & Y \arrow[d, "\beta"] \\ X' \arrow[r, "f'"] & Y', \end{tikzcd}$$
то канонически находится такое отображение α_1, что коммутативны диаграммы
$$\begin{tikzcd} X_1 \arrow[r, "\alpha_1"] \arrow[d, "p(f)"] & X_1' \arrow[d, "p(f')"] \\ Y \arrow[r, "\beta"] & Y', \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} X_1 \arrow[r, "\alpha_1"] \arrow[d, "\varphi(f)"] & X_1' \arrow[d, "\varphi(f')"] \\ X \arrow[r, "\alpha"] & X'. \end{tikzcd}$$

Доказательство. За X_1 мы принимаем пространство пар (x, s), где $x \in X$, а s — путь пространства Y, начинающийся в точке $f(x)$. Расслоение $p(f) : X_1 \to Y$ и гомотопическая эквивалентность $\varphi(f) : X_1 \to X$ определяются формулами $p(f)(x, s) = s(1)$ и $\varphi(f)(x, s) = x$. □

Теорема 10.13 (точная гомотопическая последовательность расслоения)**.** *Пусть (E, B, p) — расслоение в смысле Серра, $e \in E$, $b = p(e)$, $F = p^{-1}(b)$. Тогда для любого n имеются изоморфизмы*
$$p_* : \pi_n(E, F, e) \to \pi_n(B, b),$$

и соответственно, последовательность

$$\cdots \to \pi_n(F,e) \to \pi_n(E,e) \to \pi_n(B,b) \to \\ \to \pi_{n-1}(F,e) \to \cdots \to \pi_0(F,e) \to \pi_0(E,e) \to \pi_0(B,b),$$

получающаяся из последовательности пары (E,F)*, точна.*

Доказательство. Проверим мономорфность p_*. Пусть $\widetilde{f} : D^n \to E$ — относительный сфероид пары (E,F) и $f_t : S^n \to B$ — гомотопия сфероида, получающегося из $\widetilde{f}$ проектированием и ограничением на сферу, в постоянный сфероид $S^n \to b$. По свойству накрывающей гомотопии $\widetilde{f}$ гомотопно сфероиду, отображающему все D^n в F (с отмеченными точками при этом все в порядке).

Проверим эпиморфность p_*. Пусть $\varphi_t : S^{n-1} \to S^n$ — гомотопия, образ которой пробегает S^n, и которая для отображает S^{n-1} в сферу той же размерности, получающуюся в пересечении S^n (которую считаем стандартно вложенной в $\mathbb{R}^{n+1}$) и плоскости, проходящей через отмеченную точку $s = (1,\dots,1) \in S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$, пересекающей гиперплоскость $x^{n+1} = 0$ по линейному многообразию $x^n = 1$ и наклоненной к оси Ox^{n+1} под углом $\pi\, t$. Пусть $f : S^b \to B$ — произвольный сфероид. Поднимем гомотопию $f \circ \varphi_t : S^{n-1} \to B$ до гомотопии $\widetilde{g}_t : S^{n-1} \to E$, неподвижной на отмеченной точке, причем начальное отображение, в силу построения φ_t, постоянно (отображают в e), а конечное отображает сферу в $p^{-1}b = F$, $\widetilde{g}_1(S^{n-1}) \subset F$. Рассмотрим шар D^n как объединение вложенных $(n-1)$-мерных сфер, пересекающихся по единственной (отмеченной) точке. Занумеруем их параметром $t \in [0,1]$. Определим $D^n \to E$, полагая его равным на t-й сфере соответствующему $\widetilde{g}_t$. Получим относительный сфероид пары (E,F), поскольку $\widetilde{g}_1(S^{n-1}) \subset F$. По построению, его проекция на базу совпадает с исходным сфероидом f. □

Задача 114. Записать в явном виде гомоморфизмы последовательности.

Задача 115. Объяснить, что происходит там, где не группы.

Задача 116. Рассмотреть точную гомотопическую последовательность расслоения Хопфа (S^3, S^2, S^1, p) и вывести, что $\pi_2(S^2) \cong \pi_1(S^1)$ (а значит, равно $\mathbb{Z}$) и $\pi_n(S^3) \cong \pi_n(S^2)$ при $n \geqslant 3$.

Задача 117. Пусть S^∞ — индуктивный предел последовательности $S^1 \subset S^2 \subset S^3 \subset \dots$, т.е. точки S^∞ — это точки несвязного объединения S^i профакторизованного по указанным включениям, в этом смысле каждая точка S^∞ "принадлежит некоторому S^k". Топология вводится следующим образом: $F \subset S^\infty$ замкнуто тогда и только тогда, когда все пересечения $F \cap S^k$ замкнуты в S^k. Аналогично определяется $\mathbb{C}P^\infty$, а также индуктивный предел расслоений Хопфа $(S^\infty, \mathbb{C}P^\infty, S^1, p)$. Убедитесь, что это действительно расслоение, а S^∞ стягиваема. Из точной последовательности этого расслоения выведите, что $\pi_2(\mathbb{C}P^\infty) \cong \mathbb{Z}$, а остальные гомотопические группы $\mathbb{C}P^\infty$ тривиальны.

Задача 118. Рассмотрите расслоение путей из примера 10.8. Докажите, что всегда $\pi_n(\Omega X) \cong \pi_{n+1}(X)$.

Задача 119. Если база расслоения Серра стягиваема, то включение (любого) слоя в тотальное пространство индуцирует изоморфизм гомотопических групп. Если база расслоения связна и один из его слоев стягиваем, то проекция индуцирует изоморфизм гомотопических групп.

Задача 120. Если все гомотопические группы базы и слоя конечны, то гомотопические группы тотального пространства тоже конечны и их порядки не больше произведений порядков соответствующих гомотопических групп базы и слоя.

Задача 121. Покажите, что если расслоение (E, B, p) обладает сечением (т.е. таким непрерывным отображением $s : B \to E$), что $p \circ s = \mathrm{Id}_B$) или если слой является ретрактом пространства E, то $\pi_n(E) \cong \pi_n(B) \oplus \pi_n(F)$.

Задача 122. Покажите, что если слой расслоения (E, B, p) стягивается в точку по E, то $\pi_n(B) \cong \pi_n(E) \oplus \pi_{n-1}(F)$.

11. Теорема о надстройке и гомотопические группы сфер

Рассмотрим q-мерный сфероид $f : S^q \to X$ топологического пространства X (с отмеченной точкой). Отображение

$$\Sigma f : \Sigma S^q = S^{q+1} \to \Sigma X, \qquad (\Sigma f)(y, t) = (f(y), t),$$

является $(q+1)$-мерным сфероидом пространства ΣX. Ясно, что если сфероиды $f, g : S^q \to X$ гомотопны, то гомотопны и сфероиды $\Sigma f, \Sigma g : S^{q+1} \to \Sigma X$. Легко проверить также, что сфероид $\Sigma(f+g)$ гомотопен сфероиду $\Sigma f + \Sigma g$. Таким образом, сопоставление $f \mapsto \Sigma f$ порождает гомоморфизм $\pi_g(X) \to \pi_{q+1}(\Sigma X)$. Он называется *гомоморфизмом надстройки* и обозначается через Σ. В частности, для любых q и n возникает отображение

$$\Sigma : \pi_q(S^n) \to \pi_{q+1}(S^{n+1}).$$

Теорема 11.1 (Фрейденталя). *Гомоморфизм $\Sigma : \pi_q(S^n) \to \pi_{q+1}(S^{n+1})$ является изоморфизмом при $q \leqslant 2n-2$ и эпиморфизмом при $q = 2n-1$.*

Лемма 11.2. *Пусть $f : S^{q+1} = \mathbb{R}^{q+1} \cup \infty \to S^{n+1}$, a и b — полюса S^{n+1}, $f(\infty) \neq a$, $f(\infty) \neq b$. Тогда существует такое сколь угодно близкое к f (в частности ему гомотопное) отображение f_1, что $f_1^{-1}(a)$ и $f_1^{-1}(b)$ — полиэдры размерности $\leqslant q-n$ в $\mathbb{R}^{q+1} \subset S^{q+1}$.*

Доказательство. Применяем метод симплициальной аппроксимации, как мы уже делали несколько раз. Окружим каждую из точек a и b пятью концентрическими шариками

$$a \in B_1^a \subset B_2^a \subset \ldots \subset B_5^a, \qquad b \in B_1^b \subset B_2^b \subset \ldots \subset B_5^b,$$

не содержащими $f(\infty)$. Выберем в $\mathbb{R}^{q+1}$ компактный многогранник, содержащий $f^{-1}(B_5^a \cup B_6^a)$ (это можно сделать, так как прообраз содержится в компактном множестве, не содержащем ∞). Триангулируем его настолько мелко, что если образ симплекса при f пересекается с B_i^a, то он содержится в B_{i+1}^a, $i = 1, 2, 3, 4$, и аналогично для b. Пусть K — объединение всех симплексов, которые пересекаются с $B_4^a \cup B_4^b$. Заменим f на K на отображение f', совпадающее с f на вершинах симплексов, и линейное на каждом симплексе. Построим отображение f_1', совпадающее с f вне $f^{-1}(B_3^a \cup B_3^b)$, с f' на $f^{-1}(B_2^a \cup B_2^b)$ и такое, что образ при нем дополнения к $f^{-1}(B_2^a \cup B_2^b)$ не пересекается с $B_1^a \cup B_1^b$ (ср. с доказательством теоремы 8.1). При этом, чем мельче разбиение, тем ближе f_1' к f. Полученное отображение обладает следующим свойством: прообраз окрестности каждой из точек a и b покрывается конечным числом симплексов, на каждом из которых отображение линейно. Гомеоморфизмом сферы, сколь угодно близким к тождественному, можно добиться, что ни одна из двух точек не содержится в образе $(q+1)$-мерного симплекса, имеющего размерность $< (n+1)$, поскольку таких симплексов конечное число. Полученное отображение и есть искомое f_1. Действительно, прообраз точки при линейном отображении $(q+1)$-мерного симплекса, имеющем $(n+1)$-мерный образ, является пересечением симплекса с линейным многообразием размерности $(q-n)$, то есть выпуклым многогранником размерности $\leqslant (q-n)$. $\square$

Лемма 11.3. *Пусть $K, L \subset \mathbb{R}^p$ — полиэдры размерностей $\leqslant k$ и $\leqslant l$ соответственно, причем $k+l+2 \leqslant p$. Тогда K и L не зацеплены, т.е. существует изотопия $F_t : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^p$ (т.е. $F_0 = \mathrm{Id}$, а F_t — гомеоморфизм при любом t), причем $F_1(K)$ и $F_1(L)$ разделяются в $\mathbb{R}^p$ гиперплоскостью.*

Доказательство. Проведем в $\mathbb{R}^p$ гиперплоскость, не пересекающуюся с K. Пусть $K_1, \dots, K_M$ — плоскости размерности $\leqslant k$, причем $K \subset K_1 \cup \dots \cup K_M$, а $L_1, \dots L_N$ — плоскости размерности $\leqslant l$, причем $L \subset L_1 \cup \dots \cup L_N$. Пусть P_{ij} — минимальная плоскость, содержащая K_i и L_j. Тогда $\dim P_{ij} \leqslant \dim K_i + \dim L_j + 1 \leqslant k + l + 1 < p$ (если взять за начальную точку P_{ij} некоторую точку K_i, то в качестве порождающей системы векторов можно взять некоторый базис K_i в объединении с некоторым базисом L_j и некоторым вектором, соединяющим точку K_i с некоторой точкой L_j). Выберем такую точку $x \in \mathbb{R}^p$, что она лежит с другой стороны от первоначальной гиперплоскости, чем K, и не содержится в объединении P_{ij}, так что никакая прямая, проходящая через x, не пересекает одновременно K и L. Изотопия задается следующим образом. Рассмотрим лучи, выходящие из точки x, и отождествим их множество с маленькой сферой с центром x. Пусть K' и L' — компактные непересекающиеся множества этой сферы, образованные лучами, пересекающимися с K и L соответственно. Найдем по лемме Урысона непрерывную функцию α на сфере, принимающую значения в $[0,1]$, равную 1 на L' и 0 на K'. При изотопии каждая точка пространства движется по лучу σ к точке x со скоростью, пропорциональной расстоянию до x, а коэффициент пропорциональности равен $\alpha(\sigma)$. В частности, K остается на месте, а L когда-нибудь окажется с той же стороны от гиперплоскости, что и x. Это будет конечный момент изотопии. $\square$

Доказательство теоремы Фрейденталя. Докажем эпиморфность Σ при $q \leqslant 2n-1$. Пусть $f : S^{q+1} \to S^{n+1}$ — сфероид. Мы должны доказать, что существует такой сфероид $h : S^q \to S^n$, что сфероид f гомотопен Σh. Исключив тривиальный случай $n = 0$, считаем, что $n > 0$, т.е. что сфера S^{n+1} односвязна, и это позволяет нам при построении гомотопий забыть про отмеченные точки. Пользуясь двумя предыдущими леммами, мы гомотопируем отображение f в отображение $g_1 : S^{q+1} \to S^{n+1}$ со следующим свойством: прообраз северного полюса лежит в северном полушарии, прообраз южного — в южном, образ экватора не задевает полюсов. Точнее, по лемме 11.2 мы гомотопируем f в такое отображение f_1, что прообразы полюсов имеют размерность $\leqslant q-n$, и $(q-n)+(q-n)+1 = 2q-(2n-1) \leqslant 2q-q < q+1$. Поэтому можно применить лемму 11.3 и считать разделяющую гиперплоскость из этой леммы экватором. Более того, существуют окрестности полюсов — полярные шапки A и B, в которых нет точек образа экватора. Можно произвести гомотопию $S^{n+1} \to S^{n+1}$, которая растягивает A на северное полушарие и B — на южное, а все остальное сжимает на экватор. Композиция этой гомотопии с g_1 — такое отображение $g_2 : S^{q+1} \to S^{n+1}$, которое переводит экватор в экватор, северное полушарие в северное полушарие и южное — в южное. Далее, двигаясь по меридианам на север и на юг от экватора, сдвигаем соответствующие полушария в полюса. Получили надстройку.

Доказательство мономорфности Σ при $q \leqslant 2n-2$ проводится по той же схеме. Пусть $h_1 : S^q \to S^n$, $h_2 : S^q \to S^n$ — сфероиды. Мы должны доказать, что если сфероиды Σh_1 и Σh_2 гомотопны, то и сфероиды h_1 и h_2 гомотопны. Возьмем произвольную гомотопию f_t, соединяющую Σh_1 и Σh_2, и подправим ее так, чтобы все сфероиды f_t тоже были надстройками. Точнее, гомотопия f_t есть отображение $F : S^{q+1} \times I \to S^{n+1}$. Рассмотрим снова прообразы полюсов $F^{-1}(a), F^{-1}(b) \subset S^{q+1} \times I$. Эти прообразы можно сделать полиэдрами, имеющими размерность $\leqslant (q+2)-(n+1) = q-n+1$. При $2(q-n+1)+1 < q+2$, т.е. при $q \leqslant 2n-2$, их можно “развести” — сделать лежащими в произведениях двух полусфер на отрезок. Дальше — как для эпиморфности. $\square$

Теорема 11.4 (Хопфа). $\pi_n(S^n) \cong \mathbb{Z}$.

Доказательство. При $n = 1$ и $n = 2$ это установлено в теореме 5.5 и упражнении 116. При $n \geqslant 3$ мы имеем изоморфизм

$$\Sigma : \pi_{n-1}(S^{n-1}) \to \pi_n(S^n),$$

поскольку $q = n-1 \leqslant 2(n-1)-2 = 2n-4$ при этих n. $\square$

Следствие 11.5 (из теоремы Хопфа). *Сфера S^n не стягиваема ни при каком n.*

Замечание 11.6. Гомоморфизм $\Sigma : \pi_1(S^1) \to \pi_2(S^2)$ является, в силу теоремы Фрейденталя, эпиморфизмом. Но так как $\pi_1(S^1) \cong \pi_2(S^2) \cong \mathbb{Z}$, это — изоморфизм.

Замечание 11.7. Образующей группы $\pi_n(S^n)$ служит класс тождественного сфероида $S^n \to S^n$: при $n = 1$ это было явно найдено, при остальных n вытекает из того, что надстройка над тождественным сфероидом есть, очевидно, тождественный сфероид.

Методом симплициальной аппроксимации (неоднократно нами уже использованным) доказывается следующая лемма.

Лемма 11.8. *Пусть E^m — сфера S^m или шар D^m, где $m \leqslant n+1$; при этом мы отождествляем $\mathbb{R}^m$ с $S^m \setminus y_0$ или с $D^m \setminus \partial D^m$ (таким образом, $\mathbb{R}^m \subset E^m$). Пусть, далее, $h : E^m \to Y$ — такое непрерывное отображение, что $h(E^m \setminus \mathbb{R}^m) \subset X$. Тогда существует гомотопное h непрерывное отображение $h_1 : E^m \to Y$ со следующими свойствами:*

(1) *на $h^{-1}(X)$ отображение h_1 совпадает с h;*
(2) *если $m \leqslant n$, то $h(E^m) \subset X$;*
(3) *если $m = n+1$, то в E^m лежит такое конечное семейство попарно непересекающихся шариков $d_1, \dots, d_N$, что $h_1(E^m \setminus \cup_i d_i) \subset X$ и $h_1|_{\operatorname{Int} d_i}$ при каждом i — линейный (сохраняющий или обращающий ориентацию) гомеоморфизм открытого шарика $\operatorname{Int} d_i$ на $\operatorname{Int} D^{n+1} \subset Y$.*

Теорема 11.9 (аддиционная). *Пусть X — связное топологическое пространство и $f : S^n \to X$ — непрерывное отображение. Положим $Y = X \cup_f D^{n+1}$. Гомоморфизм*

$$\pi_i(X, x_0) \to \pi_i(Y, y_0), \tag{6}$$

где $x_0 \in X \subset Y$ — произвольная отмеченная точка. индуцированный включением $X \to Y$, при $i < n$ является изоморфизмом, а при $i = n$ является эпиморфизмом, *ядро которого порождено всевозможными классами вида $T_s[f]$, где s — путь, соединяющий x_0 с образом $f(y_0)$ отмеченной точки $y_0 \in S^n$, а $[f] \in \pi_n(X, f(y_0))$ — гомотопический класс сфероида f.*

Доказательство. Эпиморфность отображения (6) при $i \leqslant n$ и его мономорфность при $i < n$ вытекает из леммы непосредственно. (При $i \leqslant n$ лемма перерабатывает сфероид $h : S^i \to Y$ в гомотопный сфероид $h_1 : S^i \to Y$, отображающий S в X; при $i < n$ по отображению $h : D^{i+1} \to Y$, осуществляющему гомотопию в нуль в Y сфероида $h|_{S^i} : S^i \to X \subset Y$, лемма строит отображение $h_1 : D^{i+1} \to X \subset Y$, осуществляющее гомотопию в нуль этого же сфероида в X). Предположим, что гомотопический класс сфероида $g : S^n \to X$ принадлежит ядру отображения (6), т.е. g продолжается до некоторого отображения $h : D^{n+1} \to X$. Заменив отображение h отображением h_1 со свойствами, указанными в части (3) леммы, мы получим другое продолжение $h_1 : D^{n+1} \to X$ этого сфероида. На границе каждого шарика d_i отображение h_1 совпадает с композицией

$$\partial d_i \xrightarrow{l_i} S^n \xrightarrow{f} X,$$

где l_i — линейное отображение. Дальнейшее рассуждение мало отличается от соответствующей части доказательства теоремы 8.1. Положим $y_i = l_i^{-1}(y_0)$ и соединим при каждом i точку y_i путем σ_i с $y_0 \in S^n \subset D^{n+1}$ таким образом, чтобы эти пути не задевали своими внутренними точками шариков d_i и попарно не пересекались. В $D^{n+1} \setminus \cup_i \operatorname{Int} d_i$ существует очевидная гомотопия, соединяющая естественный сфероид $S^n \to D^{n+1}$ (включение) с суммой сфероидов $T_{\sigma_i}(l_i^{-1})$. Переведем эту гомотопию в X посредством отображения h_1. Мы получим гомотопию, соединяющую сфероид g со сфероидом $T_{h \circ \sigma_i}(f_i)$, где f_i — сфероид, отличающийся от f на линейное преобразование сферы S^n. Поскольку $[f_i] = \pm[f]$ (знак зависит от того, сохраняет или обращает ориентацию это линейное преобразование), мы видим, что класс $[g]$ действительно является линейной комбинацией образующих, указанных в теореме. Этим последнее утверждение теоремы доказано в одну (более трудную) сторону. В другую сторону оно очевидно: класс $T_s[f]$, разумеется, принадлежит ядру отображения (6). $\square$

Замечание 11.10. Если считать, что $f(y_0) = x_0$, то ядро отображения (6) с $i = n$ порождается элементами $\pi_1(X, x_0)$-орбиты класса $[f] \in \pi_n(X, x_0)$. Особенно важен случай, когда X односвязно: в этом случае теорема показывает, что при приклеивании $(n+1)$-мерной клетки гомотопические группы размерности $< n$ не меняются, а n-мерная гомотопическая группа факторизуется по циклической подгруппе, порожденной классом заклеиваемого сфероида.

Следствие 11.11. *Если Y — клеточное подпространство пространства X и разность $X \setminus Y$ не содержит клеток размерности $\leqslant n$, то гомоморфизм $\pi_i(Y) \to \pi_i(X)$, индуцированный включением, является изоморфизмом при $i < n$ и эпиморфизмом при $i = n$. В частности, $\pi_n(X) = \pi_n(\operatorname{sk}_{n+1} X)$ для любого клеточного пространства X.*

Теорема 11.12. *Пусть X и Y — клеточные пространства. Если пространство X p-связно, а пространство Y q-связно, то: (1) $\pi_n(X \vee Y) = \pi_n(X) \oplus \pi_n(Y)$ при $n \leqslant p+q$; (2) при любом n группа $\pi_n(X \vee Y)$ содержит прямое слагаемое, изоморфное $\pi_n(X) \oplus \pi_n(Y)$.*

Доказательство. В силу доказанного выше, пространства X и Y гомотопически эквивалентны клеточным пространствам с единственной вершиной и без клеток размерностей $1, \dots, p$ и $1, \dots, q$ соответственно; мы будем считать, что таковы уже X и Y. Букет $X \vee Y$ является клеточным подпространством произведения $X \times Y$, и клетки, лежащие в разности $(X \times Y) \setminus (X \vee Y)$, имеют размерности, не меньшие $p + q + 2$. Ввиду следствия из предыдущей теоремы (а также того факта, что $\pi_n(X \times Y) = \pi_n(X) \oplus \pi_n(Y)$), отсюда вытекает утверждение (1).

Для доказательства утверждения (2) достаточно заметить, что сквозное отображение

$$\pi_n(X) \oplus \pi_n(Y) \xrightarrow{i_* \oplus j_*} \pi_n(X \vee Y) \oplus \pi_n(X \times Y) = \pi_n(X) \oplus \pi_n(Y),$$

тождественно, где первая стрелка есть сумма гомоморфизмов $i_* : \pi_n(X) \to \pi_n(X \vee Y)$ и $j_* : \pi_n(Y) \to \pi_n(X \vee Y)$, индуцированных включениями $i : X \to X \vee Y$ и $j : Y \to X \vee Y$. $\square$

Следствие 11.13 (гомотопические группы букетов). $\pi_n(\underbrace{S^n \vee \dots \vee S^n}_{q}) \cong \underbrace{\mathbb{Z} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}}_{q}$, *где систему свободных образующих составляют классы q естественных вложений $S^n \to S^n \vee \dots \vee S^n$.*

Непосредственно из теоремы 11.9 вытекает следующее утверждение.

Теорема 11.14 (первая нетривиальная гомотопическая группа клеточного пространства). *Пусть X — клеточное пространство с единственной нульмерной клеткой, не имеющее клеток размерностей $1, \dots, n-1$. Отождествим остов $\mathrm{sk}_n X$ с букетом $\vee_{i \in I} S^n$ n-мерных сфер, поставленным во взаимно однозначное соответствие с n-мерными клетками пространства X. Пусть $f_j : S^n \to \mathrm{sk}_n X = \vee_{i \in I} S^n$, $j \in J$, — приклеивающие отображения, отвечающие $(n+1)$-мерным клеткам пространства X, и пусть $\varphi_j \in \pi_n(\mathrm{sk}_n X) \cong \oplus_{i \in I} \mathbb{Z}$ — гомотопические классы сфероидов f_j. Тогда группа $\pi_n(X)$ есть факторгруппа группы $\oplus_{i \in I} \mathbb{Z}$ по подгруппе, порожденной элементами φ_j, $j \in J$.*

Задача 123. Докажите следующий относительный вариант теоремы 11.14 (уточнив надлежащим образом формулировку) . Пусть (X, A) — такая клеточная пара со связным A, что в $X \setminus A$ лежат только клетки размерности $\geqslant n$, где $n \geqslant 3$. Тогда группа $\pi_n(X, A)$, т.е. первая нетривиальная гомотопическая группа пары (X, A) порождается как $\pi_1(A)$-модуль n-мерными клетками из $X \setminus A$; соотношения между этими образующими $\pi_1(A)$–модуля соответствуют $(n+1)$-мерным клеткам из $X \setminus A$.

Задача 124. Пусть (X, A) — клеточная пара с односвязным A, и пусть клетки, лежащие в $X \setminus A$, имеют размерность $\geqslant n \geqslant 2$. Покажите, что естественное отображение $\pi_n(X, A) \to \pi_n(X/A)$ является изоморфизмом.

Напомним, что пространства X и Y слабо гомотопически эквивалентны, если можно определить для любого клеточного пространства Z взаимно однозначное соответствие $\varphi_Z : \pi(Z, X) \to \pi(Z, Y)$, естественное по Z. При этом может оказаться, что φ_Z индуцируется некоторым (одним и тем же при всех Z) непрерывным отображением $\varphi : X \to Y$.

Определение 11.15. Непрерывное отображение $\varphi : X \to Y$ называется *слабой гомотопической эквивалентностью*, если для любого клеточного пространства Z отображение $\varphi_* : \pi(Z, X) \to \pi(Z, Y)$ является взаимно однозначным соответствием.

Очевидно, пространства, которые можно связать слабой гомотопической эквивалентностью, слабо гомотопически эквивалентны. Обратное неверно, как показывают простейшие примеры.

Пример 11.16. Множества $\mathbb{Q}$ и $\mathbb{Z}$ в $\mathbb{R}$ слабо гомотопически эквивалентны, но слабой гомотопической эквивалентности $\mathbb{Q} \to \mathbb{Z}$ не существует: непрерывное отображение $\mathbb{Q} \to \mathbb{Z}$ неизбежно будет постоянным на целых интервалах и потому не будет взаимно однозначным индуцируемое им отображение $\pi(\text{точка}, \mathbb{Q}) \to \pi(\text{точка}, \mathbb{Z})$.

Теорема 11.17. *Следующие свойства непрерывного отображения $f : X \to Y$ эквивалентны.*

(1) f *— слабая гомотопическая эквивалентность.*
(2) *Гомоморфизм $f_* : \pi_n(X, x_0) \to \pi_n(Y, y_0)$ является изоморфизмом при любых n и x_0.*
(3) *Если (W, A) — клеточная пара и $h : A \to X$, $g : W \to Y$ — такие непрерывные отображения, что $f \circ h \sim g|_A$, то существует такое непрерывное отображение $\widetilde{h} : W \to X$, что $\widetilde{h}|_A = h$ и $f \circ \widetilde{h} \sim g$.*

Доказательство. Импликация (1) $\Rightarrow$ (2) очевидна. Импликация (3) $\Rightarrow$ (1) почти очевидна: взяв в качестве пары (W, A) пару (Z, φ), мы убеждаемся в том, что отображение $f_* : \pi(Z, X) \to \pi(Z, Y)$ является отображением на, а положив $(W, A) = (Z \times I, (Z \times 0) \cup (Z \times 1))$, мы видим, что оно переводит разные элементы в разные. Остается доказать импликацию (2) $\Rightarrow$ (3). Пусть $f : X \to Y$ — отображение, удовлетворяющее условию (2), и пусть (W, A) — клеточная пара. Мы предположим сначала, что W отличается от A единственной клеткой: $W = A \cup_\alpha D^{n+1}$, где $\alpha : S^n \to A$ — непрерывное отображение. Поскольку сквозное отображение $\alpha : S^n \to A \subset W$ гомотопно нулю (его продолжением на шар служит естественное отображение $D^{n+1} \to W$), гомотопна нулю и композиция $(g|_A) \circ \alpha : S^n \to Y$. Значит, гомотопно нулю отображение $f \circ h \circ \alpha : S^n \to Y$, а с ним — и отображение $h \circ \alpha : S^n \to X$: отображение f переводит в сфероиды, гомотопные нулю, только сфероиды, гомотопные нулю (f_* — мономорфизм). Значит, отображение $h \circ \alpha : S^n \to X$ продолжается до непрерывного отображения $\beta : D^{n+1} \to X$, и мы можем составить из отображений h и β непрерывное отображение $\widetilde{h}' : W \to X$. Нам нужно, чтобы было $f \circ \widetilde{h} \sim g$, а есть у нас пока только $f \circ \widetilde{h}'|_A \sim g|_A$. Фиксируем гомотопию $\Phi : A \times I \to Y$, соединяющую $g|_A$ с $f \circ \widetilde{h}'|_A = f \circ h$, и рассмотрим $(n+1)$-мерный сфероид $\gamma : S^{n+1} = \partial(D^{n+1} \times I) \to Y$, составленный из отображений:

$$D^{n+1} \times 0 = D^{n+1} \to W \xrightarrow{g} Y,$$
$$S^n \times I \xrightarrow{\alpha \times I} A \times I \xrightarrow{\Phi} Y,$$
$$D^{n+1} \times 1 = D^{n+1} \xrightarrow{\beta} X \xrightarrow{f} Y.$$

Для того чтобы гомотопия Φ продолжалась до гомотопии, связывающей g с $f \circ \widetilde{h}'$, нужно, чтобы сфероид γ был гомотопен нулю. Чтобы добиться этого, в нашем распоряжении есть выбор отображения β, продолжающего $h \circ \alpha$; если мы вместо β возьмем другое отображение, β', то к гомотопическому классу сфероида γ прибавится гомотопический класс сфероида $f \circ \delta$, где $\delta : S^{n+1} \to X$ — сфероид, составленный из отображений $\beta, \beta' : D^{n+1} \to X$ (согласованных на ∂D^{n+1}). Ясно, что гомотопический класс сфероида δ может быть сделан произвольным элементом группы $\pi_{n+1}(X)$, но тогда произвольным будет и класс сфероида $f \circ \delta$ (f_* — эпиморфизм). Этим доказательство завершается в случае, когда $W \setminus A$ состоит из одной клетки. В общем случае применяется обычная клеточная индукция: на n-м шаге предыдущее построение проводится одновременно для всех n-мерных клеток из разности $W \setminus A$. $\square$

Теорема 11.18 (Теорема Уайтхеда)**.** *Пусть X, Y — клеточные пространства. Если непрерывное отображение f обладает тем свойством, что $f_* : \pi_n(X, x_0) \to \pi_n(Y, f(x_0))$ — изоморфизм при всех n и x_0, то f — гомотопическая эквивалентность.*

Доказательство. Теорема является прямым следствием теоремы 11.17 и того факта, что для клеточных пространств слабая гомотопическая эквивалентность совпадает с обычной. $\square$

Замечание 11.19. Если пространства X и Y связны, то условие теоремы достаточно проверять для некоторой произвольно фиксированной точки $x_0 \in X$.

Задача 125. Покажите, что пространства

(1) S^2 и $S^3 \times \mathbb{C}P^\infty$,
(2) $S^m \times \mathbb{R}P^n$ и $\mathbb{R}P^m \times S^n$, $m \neq n$,

имеют одинаковые гомотопические группы, но гомотопически не эквивалентны.

Теорема 11.20 (о клеточной аппроксимации топологических пространств)**.** *Для любого топологического пространства X существует клеточное пространство Y и слабая гомотопическая эквивалентность $f : Y \to X$.*

Определение 11.21. Такая пара (Y, f) называется *клеточной аппроксимацией пространства X.*

Доказательство. Можно ограничиться случаем (линейно) связного пространства X. Мы построим цепочку пространств $Y_0 \subset Y_1 \subset \dots$, и такую систему продолжающих друг друга отображений $f_i : Y_i \to X$, что $(f_i)_* : \pi_q(Y_i) \to \pi_q(X)$ будет изоморфизмом при $q \leqslant i$. В качестве y_0 мы возьмем точку, в качестве $f_0 : Y_0 \to X$ — произвольное отображение. Предположим, что уже построены $Y_0 \subset Y_1 \subset \dots \subset Y_{n-1}$ и $f_0, \dots, f_{n-1}$. Положим $y_0 = Y_0$, $x_0 = f_0(y_0)$. Выберем в группе $\pi_n(X, x_0)$ (или даже в $\pi_1(X, x_0)$-модуле $\pi_n(X, x_0)$) систему образующих $\{\varphi_\alpha\}$, фиксируем для φ_α представляющий сфероид $g_\alpha : S^n \to X$, положим $Y_n' = Y_{n-1} \vee (\vee_\alpha S^n)$ и определим отображение $f_n' : Y_n' \to X$ как совпадающее с f_{n-1} на y_{n-1} и с g_α на α-й компоненте букета $\vee_\alpha S^n$. В силу теоремы 11.9 $\pi_q(Y_n') = \pi_q(Y_{n-1}$ при $q < n$, поэтому отображение $(f_n')_*$ в размерностях $< n$ является изоморфизмом. Отображение же $(f_n')_* : \pi_n(Y_n') \to \pi_n(X)$ эпиморфно, поскольку все φ_α лежат в его образе. Мономорфизмом это отображение может не быть; возьмем в его ядре $K = \ker(f_n')_*$ систему образующих $\{\psi_\beta \in \pi_n(Y_n')\}$ (можно взять систему образующих над $\pi_1(Y_n')$). Фиксируем для ψ_β представляющие сфероиды $h_\beta : S^n \to Y_n'$, и приклеим по каждому из них к Y_n' $(n+1)$-мерную клетку. Полученное пространство примем за Y_n. Поскольку $(f_n')_* \psi_\beta = 0$, композиции $f_n' \circ h_\beta$ гомотопны нулю, и отображение f_n' может быть продолжено на все приклеенные клетки. Результатом такого продолжения и будет отображение $f_n : Y_n \to X$. Приклеивание не изменит групп π_q с $q < n$, в силу же теоремы 11.9 $\pi_n(Y_n) = \pi_n(Y_n')/K$, вследствие чего $(f_n)_* : \pi_n(Y_n) \to \pi_n(X)$ — изоморфизм. $\square$

Задача 126. Докажите гомотопическую единственность клеточной аппроксимации топологического пространства: если (Y, f), (Z, g) — две клеточных аппроксимации пространства X, то существует такая гомотопическая эквивалентность $h : Z \to Y$, что $g = f \circ h$.

Задача 127. Если X и Y — слабо гомотопически эквивалентные пространства, то существует (единственное с точностью до гомотопической эквивалентности) клеточное пространство Z, обладающее слабыми гомотопическими эквивалентностями $f : Z \to X$, $g : Z \to Y$.

Теорема 11.22. *Пусть n — натуральное число и π — группа, предполагаемая абелевой, если $n > 1$. Тогда существует такое клеточное пространство X, что*

$$\pi_i(X) \cong \begin{cases} 0 & \text{при} \quad i \neq n, \\ \pi & \text{при} \quad i = n. \end{cases}$$

Определение 11.23. Такие пространства называются *пространствами Эйленберга-Маклейна* или *пространствами типа* $K(\pi, n)$.

Доказательство. Выберем в π систему образующих $\{\varphi_\alpha\}$ и систему соотношений $\{R_\beta\}$. Положим $X_n = \vee_\alpha S^n$; тогда $\pi_i(X_n) = 0$ при $i < n$ и $\pi_n(X_n) = \oplus_\alpha \mathbb{Z}$ (или $*_\alpha \mathbb{Z}$ при $n = 1$); образующие группы $\pi_n(X_n)$ находятся во взаимно однозначном соответствии с φ_α, и мы обозначаем их через $\widetilde{\varphi}_\alpha$. Заменим в каждом из соотношений R_β символы φ_α символами $\widetilde{\varphi}_\alpha$; получатся элементы r_β группы $\pi_n(X_n)$. Фиксируем сфероиды, представляющие эти элементы, и приклеим по этим сфероидам к X_n $(n+1)$-мерные клетки. Получится такое пространство X_{n+1}, что $\pi_i(X_{n+1}) = 0$ при $i < n$ и $\pi_n(X_{n+1}) = \pi$. Далее мы берем произвольную систему образующих в $\pi_{n+1}(X_{n+1})$, представляем их сфероидами и приклеиваем по этим сфероидам к X_{n+1} $(n + 2)$-мерные клетки. Получается пространство X_{n+2}, которое имеет нужные гомотопические группы уже до размерности $n + 1$. Затем заклеиваем у X_{n+2} группу π_{n+2} и т.д. □

Пример 11.24. (1) Пространство $\mathbb{C}P^\infty$ есть пространство типа $K(\mathbb{Z}, 2)$; это — единственное обозримое пространство, имеющее тип $K(\pi, n)$ с $n > 1$.

(2) S^1 есть $K(\mathbb{Z}, 1)$.

(3) $\mathbb{R}P^\infty$ есть $K(\mathbb{Z}_2, 1)$.

(4) Бесконечномерные линзы $L^\infty_m = S^\infty / \mathbb{Z}_m$, где образующая T группы $\mathbb{Z}_m$ действует в $S^\infty \subset \mathbb{C}^\infty$ по формуле $T(z_1, z_2, \dots) = (z_1 \exp(2\pi i/m), z_2 \exp(2\pi i/m), \dots)$ — пространства типа $K(\mathbb{Z}_m, 1)$.

(5) Так как произведение пространств типа $K(\pi_1, n)$ и $K(\pi_2, n)$ есть, очевидно, пространство типа $K(\pi_1 \times \pi_2, n)$, то конструкции (2)-(4) позволяют построить пространство типа $K(\pi, n)$ для любой конечнопорожденной абелевой группы π.

(6) Известно много пространств типа $K(\pi, 1)$ с неабелевыми π. К их числу относятся, например, все классические поверхности, кроме S^2 и $\mathbb{R}P^2$.

Задача 128. Докажите, что пространство всех неупорядоченных наборов из n различных точек плоскости есть пространство типа $K(\pi, 1)$ для некоторой группы π; задайте эту группу образующими и соотношениями. Эта группа называется *группой кос из n нитей.*

Задача 129. Сделайте подобное для упорядоченных наборов (группа крашеных кос).

Задача 130. Построить пространство с заданными гомотопическими группами.

Задача 131. Покажите, что $\Omega K(\pi, n) = K(\pi, n-1)$.

Теорема 11.25. *Любые два пространства типа $K(\pi, n)$ слабо гомотопически эквивалентны. В частности, любые два клеточных пространства типа $K(\pi, n)$ гомотопически эквивалентны.*

Доказательство. Пусть X — пространство типа $K(\pi, n)$, построенное в доказательстве теоремы 11.22, и Y — произвольное пространство типа $K(\pi, n)$. Мы построим отображение $f : X \to Y$, индуцирующее изоморфизм гомотопических групп $\pi_n(X) \to \pi_n(Y)$. Напомним, что n-й остов X_n пространства X есть букет $\vee_\alpha S^n$ n-мерных сфер, соответствующих образующим группы π. Поскольку $\pi_n(Y) = \pi$, мы можем отождествить эти образующие с элементами группы $\pi_n(Y)$. Отобразим $\vee_\alpha S^n$ в Y при помощи сфероидов, представляющих эти элементы. Все, что мы должны еще сделать — как-нибудь продолжить это отображение до непрерывного отображения $X \to Y$; любое такое продолжение будет обладать требуемыми свойствами. Продолжение строится отдельно для каждой клетки пространства X, и каждый раз оно оказывается возможным, потому что композиция приклеивающего отображения клетки с уже построенным отображением есть сфероид, гомотопный нулю. Для клеток размерности $n+1$ это вытекает из того, что они отвечают соотношениям в группе π, а для клеток больших размерностей — из того, что $\pi_i(Y) = 0$ при $i > n$. □

При доказательстве теоремы 11.22 и в других местах мы пользовались следующей операцией *заклеивания гомотопических групп* размерности $> n$, которая превращает пространство X в пространство X' содержащее X и такое, что (1) $\pi_q(X') = 0$ при $q > n$, (2) гомоморфизм $\pi_q(X) \to \pi_q(X')$, индуцированный включением $X \to X'$, является изоморфизмом при $q \leqslant n$. Для построения пространства X' достаточно сначала приклеить к X $(n+2)$-мерные клетки по сфероидам, представляющим образующие группы $\pi_{n+1}(X)$, затем приклеить $(n+3)$-мерные клетки по сфероидам, представляющим образующие группы π_{n+2} полученного пространства и т.д. Операция заклеивания гомотопически единственна:

Задача 132. Пусть X — топологическое пространство, X'_1 и X'_2 — два пространства, содержащие X и обладающие свойствами (1), (2) из определения заклеивания. Тогда существует слабая гомотопическая эквивалентность $X'_1 \to X'_2$, гомотопная на X включению $X \to X'_2$.

Заклеивание позволяет определить каноническое отображение произвольного пространства X в надлежащий $K(\pi, n)$. Именно, пусть $\pi_n(X) = \pi$ — первая нетривиальная гомотопическая группа пространства X (для простоты предполагаемого связным). Заклеим у X гомотопические группы размерностей $> n$. Получится пространство типа $K(\pi, n)$ и отображение (включение) $X \to K(\pi, n)$, которое устанавливает изоморфизм групп π_n. Из задачи 132 и теоремы 11.25 легко вывести, что эта конструкция гомотопически единственна.

Рассмотрим теперь операцию *убивания.* Превратим построенное выше отображение $X \to K(\pi, n)$, где $\pi = \pi_n(X)$, $\pi_q(X) = 0$ при $q < n$, в гомотопически эквивалентное расслоение в смысле Серра (см. теорему 10.12) и возьмем слой этого расслоения. Этот слой, определенный канонически с точностью до слабой гомотопической эквивалентности, называется (первым или $(n+1)$-м) *убивающим пространством* для

X и обозначается через $X|_{n+1}$. Имеется (гомотопически единственное) каноническое отображение $X|_{n+1} \to X$.

Теорема 11.26.

$$\pi_q(X|_{n+1}) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad q \leqslant n, \\ \pi_q(X) & \text{при} \quad q > n. \end{cases}$$

Более того, каноническое отображение $X|_{n+1} \to X$ индуцирует изоморфизм гомотопических групп в размерностях $> n$.

Это стандартным образом выводится из точности гомотопической последовательности расслоения, гомотопически эквивалентного отображению $X \to K(\pi, n)$. Конструкцию убивающего пространства можно итерировать. В результате для произвольного пространства X и произвольного числа m получаются пространство $X|_m$ и отображение $X|_m \to X$, такие, что индуцированное отображение $\pi_q(X|_m) \to \pi_q(X)$ является изоморфизмом при $q \geqslant m$, а группы $\pi_q(X|_m)$ с $q < m$ равны 0.

Задача 133. Докажите, что для любого связного пространства X каноническое отображение $X|_2 \to X$ слабо гомотопически эквивалентно универсальному накрытию.

Задача 134. Докажите, что $S^2|_3 = S^3$ н $\mathbb{C}P^n|_3 = \mathbb{C}P^n|_{2n+1} = S^{2n+1}$.

Задача 135. Докажите, что в ситуации теоремы 11.26 слой расслоения, гомотопически эквивалентного каноническому отображению $X|_{n+1} \to X$, есть $K(\pi, n-1)$.

12. Сингулярные гомологии

Пусть $A_0, A_1, \dots A_q$ — точки пространства $\mathbb{R}^n$, где $n > q$, не лежащие в одной $(q-1)$-мерной плоскости. Выпуклая оболочка множества этих точек называется *евклидовым симплексом* с вершинами $A_0, A_1, \dots A_q$; выпуклые оболочки подмножеств этого множества — *грани* указанного симплекса. *Стандартный евклидов симплекс* — евклидов симплекс T^q в $\mathbb{R}^{q+1}$, вершинами которого являются концы координатных ортов:

$$T^q = \left\{ (t_0, \dots, t_q) \in \mathbb{R}^{q+1} \,|\, t_0 \geqslant 0, \dots, t_q \geqslant 0, \sum_{i=0}^{q} t_i = 1 \right\}.$$

Назовем q-мерным *сингулярным симплексом* топологического пространства X непрерывное отображение стандартного q-мерного симплекса T^q в X, а q-мерной (сингулярной) *цепью* пространства X — конечную линейную комбинацию сингулярных симплексов пространства X с целыми коэффициентами; $\sum k_i f_i$, $f_i : T^q \to X$. Множество q-мерных сингулярных цепей пространства X обозначается через $C_q(X)$. Сложение цепей как линейных комбинаций делает $C_q(X)$ группой, так что $C_q(X)$ — свободная абелева группа, порожденная множеством всех q-мерных сингулярных симплексов пространства X. Теперь мы определим *граничный гомоморфизм* $\partial = \partial_q : C_q(X) \to C_{q-1}(X)$. Так как группа $C_q(X)$ свободна, то достаточно определить ∂ на сингулярных симплексах. Для сингулярного симплекса f мы полагаем

$$\partial f = \sum (-1)^i \Gamma_i f,$$

где $\Gamma_i f$ — сужение отображения f на i-ю грань

$$T_i^{q-1} = \{(t_0, \dots, t_q) \in T^q \,|\, t_i = 0\}$$

стандартного симплекса T^q, которая отождествлена с T^{q-1} при помощи соответствия

$$(t_0, \dots, t_{i-1}, 0, t_{i+1} \dots, t_q) \mapsto (t_0, \dots, t_{i-1}, t_{i+1} \dots, t_q).$$

Теорема 12.1. *Композиция*

$$C_{q+1} \xrightarrow{\partial_{q+1}} C_q \xrightarrow{\partial_q} C_{q-1}$$

равна 0*, т.е.* $\operatorname{Im} \partial_{q+1} \subset \operatorname{Ker} \partial_q$.

Доказательство. Пользуемся соотношениями

$$\Gamma_i \Gamma_j f = \begin{cases} \Gamma_{j-1} \Gamma_i f, & \text{при } j > i, \\ \Gamma_j \Gamma_{i+1} f, & \text{при } j \leqslant i. \end{cases}$$

Поэтому

$$\sum_i (-1)^i \sum_j (-1)^j \Gamma_i \Gamma_j f = \sum_{j>i} (-1)^{i+j} \Gamma_{j-1} \Gamma_i f + \sum_{j<i}^{i+j} (-1) \Gamma_i \Gamma_j f + \sum_i (-1)^{2i} \Gamma_i \Gamma_i f =$$

$$= \sum_{j<i} (-1)^{i+j} \Gamma_{i-1} \Gamma_j f + \sum_{j<i}^{i+j} (-1)^{i+j} \Gamma_i \Gamma_j f + \sum_i \Gamma_i \Gamma_i f =$$

$$= 0 + \sum_{i=j+1} (-1)^{i+j} \Gamma_{i-1} \Gamma_j f + \sum_i \Gamma_i \Gamma_i f = -\sum_i \Gamma_i \Gamma_i f + \sum_i \Gamma_i \Gamma_i f = 0.$$

□

Определение 12.2. Обозначим через $Z_q(X) := \operatorname{Ker}\partial_q$ подгруппу *циклов*, а через $B_q(X) := \operatorname{Im}\partial_{q+1}$ — подгруппу *границ*. При $q > 1$ факторгруппа $H_q(X) := Z_q(X)/B_q(X)$ называется *q-й (q-мерной) гомологической группой (группой гомологий) пространства* X. Полагают также $H_0(X) := C_0(X)/\operatorname{Im}\partial_1$ и $H_q(X) = 0$ при $q < 0$. Циклы, разность которых есть граница, называют *гомологичными*; таким образом, элементы группы гомологий — это классы гомологичных циклов, иногда их называют гомологическими классами. Если группа $H_q(X)$ конечно порождена, то ее ранг (т.е. число слагаемых $\mathbb{Z}$ в каноническом разложении $H_q(X) = \mathbb{Z}\oplus\cdots\oplus\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}_{k_1}\oplus\cdots\oplus\mathbb{Z}_{k_m}$) называется *$q$-м числом Бетти пространства* X.

Определение 12.3. (Аугментированным) *цепным комплексом* называется последовательность

$$\cdots \to C_q \xrightarrow{\partial_q} C_{q-1} \to \cdots \to C_1 \xrightarrow{\partial_1} C_0 \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z}$$

абелевых групп, в которой $\partial_q \circ \partial_{q+1} = 0$, $\varepsilon \circ \partial_1 = 0$ и ε — эпиморфизм. Группа $H_q = \operatorname{Ker}\partial_q/\operatorname{Im}\partial_{q+1}$ называется *q-й (q-мерной) гомологической группой комплекса* при $q > 1$; 0-мерная гомологическая группа определяется как $C_0/\operatorname{Im}\partial_1$. Группа $\widetilde{H}_0 = \operatorname{Ker}\varepsilon/\operatorname{Im}\partial_1$ называется *приведенной* 0-мерной гомологической группой.

Класс когомологий элемента α обозначаем $\{\alpha\}$.

Пополним последовательность

$$\cdots \to C_q(X) \xrightarrow{\partial_q} C_{q-1}(X) \to \cdots \to C_0(X)$$

групп цепей топологического пространства X гомоморфизмом

$$\varepsilon : C_0(X) \to \mathbb{Z}, \quad \varepsilon\left(\sum_i k_i f_i\right) = \sum_i k_i.$$

Получается *сингулярный цепной комплекс*, гомологические группы которого совпадают с гомологическими группами пространства X. Приведенные нульмерные гомологии пространства X обозначаются символом $\widetilde{H}_0(X)$; пишут также $\widetilde{H}_q(X) = H_q(X)$ при $q \neq 0$.

Определение 12.4. Пусть даны два цепных комплекса $C' = \{C'_q, \partial'_q, \varepsilon'\}$ и $C'' = \{C''_q, \partial''_q, \varepsilon''\}$. *(Цепным) отображением* комплекса C' в комплекс C'' называется такое семейство гомоморфизмов $\varphi_q : C'_q \to C''_q$, что диаграмма

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & C'_q \arrow[r, "\partial'_q"] \arrow[d, "\varphi_q"] & C'_{q-1} \arrow[r] \arrow[d, "\varphi_{q-1}"] & \cdots \arrow[r] & C'_1 \arrow[r, "\partial'_1"] \arrow[d, "\varphi_1"] & C'_0 \arrow[r, "\varepsilon'"] \arrow[d, "\varphi_0"] & \mathbb{Z} \arrow[d, "\mathrm{Id}"] \\
\cdots \arrow[r] & C''_q \arrow[r, "\partial''_q"] & C''_{q-1} \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & C''_1 \arrow[r, "\partial''_1"] & C''_0 \arrow[r, "\varepsilon''"] & \mathbb{Z}
\end{tikzcd}$$

коммутативна.

Ясно, что цепное отображение индуцирует отображение гомологий

$$\operatorname{Ker}\partial'_q/\operatorname{Im}\partial'_{q+1} \to \operatorname{Ker}\partial''_q/\operatorname{Im}\partial''_{q+1},$$

поскольку $\operatorname{Ker}\partial'_q \to \operatorname{Ker}\partial''_q$ и $\operatorname{Im}\partial'_{q+1} \to \operatorname{Im}\partial''_{q+1}$. Пусть $g : X \to Y$ — непрерывное отображение топологических пространств. Естественно возникают гомоморфизмы $g_\# = g_{\#q} C_q(X) \to C_q(Y)$: сингулярный симплекс $f : T^q \to X$ переходит в сингулярный симплекс $g \circ f : T^q \to Y$. Очевидно, что $\{g_{\#q}\}$ — цепное отображение комплекса

$\{C_q(X), \partial_q\}$ в комплекс $\{C_q(Y), \partial_q\}$; для возникающих отображений в гомологиях употребляется обозначение $g_* = g_{*q} : H_q(X) \to H_q(Y)$. Очевидно, что при этом

$$(h \circ g)_* = h_* \circ g_*,$$
$$(\mathrm{Id}_X)_* = \mathrm{Id}_{H_q(X)}\,.$$

Определение 12.5. Пусть C' и C'' — цепные комплексы, $\varphi = \{\varphi_q : C'_q \to C''_q\}$, $\psi = \{\psi_q : C'_q \to C''_q\}$ — цепные отображения. *Цепной гомотопией*, связывающей φ с ψ называется такая совокупность гомоморфизмов $D_q : C'_q \to C''_{q+1}$, $q \geqslant 0$, $D_{-1} = 0$, что при каждом q

$$D_{q-1} \circ \partial'_q + \partial''_{q+1} \circ D_q = \psi_q - \varphi_q.$$

Если такая гомотопия существует, отображения φ и ψ называют *гомотопными* ($\varphi \sim \psi$).

Теорема 12.6. *Гомотопные отображения индуцируют одинаковые отображения в гомологиях.*

Доказательство. Если $\partial'_q \alpha = 0$, то

$$\psi\alpha - \varphi\alpha = D_{q-1} \circ \partial'_q \alpha + \partial''_{q+1} \circ D_q \alpha = \partial''_{q+1} \circ D_q \alpha \in \operatorname{Im} \partial''_{q+1}.$$

□

Теорема 12.7. *Если $g, h : X \to Y$ — гомотопные отображения топологических пространств, то цепные отображения $g_\#$ и $h_\#$, индуцированные отображениями g и h, цепно гомотопны. В частности, $g_* = h_*$.*

Доказательство. Пусть $H : X \times I \to Y$ — гомотопия, связывающая g с h. Тогда для любого сингулярного симплекса $f : T^q \to X$ определено отображение $H \circ (f \times \mathrm{Id}) : T^q \times I \to Y$. Цилиндр $T^q \times I$ канонически разбивается на симплексы T'_i, $i = 0, \ldots, q$:

$$T'_i = \{(t_0, \ldots, t_q, \tau) \in T^q \times I \mid t_0 + \cdots + t_{i-1} \leqslant \tau \leqslant t_0 + \cdots + t_i\}.$$

Поэтому отображение $H \circ (f \times \mathrm{Id})$ определяет $q+1$ сингулярных симплексов размерности $q+1$. Их сумму с некоторыми знаками мы принимаем за $D_q(f)$. По-другому можно поступить следующим образом. Рассмотрим $T^q \times I$ как подпространство $\mathbb{R}^{q+1} \times \mathbb{R}$. Для точек $v_0, \ldots, v_m$ из $\mathbb{R}^{q+2}$ обозначим через $[v_0, \ldots, v_m]$ линейный сингулярный симплекс, т.е. такое линейное отображение T^m в $\mathbb{R}^{q+2}$, при котором i-я вершина отображается в v_i, $0 \leqslant i \leqslant m$. Определим $(q+1)$-мерную цепь $P\delta_q \in C_{q+1}(T^q \times I)$, где $\delta_q \in C_q(T^q)$ — тождественный сингулярный симплекс, формулой

$$P\delta_q = \sum_{i=0}^{q} (-1)^i [(e_0, 0), \ldots, (e_i, 0), (e_i, 1), \ldots, (e_q, 1)].$$

Зададим $P : C_q(X) \to C_{q+1}(X \times I)$, полагая

$$Pf = (f \times \mathrm{Id})_\# (P\delta_q)$$

для любого сингулярного симплекса $f : T^q \to X$ и продолжая его на всю группу $C_n(X)$ по линейности. Очевидно, что P естественно и

$$\partial_{q+1} P\delta_q + P\partial_q \delta_q =$$
$$= \sum_{i=0}^{q} (-1)^i \partial_{q+1} [(e_0, 0), \ldots, (e_i, 0), (e_i, 1), \ldots, (e_q, 1)] +$$

$$+\sum_{i=0}^{q}(-1)^i P[e_0,\ldots,e_{i-1},e_{i+1},\ldots,e_q]=$$

$$=\sum_{i=0}^{q}(-1)^i\left(\sum_{j=0,j<i}^{q+1}(-1)^j[(e_0,0),\ldots,(e_{j-1},0),(e_{j+1},0),\ldots,(e_i,0),(e_i,1),\ldots,(e_q,1)]+\right.$$

$$+(-1)^i[(e_0,0),\ldots,(e_{i-1},0),(e_i,1),\ldots,(e_q,1)]+$$

$$+(-1)^{i+1}[(e_0,0),\ldots,(e_i,0),(e_{i+1},1),\ldots,(e_q,1)]+$$

$$\left.+\sum_{j=0,j>i+1}^{q+1}(-1)^j[(e_0,0),\ldots,(e_i,0),(e_i,1),\ldots,(e_{j-2},1),(e_j,1),\ldots,(e_q,1)]\right)+$$

$$+\sum_{i=0}^{q}(-1)^i\left(\sum_{j=0,j<i-1}^{q-1}(-1)^j[(e_0,0),\ldots,(e_j,0),(e_j,1),\ldots,(e_{i-1},1),(e_{i+1},1),\ldots,(e_q,1)]+\right.$$

$$+(-1)^{i-1}[(e_0,0),\ldots,(e_{i-1},0),(e_{i-1},1),(e_{i+1},1),\ldots,(e_q,1)]+$$

$$+(-1)^i[(e_0,0),\ldots,(e_{i-1},0),(e_{i+1},0),(e_{i+1},1),\ldots,(e_q,1)]+$$

$$\left.+\sum_{j=0,j>i}^{q-1}(-1)^j[(e_0,0),\ldots,(e_{i-1},0),(e_{i+1},0),\ldots,(e_j,0),(e_{j+1},0),(e_{j+1},1),\ldots,(e_q,1)]\right)=$$

$$=\sum_{i=0}^{q}\sum_{j=0,j<i}^{q+1}(-1)^{i+j}[(e_0,0),\ldots,(e_{j-1},0),(e_{j+1},0),\ldots,(e_i,0),(e_i,1),\ldots,(e_q,1)]+$$

$$+\sum_{i=0}^{q}[(e_0,0),\ldots,(e_{i-1},0),(e_i,1),\ldots,(e_q,1)]+$$

$$-\sum_{i=0}^{q}[(e_0,0),\ldots,(e_i,0),(e_{i+1},1),\ldots,(e_q,1)]+$$

$$+\sum_{i=0}^{q}\sum_{j=0,j>i+1}^{q+1}(-1)^{i+j}[(e_0,0),\ldots,(e_i,0),(e_i,1),\ldots,(e_{j-2},1),(e_j,1),\ldots,(e_q,1)]+$$

$$+\sum_{i=0}^{q}\sum_{j=0,j<i-1}^{q-1}(-1)^{i+j}[(e_0,0),\ldots,(e_j,0),(e_j,1),\ldots,(e_{i-1},1),(e_{i+1},1),\ldots,(e_q,1)]+$$

$$-\sum_{i=0}^{q}[(e_0,0),\ldots,(e_{i-1},0),(e_{i-1},1),(e_{i+1},1),\ldots,(e_q,1)]+$$

$$+\sum_{i=0}^{q}[(e_0,0),\ldots,(e_{i-1},0),(e_{i+1},0),(e_{i+1},1),\ldots,(e_q,1)]+$$

$$+\sum_{i=0}^{q}\sum_{j=0,j>i}^{q-1}(-1)^{i+j}[(e_0,0),\ldots,(e_{i-1},0),(e_{i+1},0),\ldots,(e_j,0),(e_{j+1},0),(e_{j+1},1),\ldots,(e_q,1)]=$$

$$=\sum_{i=0}^{q}\sum_{j=0,j<i}^{q-1}(-1)^{i+j}[(e_0,0),\ldots,(e_{j-1},0),(e_{j+1},0),\ldots,(e_i,0),(e_i,1),\ldots,(e_q,1)]+$$

$$+[(e_0,1),\ldots,(e_q,1)]-[(e_0,0),\ldots,(e_q,0)]+$$

$$+\sum_{i=0}^{q}\sum_{j=0,j>i+1}^{q+1}(-1)^{i+j}[(e_0,0),\ldots,(e_i,0),(e_i,1),\ldots,(e_{j-2},1),(e_j,1),\ldots,(e_q,1)]+$$

$$+\sum_{j=0}^{q}\sum_{i=0,i<j-1}^{q-2}(-1)^{i+j}[(e_0,0),\ldots,(e_i,0),(e_i,1),\ldots,(e_{j-1},1),(e_{j+1},1),\ldots,(e_q,1)]+$$

$$-\sum_{i=1}^{q}[(e_0,0),\ldots,(e_{i-1},0),(e_{i-1},1),(e_{i+1},1),\ldots,(e_q,1)]+$$

$$+\sum_{i=0}^{q-1}[(e_0,0),\ldots,(e_{i-1},0),(e_{i+1},0),(e_{i+1},1),\ldots,(e_q,1)]+$$

$$+\sum_{j=0}^{q}\sum_{i=0,i>j}^{q-1}(-1)^{i+j}[(e_0,0),\ldots,(e_{j-1},0),(e_{j+1},0),\ldots,(e_i,0),(e_{i+1},0),(e_{i+1},1),\ldots,(e_q,1)].$$

Рассмотрим третью и четвертую строки. При $i=0,\ldots,q-2$ и $j=0,\ldots,q$ соответствующий элемент из четвертой строчки имеет противоположный знак и равен по модулю элементу из третьей строки с тем же i и $j'=j+1$. Остаются несокращенными из третьей строки элементы с $i=q-1,q$ и любым j. Из условий на j единственный вариант: $i=q-1$, $j=q+1$. Кроме этого, элементы с $i=0,\ldots,q-2$ и $j=i+2$. Итак, третья и четвертая строки редуцируются до

$$\sum_{i=0}^{q-1}(-1)^{2i+2}[(e_0,0),\ldots,(e_i,0),(e_i,1),(e_{i+2},1),\ldots,(e_q,1)],$$

что сокращается с пятой строкой. Рассмотрим первую и последнюю строки. Элемент с $j=0,\ldots,q-1$ и $i=0,\ldots,q$, $i>j$ (так что $i=1,\ldots,q$) из первой строчки сокращается с элементом с тем же j и $i'=i-1$ из последней строчки, а элементов с $j=q$ в последней строчке фактически нет из-за ограничения. Не могут сократиться лишь элементы из первой строки с $i=j+1$, так как для соответствующих i' не выполняется условие $i'>j$. Итак, первая и последняя строчки редуцируются до

$$\sum_{j=0}^{q-1}(-1)^{j+1+j}[(e_0,0),\ldots,(e_{j-1},0),(e_{j+1},0),(e_{j+1},1),\ldots(e_q,1)],$$

что сокращается с шестой строкой. Остается

$$[(e_0,1),\ldots,(e_q,1)]-[(e_0,0),\ldots,(e_q,0)]=i_{1\#}\delta_q-i_{0\#}\delta_q,$$

где $i_0,i_1:X\to X\times I$ определяются формулами $i_0(x)=(x,0)$, $i_1(x)=(x,1)$, $x\in X$.

Имеем $H\circ i_0=g$, $H\circ i_1=h$. Так что если определить $D_q:C_q(X)\to C_{q+1}(Y)$ как композицию $H_\#\circ P$, то

$$\partial\circ D_q+D_q\circ\partial=\partial\circ H_\#\circ P+H_\#\circ P\circ\partial=H_\#\circ(\partial\circ P+P\circ\partial)=H_\#\circ(i_{1\#}-i_{0\#})=h-g.$$

$\square$

Следствие 12.8. *Гомотопическая эквивалентность индуцирует изоморфизм гомологий.*

Пример 12.9. Пусть pt — одноточечное пространство. При любом q имеется единственный сингулярный симплекс $f_q : T^q \to pt$. Таким образом, $C_q(pt) = \mathbb{Z}$ при всех $q \geqslant 0$. Далее,

$$\partial f_q = \sum_i (-1)^i \Gamma_i f_q = \left[\sum_i (-1)^i \right] f_{q-1},$$

откуда

$$\partial f_q = \begin{cases} 0 & \text{при нечетном } q, \\ f_{q-1} & \text{при четном } q. \end{cases}$$

Следовательно, цепной комплекс имеет вид

$$\dots \xrightarrow{\mathrm{Id}} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \xrightarrow{\mathrm{Id}} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \xrightarrow{\varepsilon=\mathrm{Id}} \mathbb{Z},$$

так что $H_0(pt) = \mathbb{Z}$, $H_q(pt) = 0$ при $q > 0$ (если q нечетно, то $\operatorname{Ker} \partial_q = \operatorname{Im} \partial_{q+1} = \mathbb{Z}$, а если q четно, то $\operatorname{Ker} \partial_q = \operatorname{Im} \partial_{q+1} = 0$). Далее, $\widetilde{H}_0(pt) = 0$ (так что $\widetilde{H}_q(pt) = 0$ при всех q).

Определение 12.10. Пространство, имеющее такие же гомологии как точка, называется *ацикличным.*

Следствие 12.11 (из примера 12.9 и теоремы 12.8)**.** *Всякое стягиваемое пространство ациклично.*

Теорема 12.12. (1) *Если пространство X линейно связно, то $H_0(X) = \mathbb{Z}$.*

(2) *В общем случае $H_0(X)$ — свободная абелева группа, порожденная множеством компонент линейной связности пространства X, т.е. множеством $\pi_0(X)$.*

(3) *Всегда $H_0(X) \cong \widetilde{H}_0(X) \oplus \mathbb{Z}$.*

(4) *Если X_α — множество компонент линейной связности пространства X, то при любом q имеем $H_q(X) = \sum_\alpha H_q(X_\alpha)$.*

Доказательство. Все пункты, кроме первого, очевидны. Докажем первый пункт. Нульмерные сингулярные симплексы полностью определяются точкой (образом), а одномерные сингулярные симплексы — это пути, причем граница пути — конец минус начало. Если пространство X линейно связно, то отсюда следует, что всякая нульмерная цепь $\sum k_i f_i$ (которая всегда является циклом) гомологична цепи $(\sum k_i) f_0$, где f_0 — произвольно фиксированный нульмерный сингулярный симплекс, поскольку $f_i - f_0$ — граница пути, их соединяющего. Из этого видно, что достаточным условием гомологичности $\sum k_i f_i \sim \sum k'_i f'_i$ является равенство $\sum k_i = \sum k'_i$. Это же условие является и необходимым, поскольку у границы сумма коэффициентов равна 0. Таким образом, имеем одно линейное условие, выделяющее границы среди циклов, что дает требуемый результат. □

Задача 136. Если $f : X \to Y$ — непрерывное отображение одного связного пространства в другое, то $f_* : H_0(X) \to H_0(Y)$ — изоморфизм.

Пусть A — подмножество топологического пространства X (иначе говоря, (X, A) — топологическая пара). Тогда $C_q(A) \subset C_q(X)$ и $\partial_q(C_q(A)) \subset C_{q-1}(A)$. Факторгруппа $C_q(X, A) = C_q(X)/C_q(A)$ называется группой *относительных сингулярных цепей пространства X по модулю A;* это — свободная абелева группа, множество образующих которой можно отождествить с множеством таких сингулярных симплексов

$f : T^q \to X$, что $f(T^q) \not\subset A$. Операторы $\partial_q : C_q(X) \to C_{q-1}(X)$ индуцируют операторы $\partial_q : C_q(X, A) \to C_{q-1}(X, A)$, и получаем комплекс

$$\dots C_2(X, A) \xrightarrow{\partial_2} C_1(X, A) \xrightarrow{\partial_1} C_0(X, A) \tag{7}$$

(без аугментации). Соответствующие *относительные гомологические группы* — гомологии этого комплекса — обозначаются через $H_q(X, A)$. Если определить *относительные циклы* как такие цепи пространства X, границы которых лежат в A, а *относительные границы,* как те относительные циклы, которые отличаются от обычных границ на некоторую цепь, лежащую в A, то относительные гомологические группы можно определить как факторгруппы групп относительных циклов по группам относительных границ.

Задача 137. Провести аккуратно это отождествление.

Задача 138. По аналогии с теоремой 12.12 вычислить нулевые относительные гомологии.

Задача 139. Для всякого непустого пространства X имеют место естественные изоморфизмы $\widetilde{H}_q(X) \cong H_q(X, x_0)$, где x_0 — произвольная точка X.

Граница относительного цикла является абсолютным (т.е. обыкновенным) циклом пространства A; сопоставление $\alpha \mapsto \partial_q \alpha$ определяет при каждом q отображение

$$\partial_* : H_q(X, A) \to H_{q-1}(A).$$

Чтобы убедиться, что это действительно корректно заданное отображение гомологий, заметим, что если α — относительная граница, то есть α — такая цепь X, граница которой лежит в A, причем имеется такая цепь β в A, что $\alpha - \beta = \partial\gamma$, то

$$\partial_q \alpha = \partial\partial\gamma + \partial\beta = \partial\beta,$$

то есть $\partial_q \alpha$ — абсолютная граница в A.

Теорема 12.13. *Отображение ∂_* включается в точную последовательность*

$$\dots \to H_q(A) \xrightarrow{i_*} H_q(X) \xrightarrow{j_*} H_q(X, A) \xrightarrow{\partial_*} H_{q-1}(A) \to \dots, \tag{8}$$

гомоморфизмы $i_* : H_q(A) \to H_q(X)$ индуцируются включением $i : A \to X$, а гомоморфизмы $j_* : H_q(X) \to H_q(X, A)$ индуцируются проекциями

$$C_q(X) \to C_q(X)/C_q(A) = C_q(X, A).$$

Определение 12.14. Последовательность (8) называется *точной гомологической последовательностью пары.* Очевидно, что она ведет себя естественно по отношению к отображениям $f : (X, A) \to (Y, B)$ топологических пар, т.е. коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & H_q(A) \arrow[r] \arrow[d, "f_*"] & H_q(X) \arrow[r] \arrow[d, "f_*"] & H_q(X, A) \arrow[r] \arrow[d, "f_*"] & H_{q-1}(A) \arrow[r] \arrow[d, "f_*"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & H_q(B) \arrow[r] & H_q(Y) \arrow[r] & H_q(Y, B) \arrow[r] & H_{q-1}(B) \arrow[r] & \cdots.
\end{tikzcd}$$

Доказательство теоремы 12.13. Проверим точность в члене $H_q(X, A)$ (остальное — в качестве упражнения).

Докажем, что $\operatorname{Im} j_* \subset \operatorname{Ker} \partial_*$. Пусть $\{\alpha\} \in H_q(X)$, $\alpha \in C_q(X)$, тогда $\partial_q \alpha = 0$ и

$$\partial_q j_* \alpha = \partial_q j(\alpha) = \partial_q(\alpha + C_q(A)) = \partial_q(C_q(A)) = B_q(A) = 0 \in H_q(A).$$

Докажем, что $\operatorname{Im} j_* \supset \operatorname{Ker} \partial_*$. Пусть $\{\alpha\} \in \operatorname{Ker} \partial_*$. Тогда $\alpha = \beta + C_q(A)$, $\beta \in C_q(X)$, $\partial_q(\beta) \in \partial C_q(A)$ (а не просто $C_{q-1}(A)$ как было бы в отсутствие требования $\partial_*\{\alpha\} = 0$). Таким образом, $\partial_q(\beta) = \partial_q(\gamma)$, где $\gamma \in C_q(A)$. Значит, $\beta - \gamma \in Z_q(X)$. При этом $j_*(\beta - \gamma) = j_*(\beta)$, так что $j_*\{\beta - \gamma\} = \alpha$. □

Задача 140. Проверить точность в остальных членах.

Задача 141. Установить естественный изоморфизм $H_q(X) \cong H_q(X, \emptyset)$ и коммутативность диаграммы

$$\begin{tikzcd} H_q(X) \arrow[rr, "\cong"] \arrow[dr, "j_*"'] & & H_q(X, \emptyset) \arrow[dl, "k_*"] \\ & H_q(X, A) & \end{tikzcd},$$

где $k : (X, \emptyset) \hookrightarrow (X, A)$ — естественное включение.

Задача 142. Построить гомологическую последовательность тройки (X, A, B)

$$\dots \to H_q(A, B) \to H_q(X, B) \to H_q(X, A) \to H_{q-1}(A, B) \to \dots$$

и установить ее свойства, в частности, вывести из нее гомотопическую инвариантность относительных гомологий.

Теорема 12.15. *Пусть (X, A) — топологическая пара.*

(1) *Если (X, A) — пара Борсука, например, клеточная пара, то при любом q отображение*

$$p_* : H_q(X, A) \to H_q(X/A, a) = \widetilde{H}_q(X/A),$$

где $p : X \to X/A$ — естественная проекция и $a = p(A)$, является изоморфизмом.

(2) *В общем случае включение $X \to X \cup CA$, где $X \cup CA$ получается из X присоединением конуса CA над A, индуцирует изоморфизм*

$$H_q(X, A) \cong H_q(X \cup CA, CA) = H_q(X \cup CA, v) = \widetilde{H}_q(X \cup CA),$$

где через v обозначена вершина конуса CA, а предпоследнее равенство является следствием гомотопической инвариантности относительных гомологий (см. задачу 142) *и стягиваемости конуса CA.*

Для доказательства теоремы нам понадобятся некоторые вспомогательные конструкции и определения.

Барицентрическое подразделение q-мерного симплекса состоит в том, что этот симплекс разбивается на $(q + 1)!$ более мелких q-мерных симплексов. Вершины новых симплексов — это центры тяжести граней исходного симплекса всех размерностей (в том числе — его самого). Множество $\{x_0, x_1, \dots, x_q\}$ этих центров является множеством вершин некоторого симплекса барицентрического подразделения, если соответствующие грани $\Delta_0, \dots, \Delta_q$ можно составить в цепочку последовательно вложенных друг в друга. Второй способ описания барицентрического подразделения по индукции: барицентрическое подразделение нульмерного симплекса совпадает с ним самим (базис индукции). Для q-мерного сначала подвергаются барицентрическому подразделению все его $(q-1)$-мерные грани, а потом над всеми построенными симплексами строятся конусы с вершиной в центре этого симплекса. Третий способ: симплекс Δ — это совокупность точек вида $\sum_i t_i v_i$, где v_i — вершины, $t_i \geqslant 0$, $\sum_i t_i = 1$; симплексы барицентрического подразделения отвечают перестановкам $\tau = (i(0), \ldots, i(q)) \in S_q$ чисел $0, \ldots q$ и состоят из точек $\sum_i t_i v_i$ с $t_{i(0)} \leqslant t_{i(1)} \leqslant \ldots \leqslant \tau_{i(q)}$.

Барицентрическое подразделение βf *сингулярного симплекса* $f : T^q \to X$ определяется как сингулярная цепь

$$\sum_{\tau \in S_q} (-1)^\tau f_\tau,$$

где суммирование распространяется на все перестановки τ множества вершин симплекса T^q, а f_τ обозначает сужение отображения f на q-мерный симплекс барицентрического подразделения, отвечающий перестановке τ и отождествляемый с T^q путем сопоставления вершине симплекса барицентрического подразделения, являющейся центром некоторой i-мерной грани симплекса T^q, переходит при отождествлении в i-ю вершину симплекса T^q.

Задача 143. Гомеоморфизм, при помощи которого производится указанное отождествление, сохраняет или обращает ориентацию в зависимости от четности перестановки τ.

Продолжим β на цепи по линейности.

Лемма 12.16. *$\beta\partial = \partial\beta$; таким образом, β индуцирует отображение $\beta_* : H_q(X) \to H_q(X)$.*

Доказательство. Достаточно проверить на симплексе. В силу задачи 143 внутренние грани входят с противоположными знаками и сокращаются. ☐

Задача 144. Проверить детали доказательства.

Лемма 12.17. *Отображение β_* тождественно: $\beta_* = \mathrm{Id}_{H_q(X)}$. Более того, существует цепная гомотопия D, связывающая цепное отображение β с тождественным отображением и такая, что образы сингулярных симплексов, входящих в цепь Df, содержатся в образе сингулярного симплекса f.*

Доказательство. Построим специальную триангуляцию цилиндра $T^q \times I$. При $q = 0$ — это отрезок, далее 2 индуктивно следующим образом. Триангулируем дно $T^q \times 0$ цилиндра $T^q \times I$ естественным образом (с одним q-мерным симплексом), а стенки $T_i^{q-1} \times I$ — в соответствии с уже построенной триангуляцией $T^{q-1} \times I$ (важно, что эта триангуляция симметрична: она выдерживает аффинные автоморфизмы симплекса T^{q-1}, как угодно переставляющие его вершины). После этого триангулируем весь цилиндр, разбив его на конусы, основаниями которых служат симплексы построенной триангуляции дна и стенок, а вершина находится в центре верхнего основания $T^q \times 1$. Теперь для сингулярного симплекса $f : T^q \to X$ определим $Df \in C_{q+1}(X)$ как сумму с коэффициентами ± 1 сужений сквозного отображения

$$T^q \times I \overset{\text{проекция}}{\longrightarrow} T^q \xrightarrow{f} X$$

на $(q+1)$-мерные симплексы построенной триангуляции цилиндра $T^q \times I$. Возникающие отображения

$$D : C_q(X) \to C_{q+1}(X), \qquad D\sum_i k_i f_i = \sum_i k_i D f_i$$

составляют гомотопию, связывающую β с тождественным отображением. Эта гомотопия удовлетворяет требованиям леммы. Детали доказательства, в том числе и точное описание выбора знаков, осуществляется как в предыдущей теореме и оставляется в качестве упражнения. $\square$

Задача 145. Разобрать детали доказательства.

Лемма 12.18. *Пусть $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}$ — конечное открытое покрытие пространства X. Обозначим через $C_q^{\mathcal{U}}(X)$ подгруппу группы q-мерных сингулярных цепей пространства X, порожденную такими сингулярными симплексами $f : T^q \to X$, что $f(T^q) \subset U_\alpha$ при некотором α. Очевидно, $\partial(C_q^{\mathcal{U}}(X)) \subset C_{q-1}^{\mathcal{U}}(X)$, так что $\{C_q^{\mathcal{U}}(X), \partial_q\}$ — подкомплекс комплекса $\{C_q(X), \partial_q\}$. Тогда включение комплекса $\{C_q^{\mathcal{U}}(X), \partial_q\}$ в комплекс $\{C_q(X), \partial_q\}$ индуцирует изоморфизм гомологий.*

Доказательство. Мы должны доказать, что (a) всякий цикл из $C_q(X)$ гомологичен циклу из $C_q^{\mathcal{U}}(X)$ и что (b) если цикл, лежащий в $C_q^{\mathcal{U}}(X)$, является границей некоторой цепи из $C_{q+1}(X)$, то он является границей цепи из $C_{q+1}^{\mathcal{U}}(X)$. Оба факта очевидным образом выводятся из следующих трех утверждений:

(1) для любой q-мерной цепи c цепь $\beta^n c$ с достаточно большим n содержится в $C_q^{\mathcal{U}}(X)$ (очевидно);

(2) циклы c и $\beta^n c$ гомологичны при любом n (лемма 12.17);

(3) если c — цикл из $C_q^{\mathcal{U}}(X)$, то разность $c - \beta^n c$ является границей цепи из $C_{q+1}^{\mathcal{U}}(X)$ (вторая часть леммы 12.17). $\square$

Доказательство теоремы 12.15. Первая часть теоремы является следствием второй части, ввиду гомотопической инвариантности гомологий и того факта, что для любой пары Борсука (X, A) проекция $X \cup CA \to (X \cup CA)/CA = X/A$ является гомотопической эквивалентностью.

Рассмотрим покрытие $\mathcal{U}$ пространства $X \cup CA$, составленное из открытой части $C_0 A = (X \cup CA) \setminus X$ конуса CA и множества $X \cup \overline{C}A$, где $\overline{C}A$ — нижняя половина конуса CA. Из относительного варианта леммы 12.18, который является следствием абсолютного варианта и леммы о пяти гомоморфизмах, вытекает, что гомологии пары $(X \cup CA, CA)$ можно вычислять при помощи цепей

$$C_q^{\mathcal{U}}(X \cup CA, CA) = C_q^{\mathcal{U}}(X \cup CA)/C_q^{\mathcal{U}}(CA)$$

(покрытие конуса CA, индуцированное покрытием $\mathcal{U}$, мы снова обозначаем через $\mathcal{U}$). Но, очевидно,

$$C_q^{\mathcal{U}}(X \cup CA)/C_q^{\mathcal{U}}(CA) = C_q(X \cup \overline{C}A)/C_q(\overline{C}A) = C_q(X \cup \overline{C}A, \overline{C}A),$$

откуда

$$H_q(X \cup CA, CA) = H_q(X \cup \overline{C}A, \overline{C}A) = H_q(X, A)$$

— последнее равенство вытекает из гомотопической инвариантности гомологий. $\square$

Задача 146. Пусть $\mathcal{S}$ — некоторое множество сингулярных симплексов пространства X, включающее вместе с каждым сингулярным симплексом все его грани. Для произвольного сингулярного симплекса $f : T^q \to X$ его *исправлением* называется пара, составленная из гомотопии $f_t : T^Q \to X$ и триангуляции τ стандартного симплекса T^q, таких, что $f_0 = f$ и сужение отображения f_1 на любой симплекс триангуляции τ принадлежит $\mathcal{S}$. Очевидно, исправление сингулярного симплекса индуцирует исправление всех его граней. Множество $\mathcal{S}$ называется *достаточным,* если выполняется следующее условие. Пусть f — сингулярный симплекс, для всех граней которого заданы исправления, согласованные в их пересечениях (т.е. в гранях граней); тогда существует исправление сингулярного симплекса f, согласованное с заданными исправлениями граней. Докажите, что если множество $\mathcal{S}$ достаточно, то подкомплекс сингулярного цепного комплекса пространства X, порожденный симплексами из $\mathcal{S}$, имеет такие же гомологии, как весь комплекс (точнее, включение подкомплекса в комплекс индуцирует изоморфизм в гомологиях). Неформально говоря, гомологии пространства X можно вычислять, пользуясь только сингулярными симплексами из $\mathcal{S}$.

Задача 147. Если $\mathcal{U}$ — открытое покрытие пространства X, то сингулярные симплексы, заключенные в элементы покрытия, составляют достаточное множество.

Задача 148. Если X — область евклидова пространства (или произвольное гладкое многообразие), то гладкие сингулярные симплексы составляют достаточное множество.

Задача 149. Пусть X — область евклидова пространства. Докажите, что достаточное множество составляют аффинные сингулярные симплексы (аффинные отображения стандартных симплексов в X).

Задача 150. Пусть X — триангулированное подмножество евклидова пространства, или полиэдр. Рассмотрим множество $\mathcal{S}$ сингулярных симплексов, симплициально отображающих стандартные симплексы на симплексы триангуляции (симплициальное отображение евклидова симплекса на евклидов симплекс есть, по определению, аффинное отображение, переводящее вершины в вершины). Докажите, что множество $\mathcal{S}$ достаточно.

13. Вычисление гомологий клеточных пространств

13.1. **Гомологии сфер. Изоморфизм надстройки.**

Теорема 13.1. *Если $n > 0$, то*

$$H_i(S^n) = \begin{cases} \mathbb{Z} \text{ при } i = 0, n, \\ 0 \text{ при } i \neq 0, n. \end{cases}$$

При $n = 0$: $H_0(S^0) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$, $H_i(S^0) = 0$ при $i > 0$.

Иными словами, в приведенных гомологиях при всех $n \geqslant 0$

$$\widetilde{H}_i(S^n) = \begin{cases} \mathbb{Z} \text{ при } i = n, \\ 0 \text{ при } i \neq n. \end{cases}$$

Доказательство. Рассмотрим точную последовательность тройки (D^n, S^{n-1}, pt) и отождествим гомологии относительно точки с приведенными гомологиями, а также применим результаты предыдущего параграфа:

$$\begin{array}{ccccccc} \widetilde{H}_i(D^n) & \to & H_i(D^n, S^{n-1}) & \to & \widetilde{H}_{i-1}(S^{n-1}) & \to & \widetilde{H}_{i-1}(D^n). \\ || & & || & & & & || \\ 0 & & \widetilde{H}_i(S^n) & & & & 0 \end{array}$$

Получаем, что $\widetilde{H}_i(S^n) = \widetilde{H}_{i-1}S^{n-1}$ (этот изоморфизм будет обобщен в следующей теореме). Таким образом, вычисление свелось к известным гомологиям S^0. □

Теорема 13.2 (изоморфизм надстройки)**.** *Для любого топологического пространства X и любого i*

$$\widetilde{H}_i(\Sigma X) = \widetilde{H}_{i-1}(X),$$

где Σ — надстройка.

Доказательство. Рассмотрим приведенную гомологическую последовательность пары (CX, X), где CX — конус над пространством X, а X отождествляется с его основанием (это — всегда пара Борсука):

$$\begin{array}{ccccccc} \widetilde{H}_i(CX) & \to & H_i(CX, X) & \to & \widetilde{H}_{i-1}(X) & \to & \widetilde{H}_{i-1}(CX). \\ || & & || & & & & || \\ 0 & & \widetilde{H}_i(CX/X) & & & & 0 \end{array}$$

Осталось заметить, что $CX/X = \Sigma X$. □

Задача 151. Теорема 13.2 уточняется следующим образом. Пусть $f : T^{i-1} \to X$ — сингулярный симплекс пространства X. Сквозное отображение

$$T^i = CT^{i-1} \xrightarrow{Cf} CX \overset{\text{проекция}}{\longrightarrow} \Sigma X$$

представляет собой сингулярный симплекс пространства ΣX, обозначаемый через Σf. Докажите, что отображения

$$\Sigma : C_{i-1}(X) \to C_i(\Sigma X), \qquad \sum_i k_i f_i \mapsto \sum_i k_i(\Sigma f_i),$$

перестановочны с ∂ и определяют изоморфизм $H_{i-1}(X) \to H_i(\Sigma X)$, совпадающий с изоморфизмом, построенным в доказательстве теоремы 13.2. Этот изоморфизм называется изоморфизмом надстройки и обозначается снова через Σ.

Задача 152. Пользуясь предыдущим упражнением, постройте сингулярные циклы, представляющие гомологии сфер.

Задача 153. Докажите, что гомеоморфизм $T^i \to D^i$ является относительным сингулярным циклом пары (D^i, S^{i-1}), задающим образующую группы $H_i(D^i, S^{i-1}) = \mathbb{Z}$.

Задача 154. Постройте относительный вариант изоморфизма Σ и докажите естественность изоморфизма Σ по отношению к отображениям ∂ и f_*.

13.2. **Гомологии букетов.**

Теорема 13.3. *Если (X_α, x_α), $\alpha \in A$, — пространства с отмеченными точками, являющиеся парами Борсука, то при любом i*

$$\widetilde{H}_i\left(\vee_{\alpha\in A} X_\alpha\right) = \oplus_{\alpha\in A}\widetilde{H}_i(X_\alpha),$$

где $\vee$ — букет.

Доказательство. Букет — факторпространство несвязной суммы по объединению отмеченных точек. $\square$

Следствие 13.4. *Пусть A — произвольное множество, S^n_α $(\alpha \in A)$ — копии стандартной n-мерной сферы. Тогда*

$$\widetilde{H}_i\left(\vee_{\alpha\in A} S^n_\alpha\right) = \begin{cases} \oplus_{\alpha\in A}\mathbb{Z}_{(\alpha)} \text{ при } i = n, \\ 0 \text{ при } i \neq n. \end{cases}$$

($\oplus_{\alpha\in A}\mathbb{Z}_{(\alpha)}$ — свободная абелева группа, порожденная множеством A).

Замечание 13.5. С другой стороны, эта теорема вытекает из теоремы 13.2, поскольку букет $\vee_{\alpha\in A} S^n_\alpha$ гомотопически эквивалентен надстройке $\Sigma\left(\vee_{\alpha\in A} S^{n-1}_\alpha\right)$ (даже гомеоморфен этой надстройке, если надстройку понимать в модифицированном смысле, учитывающем отмеченную точку; для такой надстройки справедлив аналог теоремы 13.2), а для букета нульмерных сфер (базиса индукции) утверждение верно.

13.3. **Отображения букетов сфер.** Напомним, что непрерывное отображение сферы в себя $S^n \to S^n$ имеет степень — целое число, характеризующее его гомотопический класс (алгебраическое число прообразов). Непрерывное отображение

$$g : \vee_{\alpha\in A} S^n_\alpha \to \vee_{\beta\in B} S^n_\beta$$

имеет целую "матрицу" степеней $\|d_{\alpha\beta}\|$, $\alpha \in A$, $\beta \in B$, где число $d_{\alpha\beta}$ — степень отображения

$$S^n \xrightarrow{i_\alpha} \vee_{\alpha\in A} S^n_\alpha \xrightarrow{g} \vee_{\beta\in B} S^n_\beta \xrightarrow{p_\beta} S^n,$$

где i_α — тождественное отображение сферы S^n на S^n_α, а p_β — отображение, тождественно отображающее сферу S^n_β на S^n и отображающее остальные сферы букета в точку.

Задача 155. Характеризуют ли степени $d_{\alpha\beta}$ гомотопический класс отображения g?

Теорема 13.6. *Матрица отображения*

$$\begin{array}{cccc} g_* : & H_n\left(\vee_{\alpha\in A} S^n_\alpha\right) & \to & H_n\left(\vee_{\beta\in B} S^n_\beta\right) \\ & \| & & \| \\ & \oplus_\alpha \mathbb{Z}_{(\alpha)} & & \oplus_\beta \mathbb{Z}_{(\beta)} \end{array}$$

совпадает с $\|d_{\alpha\beta}\|$. В частности, отображение

$$\begin{array}{cccc} f_* : & H_n\left(S^n\right) & \to & H_n\left(S^n\right), \\ & \| & & \| \\ & \mathbb{Z} & & \mathbb{Z} \end{array}$$

индуцируемое отображением $f : S^n \to S^n$ степени d, есть умножение на d.

Доказательство. Надстройка $\Sigma f : S^{n+1} \to S^{n+1}$ над отображением $f : S^n \to S^n$ степени d тоже имеет степень d. Поэтому, ввиду естественности гомологических гомоморфизмов по отношению к Σ, доказательство утверждения теоремы при некотором n влечет за собой его доказательство при всех больших n. С другой стороны, при $n = 0$ утверждение очевидно. Таким образом, теорема доказана для отображений, являющихся надстройками над отображениями S^0, в том числе i_α и p_β. Так что i_α и p_β индуцируют, соответственно, вложение и проекцию

$$\mathbb{Z} = \mathbb{Z}_{(\alpha)} \subset \oplus_\alpha \mathbb{Z}_{(\alpha)}, \qquad \oplus_\beta \mathbb{Z}_{(\beta)} \to \mathbb{Z}_{(\beta)} = \mathbb{Z}.$$

Следовательно, утверждение теоремы достаточно проверить для всех композиций $p_\beta \circ g \circ i_\alpha$, т.е. доказать его для отображений $S^n \to S^n$. В качестве (представителя) отображения $S^n \to S^n$ степени d можно выбрать композицию двух отображений: отображения f_1 на букет d сфер (так что каждая точка, кроме отмеченной, имеет ровно один прообраз) и отображения f_2 указанного букета на сферу (так что каждая сфера букета отображается тождественно). Композиция отображения $f_1 : S^n \to S^n \vee \dots \vee S^n$ с любым отображением $p_\beta : S^n \vee \dots \vee S^n \to S^n$ гомотопна тождественному отображению и индуцирует в n-мерных гомологиях отображение $\mathrm{Id} : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$; поэтому

$$f_{1*} : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}, \qquad f_{1*}(1) = (1, \dots, 1).$$

Далее, композиция любого отображения $i_\alpha : S^n \to S^n \vee \dots \vee S^n$ с $f_2 : S^n \vee \dots \vee S^n \to S^n$ тоже гомотопна тождественному отображению, и потому

$$f_{2*} : \mathbb{Z} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, \qquad f_{2*}(a_1, \dots, a_d) = a_1 + \dots + a_d.$$

Следовательно,

$$f_*(1) = f_{2*} \circ f_{1*}(1) = f_{2*}(1, \dots, 1) = d.$$

Теорема доказана. $\square$

13.4. **Клеточный комплекс.** Пусть X — клеточное пространство, $\mathrm{sk}_n X = X^n$, $(n = 0, 1, 2, \dots)$ — его остовы.

Лемма 13.7. *Группа $H_i(X^q, X^{q-1})$ равна 0 при $i \neq q$ и является свободной абелевой группой, порожденной множеством q-мерных клеток пространства X, при $i = q$.*

Доказательство. $H_i(X^q, X^{q-1}) = \widetilde{H}_i(X^q/X^{q-1}) = \widetilde{H}_i(\vee S^q)$. $\square$

Группа $\mathcal{C}_q(X) := H_q(X^q, X^{q-1})$ называется группой q-мерных *клеточных* цепей пространства X. *Клеточный дифференциал* $\partial = \partial_q : \mathcal{C}_q(X) \to \mathcal{C}_{q-1}(X)$ определяется как гомоморфизм

$$\begin{array}{cccc} \partial_q : & H_q(X^q, X^{q-1}) & \to & H_{q-1}(X^{q-1}, X^{q-2}) \\ & \| & & \| \\ & \mathcal{C}_q(X) & & \mathcal{C}_{q-1}(X) \end{array}$$

из гомологической последовательности тройки (X^q, X^{q-1}, X^{q-2}). По определению $\partial \circ \partial = 0$ и получаем *клеточный комплекс*

$$\dots \xrightarrow{\partial} \mathcal{C}_q(X) \xrightarrow{\partial} \dots \xrightarrow{\partial} \mathcal{C}_1(X) \xrightarrow{\partial} \mathcal{C}_0(X) \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z},$$

где $\varepsilon : \mathcal{C}_0(X) = H_0(X^0) \to \mathbb{Z}$ определяется, как для сингулярных цепей.

Изоморфизм между группой $\mathcal{C}_q(X)$ и указанной свободной абелевой группой зависит от выбора гомеоморфизма $X^q/X^{q-1} \approx \vee S^q$ (разные гомеоморфизмы не гомотопны). Этот гомеоморфизм канонически строится, если для q-мерных клеток σ_i

фиксированы характеристические отображения $f_i : D^q \to X$: отображение f_i определяет гомеоморфизм

$$\overline{f}_i : S^q = D^q/D^{q-1} \to \overline{\sigma}_i/\partial\sigma_i \subset X^q/X^{q-1}.$$

Предполагать, что характеристические отображения фиксированы, неудобно: обычно мы знаем только, что они существуют. На самом деле фиксировать нужно не характеристические отображения, а ориентации клеток (в предположении, что они занумерованы). Мы скажем, что два характеристических отображения, $f_i : D^q \to X$ и $f_i' : D^q \to X$, *определяют одну и ту же ориентацию* клетки σ_i, если сквозной гомеоморфизм

$$S^q \xrightarrow{\overline{f}_i} \overline{\sigma}_i/\partial\sigma_i \xrightarrow{(\overline{f}_i')^{-1}} S^q$$

имеет степень 1 (гомотопен тождественному); другая возможность состоит в том, что этот гомеоморфизм имеет степень -1, и в этом случае говорят, что f_i и f_i' *определяют разные ориентации*. В этом смысле каждая клетка имеет две ориентации, и выбор ориентаций у всех q-мерных клеток доставляет определенный изоморфизм между группой $\mathcal{C}_q(X)$ и группой линейных комбинаций $\sum k_i\sigma_i$. (Удобно считать, что в этой записи σ_i — ориентированные клетки и перемена ориентации у клетки σ_i равносильна перемене знака $\sigma_i \to -\sigma_i$. В случае $q = 0$ характеристическое отображение единственно, и никакого произвола в выборе изоморфизма нет.

Рассмотрим дифференциал $\partial : \mathcal{C}_q(X) \to \mathcal{C}_{q-1}(X)$. Пусть σ и τ — соответственно q-мерная и $(q-1)$-мерная клетки пространства X, а $f : D^q \to X$ и $g : D^{q-1} \to X$ — характеристические отображения. Рассмотрим композицию

$$S^{q-1} \xrightarrow{f|_{S^{q-1}}} X^{q-1} \xrightarrow{\text{проекция}} X^{q-1}/(X^{q-2} \cup (\text{все } (q-1)-\text{мерные клетки, кроме } \tau)) =$$

$$= \overline{\tau}/\partial\tau \xrightarrow{\overline{g}^{-1}} S^{q-1}.$$

Степень этого отображения — целое число — называется *коэффициентом инцидентности между σ и τ* и обозначается через $[\sigma : \tau]$.

Задача 156. Число $[\sigma : \tau]$ зависит только от ориентаций клеток σ и τ, при перемене любой из этих ориентаций число $[\sigma : \tau]$ меняет знак.

Заметим, что если σ и τ не пересекаются, то, очевидно, $[\sigma : \tau] = 0$. Поэтому при данном σ коэффициент $[\sigma : \tau]$ может быть отличен от нуля лишь для конечного числа τ.

Теорема 13.8. $\partial\left(\sum_i k_i\sigma_i\right) = \sum_i k_i \left(\sum_j [\sigma_i : \tau_j]\tau_j\right)$, *где $\{\sigma_i\}$ — некоторые q-мерные, а $\{\tau_j\}$ — все $(q-1)$-мерные клетки пространства X.*

Доказательство. Мы должны показать, что τ входит в $\partial\sigma$ с коэффициентом $[\sigma;\tau]$. Рассмотрим отображение $(D^q, S^{q-1}, \emptyset) \to (X^q, X^{q-1}, X^{q-2})$, определяемое характеристическим отображением $f : D^q \to X$ клетки σ. Возникает диаграмма

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{Z} = H_q(D^q, S^{q-1}) \arrow[rr, "\partial_*"] \arrow[d, "\alpha"] & & \widetilde{H}_{q-1}(S^{q-1}) = \mathbb{Z} \arrow[d, "\beta"] & \\
\widetilde{H}_q(X^q/X^{q-1}) \arrow[r, equal] & H_q(X^q, X^{q-1}) \arrow[r, "\partial_*"] \arrow[d, equal] & H_{q-1}(X^{q-1}, X^{q-2}) \arrow[r, equal] \arrow[d, equal] & \widetilde{H}_{q-1}(X^{q-1}/X^{q-2}) \\
& \mathcal{C}_q(X) \arrow[r, "\partial"] & \mathcal{C}_{q-1}(X) &
\end{tikzcd}$$

(α и β — гомоморфизмы, индуцируемые f). Ясно, что $\alpha(1) = \sigma \in \mathcal{C}_q(X)$, и потому $\partial\sigma = \beta(\partial_*(1)) = \beta(1)$. Но в силу теоремы об отображении букетов образ элемента $1 \in \widetilde{H}_{q-1}(S^{q-1})$ при сквозном отображении

$$\begin{aligned}\widetilde{H}_{q-1}(S^{q-1}) \xrightarrow{\beta} H_{q-1}(X^{q-1}, X^{q-2}) = \widetilde{H}_{q-1}(X^{q-1}/X^{q-2}) = \\ = \widetilde{H}_{q-1}(\vee_j S^{q-1}_{(j)}) = \oplus_j \widetilde{H}_{q-1}(S^{q-1}_{(j)})\end{aligned}$$

в слагаемом $\widetilde{H}_{q-1}(S^{q-1}_j) = \mathbb{Z}$, отвечающем клетке τ, есть в точности степень соответствующего отображения $S^{q-1} \to S^{q-1}$, т.е. $[\sigma : \tau]$. $\square$

13.5. **Гомологии клеточного комплекса.** Обозначим временно гомологии клеточного комплекса через $\mathcal{H}_q(X)$.

Теорема 13.9. *Гомологии клеточного комплекса клеточного пространства X канонически изоморфны сингулярным гомологиями пространства X.*

Доказательство. **1:** $\mathcal{H}_q(X) \cong H_q(X^{q+1}, X^{q-2})$ (остовы с отрицательными номерами считаются пустыми). Рассмотрим диаграмму

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C}_{q+1}(X) \arrow[d, equal] & H_q(X^{q-1}, X^{q-2}) \arrow[r, equal] \arrow[d] & 0 & \\
H_{q+1}(X^{q+1}, X^q) \arrow[r, "\partial_*"] \arrow[dr, "\partial_{q+1}"'] & H_q(X^q, X^{q-2}) \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\beta"] & H_q(X^{q+1}, X^{q-2}) \arrow[r] & H_q(X^{q+1}, X^q) \arrow[d, equal] \\
& H_q(X^q, X^{q-1}) \arrow[r, equal] \arrow[d, "\partial_q"] & \mathcal{C}_q(X) & 0 \\
& H_{q-1}(X^{q-1}, X^{q-2}) \arrow[r, equal] & \mathcal{C}_{q-1}(X), &
\end{tikzcd}$$

в которой строка есть отрезок точной гомологической последовательности тройки (X^{q+1}, X^q, X^{q-2}), а столбец — отрезок гомологической последовательности тройки (X^q, X^{q-1}, X^{q-2}) (равенства нулю вытекают из леммы 13.7). Из точности последовательностей и тривиальности групп $H_q(X^{q-1}, X^{q-2})$, $H_q(X^{q+1}, X^q)$, следует, что β — мономорфизм, а α — эпиморфизм. Следовательно,

$$\begin{aligned} H_q(X^{q+1}, X^{q-2}) &= H_q(X^q, X^{q-2})/\operatorname{Ker}\alpha = H_q(X^q, X^{q-2})/\operatorname{Im}\partial_* = \\ &= \beta H_q(X^q, X^{q-2})/\beta(\operatorname{Im}\partial_*) = \operatorname{Im}\beta/(\operatorname{Im}(\beta\circ\partial_*)). \end{aligned}$$

В силу коммутативности диаграммы $\beta \circ \partial_* = \partial_{q+1}$, а в силу точности вертикальной последовательности $\operatorname{Im}\beta = \operatorname{Ker}\partial_q$. Таким образом, последняя факторгруппа равна $\operatorname{Ker}\partial_q / \operatorname{Im}\partial_{q+1}$, что и требуется В случае $q = 0$ ситуация даже проще:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C}_1(X) \arrow[d, equal] & 0 \arrow[d] & & \\
H_1(X^1, X^0) \arrow[r, "\partial_*"] \arrow[dr, "\partial_1"'] & H_0(X^0) \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\beta"] & H_0(X^1) \arrow[r] & H_0(X^1, X^0) \arrow[d, equal] \\
& H_0(X^0) \arrow[r, equal] \arrow[d, "\partial_0"] & \mathcal{C}_0(X) & 0 \\
& 0 & &
\end{tikzcd}$$

2: $H_q(X^{q+1}, X^{q-2}) = H_q(X^{q+1})$. Точные гомологические последовательности троек (X^{q+1}, X^i, X^{i-1}), $i = q-2, q-3, \ldots, 1, 0$,

$$0 = H_q(X^i, X^{i-1}) \to H_q(X^{q+1}, X^{i-1}) \xrightarrow{\cong} H_q(X^{q+1}, X^i) \to H_{q-1}(X^i, X^{i-1}) = 0,$$

дают:

$$H_q(X^{q+1}, X^{q-2}) \cong H_q(X^{q+1}, X^{q-3}) \cong \ldots \cong H_q(X^{q+1}, X^0) \cong H_q(X^{q+1}).$$

3: $H_q(X^{q+1}) \cong H_q(X)$. Гомологические последовательности пар (X^i, X^{i-1}) при $i = q+2, q+3, \ldots$

$$0 = H_{q+1}(X^i, X^{i-1}) \to H_q(X^{i-1}) \xrightarrow{\cong} H_q(X^i) \to H_q(X^i, X^{i-1}) = 0$$

дают: $H_q(X^{q+1}) \cong H_q(X^{q+2}) \cong \ldots$. Если $\dim X < \infty$, то все доказано. Если X бесконечномерно, то требуется дополнительное замечание: поскольку стандартный симплекс компактен, то объединение образов всех симплексов цепи — компактное подмножество в X. По задаче 82 оно содержится в конечном подкомплексе. Поэтому вопрос для конкретной цепи решается на конечном шаге. □

Следствие 13.10. *Если число q-мерных клеток клеточного пространства X равно n, то группа $H_q(X)$ порождается не более, чем n образующими; в частности, $b_q(X^q) \leqslant n$, где b_q обозначает q-е число Бетти. Например, если у X вовсе нет q-мерных клеток, то $H_q(X) = 0$; в частности, если $\dim X = m$, то $H_q(X) = 0$ при $q > m$.*

Далее было объяснено, что такое классический комплекс и как считать гомологии проективных пространств (электронный вариант второй части лекции временно отсутствует).

14. Гомологии н гомотопии

Поскольку сфероиды — тоже циклы, гомотопные сфероиды — гомологичные циклы, то имеется естественное отображение гомотопических групп в гомологии, называемое *гомоморфизмом Гуревича.*

14.1. **Гомологии н слабые гомотопические эквивалентности.**

Лемма 14.1. *Пусть X — топологическое пространство и $\alpha \in H_q(X)$. Тогда существуют такие клеточное пространство Y, класс гомологий $\beta \in H_q(Y)$ и непрерывное отображение $f: Y \to X$, что $f_*(\beta) = \alpha$.*

Доказательство. Пусть $\sum_{i=1}^{N} k_i f_i$ — сингулярный цикл, представляющий класс α. Рассмотрим сумму N копий стандартного симплекса: $T = \sqcup_{i=1}^{N} T_i^q$. Произведем в T следующее отождествление. Пусть Γ_1 и Γ_2 — грани одной размерности $r \leqslant q$ симплексов $T_{i_1}^q$ и $T_{i_2}^q$; вершины граней Γ_1 и Γ_2 упорядочены (порядок наследуется от вершин симплексов $T_{i_1}^q$ и $T_{i_2}^q$), и это порождает канонический аффинный гомеоморфизм $\Gamma_1 \approx \Gamma_2$. Мы отождествляем (поточечно) $\Gamma_1 \subset T_{i_1}^q \subset T$ с $\Gamma_1 \subset T_{i_2}^q \subset T$, если $f_{i_1}|_{\Gamma_1} \equiv f_{i_2}|_{\Gamma_2}$. При отождествлении из T получается клеточное пространство (так как если отображения совпадают на открытой части симплекса, то и на всем симплексе), которое мы принимаем за Y. Отображения $f_i : T_i^q \to X$ корректно определяют непрерывное отображение $f: Y \to X$. Обозначим через F_i сквозное отображение

$$T^q = T_i^q \overset{\text{вложение}}{\longrightarrow} T \overset{\text{проекция}}{\longrightarrow} Y.$$

Ясно, что $\sum_i k_i F_i$ — сингулярный цикл пространства Y, и что отображение f переводит F_i в f_i и $\sum_i k_i F_i$ — в $\sum_i k_i f_i$. Таким образом, если $\beta \in H_q(Y)$ — гомологический класс цикла $\sum_i k_i F_i$, то $f_*(\beta) = \alpha$. □

Относительный вариант:

Лемма 14.2. *Пусть (X, A) — топологическая пара, причем A замкнуто, и $\alpha \in H_q(X, A)$. Тогда существуют такие клеточная пара (Y, B), класс гомологий $\beta \in H_q(Y, B)$ и непрерывное отображение $f: (Y, B) \to (X, A)$, что $f_*(\beta) = \alpha$.*

Доказательство. Пусть $\sum_{i=1}^{N} k_i f_i$ — относительный сингулярный цикл, представляющий класс α. Рассмотрим сумму N копий стандартного симплекса: $T = \sqcup_{i=1}^{N} T_i^q$. Произведем в T следующее отождествление. Пусть Γ_1 и Γ_2 — грани одной размерности $r \leqslant q$ симплексов $T_{i_1}^q$ и $T_{i_2}^q$; вершины граней Γ_1 и Γ_2 упорядочены (порядок наследуется от вершин симплексов $T_{i_1}^q$ и $T_{i_2}^q$), и это порождает канонический аффинный гомеоморфизм $\Gamma_1 \approx \Gamma_2$. Мы отождествляем (поточечно) $\Gamma_1 \subset T_{i_1}^q \subset T$ с $\Gamma_1 \subset T_{i_2}^q \subset T$, если $f_{i_1}|_{\Gamma_1} \equiv f_{i_2}|_{\Gamma_2}$. При отождествлении из T получается клеточное пространство (так как если отображения совпадают на открытой части симплекса, то и на всем симплексе), которое мы принимаем за Y. Отображения $f_i : T_i^q \to X$ корректно определяют непрерывное отображение $f : Y \to X$. Обозначим через F_i сквозное отображение

$$T^q = T_i^q \overset{\text{вложение}}{\longrightarrow} T \overset{\text{проекция}}{\longrightarrow} Y.$$

В качестве B мы берем объединение клеток, отображающихся в A при f. В силу замкнутости A это — подкомплекс. Ясно, что $\sum_i k_i F_i$ — относительный сингулярный цикл пространства Y, и что если $\beta \in H_q(Y, B)$ — гомологический класс цикла $\sum_i k_i F_i$, то $f_*(\beta) = \alpha$. □

Теорема 14.3. *Если $f : X_1 \to X_2$ — слабая гомотопическая эквивалентность, то $f_* : H_q(X_1) \to H_q(X_2)$ — изоморфизм при всех q.*

Это означает, в силу теоремы 11.17, что если отображение $f : X_1 \to X_2$ индуцирует изоморфизм в гомотопических группах, то оно индуцирует изоморфизм и в гомологических группах.

Доказательство. Напомним, что отображение $f : X_1 \to X_2$ называется слабой гомотопической эквивалентностью, если для любого клеточного пространства Y отображение $f_* : \pi(Y, X_1) \to \pi(Y, X_2)$ является взаимно однозначным соответствием.

Эпиморфность отображения $f_* : H_q(X_1) \to H_q(X_2)$ следует из леммы: если $\alpha \in H_q(X_2)$, то найдется клеточное пространство Y, гомологический класс $\beta \in H_q(Y)$ и отображение $g : Y \to X_2$, такие, что $g_*(\beta) = \alpha$. Далее, так как f — слабая гомотопическая эквивалентность, существует такое отображение $h : Y \to X_1$, что $f \circ h \sim g$. Полагая $\gamma = g_*(\beta) \in H_q(X_1)$, имеем: $f_*(\gamma) = (f \circ h)_*(\beta) = g_*(\beta) = \alpha$.

В доказательстве мономорфности используется относительный вариант леммы. Ввиду гомотопической инвариантности гомологий можно считать, что f — вложение, т.е. что (X_2, X_1) — топологическая пара, причем X_1 замкнуто (при необходимости можно заменить X_2 цилиндром отображения f, а f — вложением пространства X_1 в цилиндр в качестве верхнего основания). Если $\alpha \in H_q(X_1)$ и $f_*(\alpha) = 0$, то существует $\beta \in H_{q+1}(X_2, X_1)$ с $\partial_*(\beta) = \alpha$ (точность последовательности пары). В силу относительной леммы существует клеточная пара (Y, B), гомологический класс $\gamma \in H_{q+1}(Y, B)$ и отображение $g : (Y, B) \to (X_2, X_1)$, такие, что $g_*(\gamma) = \beta$. Наконец, так как f — слабая гомотопическая эквивалентность, то существует отображение $h : Y \to X_1$, такое, что $h|_B = g|_B$ (см. теорему 11.17). Получаем:

$$\alpha = \partial_*(\beta) = \partial_* \circ g_*(\gamma) = (g|_B)_* \circ \partial_*(\gamma) h_* \circ j_* \circ \partial_*(\gamma) = 0,$$

где j — включение B в Y, а $j_* \circ \partial_* = 0$ в силу точности гомологической последовательности пары (Y, B). □

Задача 157. Покажите, что пространства S^2 и $\mathbb{C}P^\infty \times S^3$ имеют одинаковые гомотопические группы, но разные гомологические группы. То же для пространств $S^m \times \mathbb{R}P^n$ и $S^n \times \mathbb{R}P^m$ с $m \neq n$, $m \neq 1$, $n \neq 1$.

Задача 158. Покажите, что пространства $S^1 \vee S^1 \vee S^2$ и $S^1 \times S^1$ имеют одинаковые гомологические группы, но разные гомотопические группы.

Задача 159. Покажите, что хопфовское отображение $S^3 \to S^2$ индуцирует тривиальный гомоморфизм в приведенных гомологиях, но индуцирует нетривиальный гомоморфизм в гомотопических группах.

Задача 160. Покажите, что проекция $S^1 \times S^1 \to (S^1 \times S^1)/(S^1 \vee S^1) = S^2$ индуцирует тривиальный гомоморфизм в гомотопических группах, но индуцирует нетривиальный гомоморфизм в гомологиях (в том числе в приведенных).

14.2. **Теорема Гуревича.** Пусть X — топологическое пространство с отмеченной точкой x_0. Обозначим через s_n каноническую образующую группы $H_n(S^n) = \mathbb{Z}$, $n = 1, 2, \ldots$. Для любого $\varphi \in \pi_n(X, x_0)$ положим

$$h(\varphi) = f_*(s_n),$$

где $f : S^n \to X$ — произвольный сфероид класса φ. Очевидно, что $h(\varphi)$ не зависит от выбора f. Ясно также, что сопоставление $\varphi \mapsto h(\varphi)$ определяет гомоморфизм

$$h : \pi_n(X, x_0) \to H_n(X);$$

этот гомоморфизм называется *гомоморфизмом Гуревича*; он естествен по отношению к непрерывным отображениям пунктированных пространств.

Задача 161. Докажите, что диаграмма

$$\begin{tikzcd} \pi_n(X,x_0) \arrow[rr, "s_\#"] \arrow[dr, "h"'] & & \pi_n(X,x_0) \arrow[dl, "h"] \\ & H_n(X) & \end{tikzcd}$$

коммутативна для любого пути s, соединяющего точки x_0 и x_1.

Теорема 14.4 (Гуревич). *Пусть*

$$\pi_0(X,x_0) = \pi_1(X,x_1) = \cdots = \pi_{n-1}(X,x_0) = 0, \qquad n \geqslant 2.$$

Тогда $H_1(X) = \cdots = H_{n-1}(X) = 0$ *и* $h : \pi_n(X,x_0) \to H_n(X,x_0)$ *является изоморфизмом.*

Доказательство. Согласно теореме 11.20 существует клеточное пространство, слабо гомотопически эквивалентное X; поскольку гомотопии и гомологии слабо гомотопически инвариантны, мы можем считать, что само X было клеточным. Далее, как было показано в теореме 6.19, пространство X гомотопически эквивалентно клеточному пространству с единственной вершиной и без клеток размерностей $1, 2, \ldots, n-1$. Уже из этого видно, что $H_1(X) = \cdots = H_{n-1}(X) = 0$ (см. следствие 13.10), а $H_n(X) = \mathcal{C}_n(X)/\operatorname{Im}\partial_{n+1}$ не отличается от $\pi_n(X)$ в силу теоремы 11.14. □

Следствие 14.5 (обратная теорема Гуревича). *Если пространство X связно и односвязно, а $H_2(X) = \cdots = H_{n-1}(X) = 0$, то $\pi_2(X) = \cdots = \pi_{n-1}(X) = 0$ и $h : \pi_n(X) \to H_n(X)$ является изоморфизмом.*

Следствие 14.6. *Односвязное клеточное пространство с тривиальными гомологиями размерностей $\geqslant 2$ стягиваемо.*

Доказательство. По обратной теореме Гуревича X имеет тривиальные гомотопические группы, а значит, по теореме Уайтхеда 11.18, стягиваемо. □

Задача 162. Односвязное клеточное пространство, имеющее такие же гомологии, как сфера, гомотопически эквивалентно сфере (примените теорему Уайтхеда к сфероиду $S^n \to X$, представляющему образующую группы $\pi_n(X) = \mathbb{Z}$). То же верно для букетов сфер.

Задача 163. Композиция

$$S^1 \times S^1 \times S^1 \xrightarrow{\text{проекция}} (S^1 \times S^1 \times S^1)/\operatorname{sk}_2(S^1 \times S^1 \times S^1) = S^3 \xrightarrow{\text{Хопф}} S^2$$

индуцирует тривиальное отображение как в гомотопических, так и в гомологических группах, но не гомотопно постоянному отображению.

Задача 164. То же для отображения

$$S^{2n-2} \times S^3 \xrightarrow{\text{проекция}} (S^{2n-2} \times S^3)/(S^{2n-2} \vee S^3) = S^{2n+1} \xrightarrow{\text{Хопф}} \mathbb{C}P^n.$$

14.3. **Случай** $n = 1$**.**

Теорема 14.7 (Пуанкаре)**.** *Для любого связного пространства X гомоморфизм Гуревича $h : \pi_1(X) \to H_1(X)$ является эпиморфизмом, ядром которого служит коммутант $[\pi_1(X), \pi_1(X)]$ группы $\pi_1(X)$. Таким образом,*

$$H_1(X) \cong \pi_1(X)/[\pi_1(X), \pi_1(X)],$$

где коммутант $[G, G]$ группы G — ее подгруппа, порожденная всевозможными коммутаторами $[g_1, g_2] = g_1 g_2 g_1^{-1} g_2^{-1}$, $g_1, g_2 \in G$. Группа $G/[G, G]$ получается из G коммутированием, т.е. наложением дополнительных соотношений: все образующие коммутируют между собой.

Доказательство. Достаточно сопоставить процедуры вычисления фундаментальной группы и одномерной гомологической группы, как было сделано на заключительном этапе теоремы Гуревича. □

Задача 165. Покажите, что петля $f : S^1 \to X$ тогда и только тогда определяет элемент ядра отображения $h : \pi_1(X) \to H_1(X)$ ("гомологична нулю"), когда она продолжается до непрерывного отображения диска с ручками в X, ограниченного окружностью S^1; более того, минимальное число этих ручек равно минимальному числу коммутаторов, произведение которых равно представляемому f элементу группы $\pi_1(X)$.

14.4. **Относительный вариант теоремы Гуревича.** Определим относительный гомоморфизм Гуревича $h : \pi_n(X, A) \to H_n(X, A)$ аналогично абсолютному: если $f : (D^n, S^{n-1})$ — относительный сфероид, представляющий класс $\varphi \in \pi_n(X, A)$, то $h(\varphi) \in H_n(X, A)$ определяется как образ канонической образующей группы $H_n(D^n, S^{n-1}) = \mathbb{Z}$ при гомоморфизме $f_* : H_n(D^n, S^{n-1}) \to H_n(X, A)$.

Теорема 14.8. *Пусть (X, A) — топологическая пара, причем пространства X и A связны и односвязны и $\pi_2(X, A) = 0$.*

(1) *Предположим, что*

$$\pi_3(X, A) = \cdots = \pi_{n-1}(X, A) = 0, \qquad n \geqslant 3.$$

Тогда

$$H_1(X, A) = H_2(X, A) = \cdots = H_{n-1}(X, A) = 0$$

и $h : \pi_n(X, A) \to H_n(X, A)$ является изоморфизмом.

(2) *Предположим, что*

$$H_3(X, A) = \cdots = H_{n-1}(X, A) = 0.$$

Тогда

$$\pi_3(X, A) = \cdots = \pi_{n-1}(X, A) = 0$$

и $h : \pi_n(X, A) \to H_n(X, A)$ является изоморфизмом.

Доказательство. Модифицируем абсолютный случай. Во-первых, нужно построить клеточную аппроксимацию пары (X, A). Для этого мы строим по отдельности клеточные аппроксимации пространств X и A: (Y, f) и (B, g); затем мы находим отображение $h : B \to Y$, делающее коммутативной диаграмму

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "h"] \arrow[d, "g"'] & Y \arrow[d, "f"] \\ A \arrow[r, "\text{включение}"] & X \end{tikzcd}$$

(существование h очевидным образом выводится из свойств клеточной аппроксимации). После этого h превращается во вложение при помощи перехода к цилиндру отображения, и мы получаем клеточную пару (Y, B), гомотопические и гомологические группы которой не отличаются от соответствующих групп пары (X, A) (это следует из слабой гомотопической инвариантности гомотопий и гомологий и леммы о пяти гомоморфизмах, примененной к гомотопическим и гомологическим последовательностям пар (X, A) и (Y, B)). Далее используется теорема о том, что m-связная клеточная пара гомотопически эквивалентна клеточной паре (Y', B'), у которой $B' \supset \mathrm{sk}_m(Y')$ (упражнение 18 к § 5), и клеточное описание первой нетривиальной гомотопической группы клеточной пары (упражнение 2 к § 11). □

Теорема 14.9 (Уайтхеда). *Пусть $f : X \to Y$ — непрерывное отображение односвязных топологических пространств, индуцирующее эпиморфизм $\pi_2(X) \to \pi_2(Y)$.*

(1) *Если гомоморфизм*
$$f_* : \pi_q(X) \to \pi_q(Y)$$
является изоморфизмом при $q < n$ и эпиморфизмом при $q = n$, то то же верно для
$$f_* : H_q(X) \to H_q(Y).$$

(2) *Если гомоморфизм*
$$f_* : H_q(X) \to H_q(Y)$$
является изоморфизмом при $q < n$ и эпиморфизмом при $q = n$, то то же верно для
$$f_* : \pi_q(X) \to \pi_q(Y).$$

Доказательство. Можно считать, что f — вложение, т.е. что (Y, X) — пара. Точность гомотопической последовательности этой пары показывает, что условие “ $f_* : \pi_q(X) \to \pi_q(Y)$ есть изоморфизм при $q < n$ и эпиморфизм при $q = n$"равносильно условию “$\pi_q(Y, X) = 0$ при $q < n$ "; аналогичное верно для гомологий. Таким образом, теорема Уайтхеда является прямым следствием относительной теоремы Гуревича. □

Следствие 14.10. *Если отображение f односвязного топологического пространства X в односвязное топологическое пространство Y индуцирует эпиморфизм $\pi_2(X) \to \pi_2(Y)$ и изоморфизм $H_q(X) \cong H_q(Y)$ при всех q, то f — слабая гомотопическая эквивалентность.*

Список литературы

[1] Мищенко А. С., Фоменко А. Т. Курс дифференциальной геометрии и топологии. — М.: Факториал Пресс, 2000.
[2] Постников М. М. Лекции по алгебраической топологии. Основы теории гомотопий. — М.: Наука, 1984.
[3] Постников М. М. Лекции по алгебраической топологии. Теория гомотопий клеточных пространств. — М.: Наука, 1985.
[4] Рохлин В. А., Фукс Д. Б. Начальный курс топологии. Геометрические главы. — М.: Наука, 1977.
[5] Свитцер Р. М. Алгебраическая топология – гомотопии и гомологии. — М.: Наука, 1985.
[6] Спеньер Э. Алгебраическая топология. — М.: Мир, 1971.
[7] Фоменко А. Т., Фукс Д. Б. Курс гомотопической топологии. — М.: Наука, 1989.

Предметный указатель