

ВВЕДЕНИЕ В АЛГЕБРАИЧЕСКУЮ ТОПОЛОГИЮ

(конспект лекций спецкурса А. С. Мищенко и
Е. В. Троицкого 2012/13 уч.года)

Рабочая версия по состоянию на 19 декабря 2012 г..

По осеннему семестру = окончательная версия

По состоянию на 19 декабря 2012 г. изложение в основном следует весьма близко книге Фоменко и Фукса [7]. Отличия сводятся, в основном, к исключению второстепенных или слишком сложных фрагментов, восполнению некоторых опущенных кусков доказательств и неточностей. Из прочей литературы рекомендуются в первую очередь книги Спеньера [6], Рохлина и Фукса [4], Свитцера [5], Постникова [2, 3].

СОДЕРЖАНИЕ

Часть 1. Осенний семестр	2
1. Предварительные сведения и обозначения	2
2. Геометрические конструкции топологических пространств	10
3. Гомотопии, эквивалентности, классы	13
4. H - и H' -пространства, групповые структуры	16
5. Фундаментальная группа	20
6. Клеточные пространства	21
7. Накрытия	27
8. Клеточные пространства и фундаментальная группа	31
9. Гомотопические группы	33
10. Расслоения	37
11. Теорема о надстройке и гомотопические группы сфер	43
12. Сингулярные гомологии	53
Часть 2. Весенний семестр	63
13. Вычисление гомологий клеточных пространств	63
13.1. Гомологии сфер. Изоморфизм надстройки.	63
13.2. Гомологии букетов.	65
13.3. Отображения букетов сфер.	65
13.4. Клеточный комплекс	66
13.5. Гомологии клеточного комплекса	68
14. Гомологии и гомотопии	69
14.1. Гомологии и слабые гомотопические эквивалентности	70
14.2. Теорема Гуревича	71
14.3. Случай $n = 1$	73
14.4. Относительный вариант теоремы Гуревича	73
15. Теория препятствий	75
16. Когомологии клеточных пространств: связь с $K(\pi, n)$	77
17. Две теоремы Хопфа	78

18.	Когомологические операции	79
19.	Спектральная последовательность, связанная с фильтрацией	84
20.	Спектральная последовательность расслоения	87
20.1.	Случай гомологически простого расслоения	88
20.2.	Локальные системы коэффициентов и случай непростого расслоения	89
20.3.	Гомологии пространства петель	90
20.4.	Трансгрессия	92
20.5.	Последовательность Серра	92
20.6.	Мультипликативная структура	92
21.	Квадраты Стинрода	93
22.	Соотношения Адема	96
	Список литературы	97
	Предметный указатель	98

Часть 1. Осенний семестр

1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ И ОБОЗНАЧЕНИЯ

На первой лекции в сжатой форме был представлен следующий материал из стандартных курсов дифференциальной геометрии и топологии, анализа и функционального анализа.

Определение 1.1. *Метрикой* ρ на множестве X называется отображение $\rho : X \times X \rightarrow [0, \infty)$, удовлетворяющее аксиомам:

- (1) $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y \quad \forall x, y \in X$ (аксиома тождества);
- (2) $\rho(x, y) = \rho(y, x) \quad \forall x, y \in X$ (аксиома симметрии);
- (3) $\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z) \quad \forall x, y, z \in X$ (аксиома треугольника).

Пара (X, ρ) называется *метрическим пространством*. Подпространство $Y \subset X$ автоматически является метрическим пространством.

Диаметром Y называется $\text{diam } Y := \sup_{x, y \in Y} \rho(x, y)$. Множество с конечным диаметром называется *ограниченным*. *Шаровой окрестностью* называется

$$B_\varepsilon(x) := \{y \in X \mid \rho(y, x) < \varepsilon\}.$$

Расстояние от $Y \subset X$ до $Z \subset X$ — $\rho(Y, Z) := \inf_{y \in Y, z \in Z} \rho(y, z)$.

Если $\rho(y, Y) = 0$, то y — *точка прикосновения* Y . *Замыканием* Y называется $\bar{Y} := \{\text{множество точек прикосновения } Y\}$. Очевидно, что $Y \subset \bar{Y}$. Множество Y называется *замкнутым*, если $Y = \bar{Y}$. Точка x называется *внутренней точкой* Y , если существует $\varepsilon > 0$ такое, что $B_\varepsilon(x) \subset Y$ (в частности, $x \in Y$). *Внутренностью* Y называется совокупность $\text{Int } Y \subset Y$ его внутренних точек. Множество Y называется *открытым*, если $Y = \text{Int } Y$.

Задача 1. Пусть X — метрическое пространство. Тогда $Y \subset X$ открыто тогда и только тогда, когда $X \setminus Y$ замкнуто.

Теорема 1.2. Пусть X — метрическое пространство. Тогда

- 1 О: X открыто;
- 2 О: \emptyset открыто;

3 О: объединение $\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$ любого набора открытых подмножеств $U_\alpha \subset X$ открыто;

4 О: пересечение $\bigcap_{i=1}^k U_i$ конечного набора открытых подмножеств $U_i \subset X$ открыто;

1 З: \emptyset замкнуто;

2 З: X замкнуто;

3 З: пересечение $\bigcap_{\alpha \in A} F_\alpha$ любого набора замкнутых подмножеств $F_\alpha \subset X$ замкнуто;

4 З: объединение $\bigcup_{i=1}^k F_i$ конечного набора замкнутых подмножеств $F_i \subset X$ замкнуто;

Доказательство. В силу предыдущей задачи $k \text{ О} \Rightarrow k \text{ З} \forall k$. Свойства 1 О и 2 О очевидны. Докажем 3 О. Пусть $U = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$ и $x \in U$. Тогда найдется такое α , что $x \in U_\alpha$ и $B_\varepsilon(x) \subset U_\alpha$. Тогда $B_\varepsilon(x) \subset U_\alpha \subset U$.

Докажем 4 О. Пусть $U = \bigcap_{i=1}^k U_i$, $x \in U$. Тогда имеется набор ε_i ($i = 1, \dots, k$) таких, что $x \in B_{\varepsilon_i}(x) \subset U_i$. Пусть $\varepsilon := \min\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k\}$. Тогда $B_\varepsilon(x) \subset B_{\varepsilon_i}(x) \subset U_i \forall i$. Значит, $B_\varepsilon(x) \subset U$. \square

Задача 2. Показать, что от конечности нельзя отказаться.

Задача 3. Доказать, что $B_\varepsilon(x)$ открыто.

Задача 4. Доказать, что $\text{Int } Y$ открыто.

Задача 5. Доказать, что \bar{Y} замкнуто.

Определение 1.3. Топологией на множестве X называется система его подмножеств τ (эти подмножества называются *открытыми*), удовлетворяющая следующим аксиомам:

1): $X \in \tau$;

2): $\emptyset \in \tau$;

3): если $U_\alpha \in \tau \forall \alpha \in A$, то $\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha \in \tau$;

4): если $U_1, \dots, U_k \in \tau$, то $\bigcap_{i=1}^k U_i \in \tau$.

Пара (X, τ) называется *топологическим пространством*. Множество вида $F = X \setminus U$, где $U \in \tau$, называется *замкнутым*.

Задача 6. Проверить для замкнутых множеств свойства 1 З – 4 З.

Пример 1.4. Метрическое пространство является топологическим.

Задача 7. Привести пример топологического пространства (X, τ) , не связанного ни с какой метрикой (говорят: топология не метризуема).

Определение 1.5. *Окрестностью* точки $x \in X$ (подмножества $Y \subset X$) называется любое открытое множество ее (его) содержащее. *Точка прикосновения* $Y \subset X$ —

такая точка $x \in X$, что любая ее окрестность имеет непустое пересечение с Y . *Замыкание* Y — это множество \bar{Y} всех точек прикосновения Y (так что $Y \subset \bar{Y}$). Точка $x \in Y$ называется *внутренней* точкой Y , если найдется такая окрестность U точки x , что $x \in U \subset Y$. Совокупность всех внутренних точек Y называется *внутренностью* Y и обозначается $\text{Int } Y$.

Задача 8. $Y \subset X$ замкнуто тогда и только тогда, когда $Y = \bar{Y}$.

Задача 9. \bar{Y} замкнуто.

Определение 1.6. Пусть $Y \subset X$, (X, τ) — топологическое пространство. Топология $\tau_1 := \{U \cap Y \mid U \in \tau\}$ называется топологией, *индуцированной* τ на Y .

Задача 10. Проверить для τ_1 аксиомы топологии.

Задача 11. Пусть (X, ρ_X) — метрическое пространство. Тогда топологию на $Y \subset X$ можно ввести двумя способами:

- 1) ρ_X порождает τ_X , которая индуцирует τ_1 ,
 - 2) ρ_X при ограничении на Y дает ρ_Y , которая порождает τ_{ρ_Y} .
- Доказать, что $\tau_1 = \tau_{\rho_Y}$.

Определение 1.7. Подмножество $Y \subset X$ называется (*всюду*) *плотным*, если $\bar{Y} = X$.

Задача 12. Пусть $Y_1 \subset X$ и $Y_2 \subset X$ — открытые плотные подмножества. Тогда $Y = Y_1 \cap Y_2$ — открытое плотное подмножество.

Определение 1.8. Отображение $f : X \rightarrow Y$ топологических пространств называется *непрерывным в точке* $x_0 \in X$, если для любой окрестности образа $V(f(x_0))$ существует такая окрестность $U(x_0)$, что $f(U(x_0)) \subset V(f(x_0))$. Отображение, непрерывное в каждой точке, называется *непрерывным*.

Теорема 1.9. *Следующие условия эквивалентны:*

- (1) $f : X \rightarrow Y$ непрерывно;
- (2) для любого открытого $V \subset Y$ прообраз $f^{-1}(V)$ открыт в X ;
- (3) для любого замкнутого $F \subset Y$ прообраз $f^{-1}(F)$ замкнут в X .

Доказательство. Поскольку $f^{-1}(Y \setminus V) = f^{-1}(Y) \setminus f^{-1}(V) = X \setminus f^{-1}(V)$, то условия 2 и 3 эквивалентны.

Пусть теперь f непрерывно, $V \subset Y$ — открытое множество. Тогда либо прообраз V пуст, и, тем самым, открыт, либо содержит некоторую точку $x: f(x) \in V$. Тогда по определению для любой такой точки найдется такая окрестность $U(x)$, что $f(U(x)) \subset V$, т. е. $U(x) \subset f^{-1}(V)$. Таким образом, каждая точка $f^{-1}(V)$ — внутренняя.

Обратно, пусть выполнено условие 2. Тогда для $V = V(f(x_0))$ в качестве искомого U можно взять $U = f^{-1}(V)$. \square

Задача 13. Пусть $X = F_1 \cup F_2$, где F_1 и F_2 — замкнутые, $f : X \rightarrow Y$. Тогда f непрерывно тогда и только тогда, когда $f|_{F_1} : F_1 \rightarrow Y$ и $f|_{F_2} : F_2 \rightarrow Y$ непрерывны.

Задача 14. Пусть $f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$ — непрерывные функции, сходящиеся к f равномерно на X . Тогда f непрерывная.

Задача 15. Пусть X и Y — метрические пространства. Доказать, что $f : X \rightarrow Y$ непрерывна в точке x_0 в смысле отображений соответствующих топологических пространств тогда и только тогда, когда для любой последовательности $\{x_n\}$ с $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ имеем $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x_0)$.

Определение 1.10. Отображение $f : X \rightarrow Y$ называется *гомеоморфизмом*, если

- (1) f — биекция;
- (2) f и f^{-1} непрерывны.

Гомеоморфность будем обозначать значком \approx .

Задача 16. Привести пример биективного непрерывного отображения, не являющегося гомеоморфизмом.

Определение 1.11. *Базой топологии τ* называется такая система открытых множеств \mathcal{B} , что любое τ -открытое множество представляется в виде их объединения.

Задача 17. Какие условия надо наложить на произвольную систему подмножеств \mathcal{B}_1 , чтобы в результате взятия их произвольных объединений получить некоторую топологию?

Определение 1.12. Пусть (X, τ_X) и (Y, τ_Y) — топологические пространства. Рассмотрим в $X \times Y$ следующую базу топологии:

$$\mathcal{B} := \{V \times W \mid V \in \tau_X, W \in \tau_Y\}.$$

Полученное топологическое пространство называется *декартовым произведением X и Y* .

Задача 18. Проверить (с использованием предыдущей задачи), что $X \times Y$ действительно топологическое пространство.

Задача 19. Доказать, что $X \times Y$ и $Y \times X$ гомеоморфны.

Задача 20. Доказать, что $(X \times Y) \times Z$ и $X \times (Y \times Z)$ гомеоморфны.

Задача 21. Пусть (X, ρ_X) и (Y, ρ_Y) — метрические пространства. Определим на $X \times Y$ следующие расстояния:

$$\rho_{\max}((x_1, y_1), (x_2, y_2)) := \max\{\rho_X(x_1, x_2), \rho_Y(y_1, y_2)\},$$

$$\rho_2((x_1, y_1), (x_2, y_2)) := \sqrt{\rho_X^2(x_1, x_2) + \rho_Y^2(y_1, y_2)},$$

$$\rho_+((x_1, y_1), (x_2, y_2)) := \rho_X(x_1, x_2) + \rho_Y(y_1, y_2).$$

Доказать:

- 1) Что это метрики.
- 2) Что соответствующие топологии на $X \times Y$ совпадают.

Задача 22. Доказать, что подмножества прямой (a, b) , $[a, b)$ и $[a, b]$ не гомеоморфны.

Определение 1.13. Топологическое пространство X называется *несвязным*, если выполнено одно из следующих (очевидно, эквивалентных) условий:

- Пространство X представляется в виде объединения двух непересекающихся непустых открытых множеств.

- Пространство X имеет непустое подмножество A , не совпадающее с X и являющееся одновременно открытым и замкнутым.
- Пространство X представляется в виде объединения двух непересекающихся непустых одновременно открытых и замкнутых множеств.

В противном случае X называется *связным*.

Определение 1.14. Пространство X называется *линейно связным*, если для любых двух точек $x_0, x_1 \in X$ существует непрерывное отображение (*путь*) $f : [0, 1] \rightarrow X$, $f(0) = x_0$, $f(1) = x_1$.

Задача 23. Отрезок $[a, b] \subset \mathbb{R}$ связан и линейно связан.

Теорема 1.15. Пусть $X = \bigcup_{\alpha} X_{\alpha}$, каждое X_{α} связно, а $\bigcap_{\alpha} X_{\alpha} \neq \emptyset$. Тогда X связно.

Доказательство. Пусть X несвязно, $X = A \cup B$, $A \cap B = \emptyset$, A и B — непустые открыто-замкнутые. Тогда каждое $X_{\alpha} = (X_{\alpha} \cap A) \cup (X_{\alpha} \cap B)$. По определению индуцированной топологии эти множества открыто-замкнуты в X_{α} . Поскольку X_{α} связно, то одно из них пусто. Значит, каждое из X_{α} целиком содержится либо в A , либо в B , которые не пересекаются. При этом, так как A и B непусты, а X равно объединению X_{α} , то хотя бы по одному из X_{α} содержится в каждом из A и B . Значит, $\bigcap_{\alpha} X_{\alpha} = \emptyset$. Противоречие. \square

Теорема 1.16. Пусть в топологическом пространстве X для любых двух точек x и y имеется связное подпространство P_{xy} , их содержащее. Тогда X связно.

Доказательство. Пусть X несвязно, $X = A \cup B$, $A \cap B = \emptyset$, A и B — непустые открыто-замкнутые. Тогда найдутся $a \in A$, $b \in B$ и соответствующее P_{ab} . Тогда $P_{ab} = (P_{ab} \cap A) \cup (P_{ab} \cap B)$. Эти множества открыто-замкнуты в P_{ab} и непусты (первое содержит a , второе — b). Противоречие со связностью P_{ab} . \square

Задача 24. Образ связного пространства при непрерывном отображении связан.

Теорема 1.17. *Линейно связное пространство связно.*

Доказательство. По предыдущей задаче $f([0, 1])$ связно, где $f = f_{x_0, x_1}$ — из определения линейной связности. Положив $P_{x_0, x_1} := f([0, 1])$, можем воспользоваться теоремой 1.16. \square

Задача 25. Привести пример связного, но не линейно связного пространства.

Определение 1.18. Топологическое пространство называется *хаусдорфовым*, если для любых $x, y \in X$, $x \neq y$, найдутся такие окрестности $U(x)$ и $U(y)$, что $U(x) \cap U(y) = \emptyset$.

Задача 26. Привести пример нехаусдорфова топологического пространства.

Задача 27. Доказать, что декартово произведение хаусдорфовых пространств хаусдорфово.

Задача 28. Доказать, что в хаусдорфовом пространстве каждая точка замкнута.

Определение 1.19. Топологическое пространство X называется *нормальным*, если оно хаусдорфово и для любых двух непересекающихся замкнутых множеств F_1 и F_2 существуют непересекающиеся окрестности $U_1 \supset F_1$ и $U_2 \supset F_2$.

Задача 29. Всякое метрическое пространство нормально.

Определение 1.20. Покрытие $\{V_\beta\}_{\beta \in B}$ *измельчает* (является более мелким, чем) $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$, если для всякого β найдется такое $\alpha = \alpha(\beta)$, что $V_\beta \subset U_\alpha$.

Теорема 1.21. Пусть X — нормальное топологическое пространство, $\{U_i\}_{i=1}^N$ — конечное открытое покрытие. Тогда существует более мелкое покрытие вида $V_i, \bar{V}_i \subset U_i$.

Доказательство. Рассмотрим замкнутые множества

$$F_1 = \left(X \setminus \bigcup_{i=2}^N U_i \right) \subset U_1, \quad \tilde{F}_1 = X \setminus U_1,$$

и соответствующие в силу нормальности окрестности

$$V_1 \supset F_1, \quad \tilde{V}_1 \supset \tilde{F}_1, \quad V_1 \cap \tilde{V}_1 = \emptyset.$$

Тогда, поскольку каждая точка \tilde{F}_1 имеет не пересекающуюся с V_1 окрестность \tilde{V}_1 и, таким образом, не может быть точкой прикосновения V_1 ,

$$\bar{V}_1 \cap \tilde{F}_1 = \emptyset, \quad V_1 \subset \bar{V}_1 \subset (X \setminus \tilde{F}_1) = U_1$$

и (V_1, U_2, \dots, U_N) — покрытие. Далее, заменяем U_2 на V_2 и т. д. □

Задача 30. Пусть $f : X \rightarrow X$ — непрерывное отображение хаусдорфова пространства. Доказать, что множество неподвижных точек $F_f := \{x \in X \mid f(x) = x\}$ замкнуто.

Задача 31. Доказать, что X хаусдорфово тогда и только тогда, когда диагональ $\Delta := \{(x, y) \mid x = y\} \subset X \times X$ замкнута в $X \times X$.

Лемма 1.22. (Урысона) Пусть X — нормальное топологическое пространство, F_0 и F_1 — замкнутые непересекающиеся множества. Тогда существует такая непрерывная функция $f : X \rightarrow [0, 1]$, что $f|_{F_0} = 0$, $f|_{F_1} = 1$.

Доказательство. Из нормальности следует, что для любого замкнутого F и его окрестности U , $F \subset U$ найдется другая окрестность V , такая, что $F \subset V \subset \bar{V} \subset U$, что будем обозначать $V \Subset U$ (см. доказательство теоремы 1.21).

Определим V_q для двоично-рациональных q индукцией по степени знаменателя (т. е. сначала для 0 и 1, потом для $1/2$, потом для $1/4$ и $3/4$, потом для $1/8$, $3/8$, $5/8$, $7/8$ и так далее). Положим V_0 и V_1 равными тем непересекающимся открытым множествам, содержащим F_0 и F_1 , которые существуют по определению нормальности. Пусть, по предположению индукции, V_q определены до 2^k в знаменателе q . Рассмотрим

$$F := \overline{V_{\frac{i}{2^k}}}, \quad U := V_{\frac{i+1}{2^k}},$$

тогда положим $V_{\frac{2i+1}{2^{k+1}}} := V$, фигурирующем для F и U в рассуждении из начала доказательства.

Полученные V_q являются открытыми по построению, причем

- (1) $F_0 \subset V_0$,
- (2) $V_1 \Subset (X \setminus F_1)$,
- (3) если $q_1 < q_2$, то $V_{q_1} \Subset V_{q_2}$.

Определим для любого $s \in [0, 1]$: $V_s := \bigcup_{q \leq s} V_q$. Тогда V_s открыто для любого s (как объединение открытых) и удовлетворяет 1 – 3. Действительно, 1 и 2 очевидны, а 3 следует из того, что между любыми двумя числами можно найти два двоично-рациональных.

Теперь определим функцию $f : X \rightarrow [0, 1]$, положив $f|_{F_0} = 0$ и $f(x) := \sup\{s \mid x \notin V_s\}$. Покажем, что f непрерывна. Пусть x_0 и $\varepsilon > 0$ произвольны. Пусть $s_0 = f(x_0)$. Рассмотрим

$$U(x_0) := V_{s_0 + \frac{\varepsilon}{4}} \setminus \overline{V_{s_0 - \frac{\varepsilon}{4}}}.$$

Это действительно окрестность x_0 , причем для любого $x \in U(x_0)$

$$x \in V_{s_0 + \frac{\varepsilon}{4}}, \quad x \notin \overline{V_{s_0 - \frac{\varepsilon}{4}}},$$

так что

$$s_0 - \frac{\varepsilon}{4} \leq f(x) \leq s_0 + \frac{\varepsilon}{4}, \quad |f(x) - f(x_0)| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

□

Задача 32. Замкнутое подмножество замкнутого подмножества замкнуто в объемлющем пространстве.

Задача 33. (Теорема Титце о продолжении) Пусть X — нормальное топологическое пространство, $f : F \rightarrow \mathbb{R}$ — непрерывная функция. Тогда f продолжается до непрерывной функции $g : X \rightarrow \mathbb{R}$. Если f ограничена, то и g можно выбрать ограниченной той же константой.

Определение 1.23. *Носителем функции* $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ называется

$$\text{supp } f := \overline{\{x \in X \mid f(x) \neq 0\}}.$$

Теорема 1.24. Пусть X — нормальное топологическое пространство, $\{U_\alpha\}$ — конечное открытое покрытие. Тогда существуют такие непрерывные функции $\psi_\alpha : X \rightarrow [0, 1] \subset \mathbb{R}$, что

- (1) $\text{supp } \psi_\alpha \subset U_\alpha$,
- (2) $\sum_\alpha \psi_\alpha(x) \equiv 1$.

Система функций ψ_α называется разбиением единицы, подчиненным $\{U_\alpha\}$.

Замечание 1.25. Достаточно локальной конечности $\{U_\alpha\}$: у каждой точки существует окрестность, пересекающаяся лишь с конечным числом $\{U_\alpha\}$.

Доказательство. Согласно теореме 1.21 найдем новые покрытия $W_\alpha \Subset V_\alpha \Subset U_\alpha$. По лемме Урысона существуют непрерывные функции

$$\theta_\alpha : X \rightarrow [0, 1], \quad \theta_\alpha|_{\overline{W_\alpha}} \equiv 1, \quad \theta_\alpha|_{(X \setminus V_\alpha)} \equiv 0.$$

Таким образом, $\text{supp } \theta_\alpha \subset \overline{V_\alpha} \subset U_\alpha$, а $\theta_\alpha|_{W_\alpha} > 0$. Положим $\theta := \sum_\alpha \theta_\alpha$. Это конечная сумма непрерывных функций и, таким образом, непрерывная функция. Поскольку $\{W_\alpha\}$ — покрытие, а $\theta \geq \theta_\alpha > 0$ на W_α , то $\theta > 0$. Значит, мы можем положить $\psi_\alpha := \frac{\theta_\alpha}{\theta}$. Очевидно, что оба условия выполнены. □

Определение 1.26. Топологическое пространство X называется *компактным*, если из любого его открытого покрытия можно выделить конечное подпокрытие.

Задача 34. Доказать, что отрезок $[a, b]$ компактен.

Задача 35. Доказать, что замкнутое подмножество компактного пространства компактно.

Задача 36. Доказать, что компактное подмножество хаусдорфова пространства замкнуто.

Теорема 1.27. *Компактное хаусдорфово пространство нормально.*

Доказательство. Пусть $F \subset X$ замкнуто и $x \notin F$. Покажем, что существуют непересекающиеся окрестности $U(x)$ и $V(F)$. В силу хаусдорфовости для любого $y \in F$ найдутся такие $V_y \ni y$ и $U_y \ni x$, что $V_y \cap U_y = \emptyset$. Окрестности V_y образуют покрытие F , из которого можно выбрать конечное подпокрытие V_{y_1}, \dots, V_{y_N} , так как F компактно (см. задачу 35). Положим

$$V(F) := V_{y_1} \cup \dots \cup V_{y_N}, \quad U(x) := \bigcap_{j=1}^N U_{y_j}.$$

Пусть теперь $F_1 \subset X$ и $F_2 \subset X$ — замкнутые. По первой части доказательства определим для каждого $x \in F_1$ открытые непересекающиеся множества $U(x) \ni x$ и $V(x) \supset F_2$. Тогда $\{U(x)\}$ — открытое покрытие F_1 , из которого можно выделить конечное подпокрытие $U(x_1), \dots, U(x_n)$. Множества $\bigcup_{i=1}^n U(x_i)$ и $\bigcap_{i=1}^n V(x_i)$ — искомые непересекающиеся окрестности F_1 и F_2 . \square

Задача 37. Доказать, что непрерывный образ компакта компактен.

Задача 38. Пусть $f : X \rightarrow \mathbb{R}^1$ — непрерывная функция на компактном пространстве X . Тогда f ограничена и принимает наибольшее и наименьшее значения.

Задача 39. Точка x_0 называется *предельной точкой* множества Z , если в каждой ее окрестности содержится бесконечно много точек Z . Доказать, что в метрическом пространстве X множество Z , не имеющее предельных точек, является замкнутым.

Задача 40. Число $\varepsilon > 0$ является *числом Лебега* открытого покрытия $\{U_\alpha\}$ метрического пространства X , если покрытие $\{B_\varepsilon(x) | x \in X\}$ является измельчением $\{U_\alpha\}$ (т. е. каждый шар лежит в некотором элементе покрытия). Доказать, что если в X всякая последовательность имеет сходящуюся подпоследовательность, то всякое открытое покрытие имеет число Лебега.

Задача 41. Пусть X — метрическое пространство, тогда следующие условия эквивалентны:

- (1) X компактно;
- (2) любая последовательность $\{x_n\} \subset X$ имеет сходящуюся подпоследовательность;
- (3) любая последовательность вложенных непустых замкнутых множеств $\{F_n\}$ (т. е. $F_n \supset F_{n+1}$) имеет непустое пересечение.

Задача 42. Декартово произведение компактных пространств является компактным.

Определение 1.28. Напомним, что последовательность групп и гомоморфизмов

$$\dots \xrightarrow{\gamma_{i+1}} G_i \xrightarrow{\gamma_i} G_{i-1} \xrightarrow{\gamma_{i-1}} G_{i-2} \xrightarrow{\gamma_{i-2}} \dots$$

называется *комплексом*, если образ предыдущего гомоморфизма содержится в ядре последующего, $\text{Im } \gamma_i \subset \text{Ker } \gamma_{i-1}$, или, что то же самое, $\gamma_{i-1}\gamma_i = 0$. Последовательность групп и гомоморфизмов называется *точной*, если образ предыдущего гомоморфизма совпадает с ядром последующего.

Нам понадобится также следующий алгебраический факт.

Лемма 1.29 (о пяти гомоморфизмах). *Пусть задана коммутативная диаграмма абелевых групп и гомоморфизмов*

$$\begin{array}{ccccccccc} G_5 & \xrightarrow{\alpha_5} & G_4 & \xrightarrow{\alpha_4} & G_3 & \xrightarrow{\alpha_3} & G_2 & \xrightarrow{\alpha_2} & G_1 \\ \gamma_5 \downarrow & & \gamma_4 \downarrow & & \gamma_3 \downarrow & & \gamma_2 \downarrow & & \gamma_1 \downarrow \\ H_5 & \xrightarrow{\beta_5} & H_4 & \xrightarrow{\beta_4} & H_3 & \xrightarrow{\beta_3} & H_2 & \xrightarrow{\beta_2} & H_1 \end{array}$$

в которой каждая строка точна и $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_4$ и γ_5 — изоморфизмы. Тогда γ_3 — тоже изоморфизм.

Доказательство. Покажем, что γ_3 является мономорфизм. Пусть $\gamma_3(g_3) = 0$. Тогда $\gamma_2\alpha_3(g_3) = \beta_3\gamma_3(g_3) = 0$. Следовательно, $\alpha_3(g_3) = 0$. Значит, существует такое $g_4 \in G_4$, что $\alpha_4(g_4) = g_3$. Тогда $\beta_4\gamma_4(g_4) = 0$ и существует такой элемент $h_5 \in H_5$, что $\beta_5(h_5) = \gamma_4(g_4)$. Рассмотрим такой элемент $g_5 \in G_5$, что $\gamma_5(g_5) = h_5$. Тогда $\gamma_4(\alpha_5(g_5)) = \gamma_4(g_4)$ и, значит, $g_4 = \alpha_5(g_5)$. Следовательно, $g_3 = \alpha_4\alpha_5(g_5) = 0$.

Покажем, что γ_3 — эпиморфизм. Пусть $h_3 \in H_3$. Существует такой элемент $g_2 \in G_2$, что $\gamma_2(g_2) = \beta_3(h_3)$. Тогда $\gamma_1\alpha_2(g_2) = \beta_2\beta_3(h_3) = 0$. Следовательно, $\alpha_2(g_2) = 0$, и существует такое $g_3 \in G_3$, что $\alpha_3(g_3) = g_2$. Тогда $\beta_3(h_3 - \gamma_3(g_3)) = 0$ и существует такое $h_4 \in H_4$, что $\beta_4(h_4) = h_3 - \gamma_3(g_3)$. Пусть элемент $g_4 \in G_4$ таков, что $\gamma_4(g_4) = h_4$. Тогда $g_3 + \alpha_4(g_4) \in G_3$ и $\gamma_3(g_3 + \alpha_4(g_4)) = \gamma_3(g_3) + \beta_4(h_4) = h_3$. \square

2. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ КОНСТРУКЦИИ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВ

Определение 2.1. *Произведением* $X \times Y$ топологических пространств X и Y называется декартово произведение множеств X и Y , снабженное топологией, определяемой базой множеств вида $U \times V$, где $U \subset \tau_X, V \subset \tau_Y$, т. е. любое открытое множество есть объединение множеств указанного вида.

Задача 43. $S^1 \times S^1$ гомеоморфно тору \mathbb{T}^2 .

Задача 44. $S^2 \times S^2$ гомеоморфно ориентированному грассманиану $G_+(4, 2)$.

Задача 45. Группа $SO(4)$ гомеоморфна $S^3 \times SO(3) = S^3 \times \mathbb{R}P^3$.

Определение 2.2. Пусть Y — факторпространство X , т. е. пространство, полученное отождествлением между собой некоторых точек X . *Фактортопологией* на Y называется сильнейшая из всех топологий, для которых естественное сюръективное отображение $X \rightarrow Y$ является непрерывным, т. е. состоящая из образов всех открытых множеств X при этом отображении. Эта же конструкция применима к любому сюръективному отображению $X \rightarrow Y$, не обязательно происходящему из факторизации.

Наиболее распространенной (и простейшей) ситуацией будет отождествление между собой точек некоторого подмножества $A \subset X$. В этом случае Y обозначается через X/A .

Определение 2.3. Произведение $X \times I$, где $I = [0, 1]$, называется *цилиндром над X* , $X \times 0$ и $X \times 1$ — *нижнее и верхнее основания цилиндра* (гомеоморфны X), $x \times I$, $x \in X$, — *образующие* (гомеоморфны I).

Определение 2.4. *Конусом CX* называется факторпространство цилиндра по основанию $X \times I / X \times 1$.

Определение 2.5. *Надстройкой ΣX* называется факторпространство конуса по оставшемуся основанию $CX / X \times 0 = X \times I / \sim$, где $(x, 0) \sim (y, 0)$, $(x, 1) \sim (y, 1)$ для любых x, y .

Образы оснований (в конусе и надстройке) называются *вершинами*, а образы образующих — *образующими*. Точки по-прежнему будем обозначать через (x, t) , имея в виду соответствующие отождествления.

Задача 46. $C(S^1) \approx D^2$ (диск, двумерный замкнутый шар), $\Sigma S^1 \approx S^2$.

Определение 2.6. Пусть $\varphi : A \rightarrow Y$ — непрерывное отображение, где $A \subset X$. *Приклеиванием X к Y по отображению φ* называется факторпространство $Y \cap_{\varphi} X$ несвязного объединения $X \sqcup Y$ по отношению эквивалентности $a \sim \varphi(a)$ для любого $a \in A$.

Определение 2.7. *Цилиндром $Z(f)$ непрерывного отображения $f : X \rightarrow Y$* называется приклеивание $X \times I$ к Y по отображению $X \times 0 \approx X \xrightarrow{f} Y$.

Определение 2.8. *Конусом $C(f)$ непрерывного отображения $f : X \rightarrow Y$* называется приклеивание CX к Y по отображению $X \times 0 \approx X \xrightarrow{f} Y$.

Задача 47. Пространства X и Y являются подпространствами $Z(f)$. Пространство Y является подпространством $C(f)$.

Задача 48. Конус двулистного накрытия $S^n \rightarrow \mathbb{R}P^n$ гомеоморфен $\mathbb{R}P^{n+1}$.

Определение 2.9. Как множество *джойн* $X * Y$ пространств X и Y представляет собой множество отрезков соединяющих каждую точку пространства X с каждой точкой пространства Y . Топология (а также более строго само множество) на $X * Y$ определяется следующим образом. Это факторпространство $X \times Y \times I$ по отношению эквивалентности

$$(x, y', 0) \sim (x, y'', 0), \quad (x', y, 1) \sim (x'', y, 1), \quad \forall x, x', x'' \in X, y, y', y'' \in Y,$$

(отождествили концы отрезков, выходящих из одной точки).

Непосредственно из определения видно, что “сечения” джойна, т. е. образы $X \times Y \times t$ при фиксированном t , гомеоморфны, соответственно,

$$X \quad (t = 0), \quad X \times Y \quad (0 < t < 1), \quad Y \quad (t = 1).$$

Задача 49. Джойн двух отрезков — тетраэдр.

Задача 50. Пусть P — одноточечное пространство. Тогда $X * P \approx CX$.

Задача 51. $X * S^0 \approx \Sigma X$.

Задача 52. $S^m * S^n \approx S^{m+n+1}$.

Задача 53. Пусть X , Y и Z — топологические пространства. Тогда имеется естественная биекция множеств

$$(X * Y) * Z \leftrightarrow X * (Y * Z) \leftrightarrow X * Y * Z,$$

где последнее пространство получено факторизацией (какой ?) пространства $X \times Y \times Z \times \Delta$, где Δ — треугольник.

Если X , Y и Z — компактные пространства, то данные биекции являются гомеоморфизмами. Утверждение верно для многих некомпактных пространств, но не для всех.

Определение 2.10. Определим пространство $C(X, Y)$ или Y^X как пространство непрерывных отображений $X \rightarrow Y$, снабженное *компактно-открытой топологией*, база которой состоит из множеств

$$U(K, V) = \{f \in C(X, Y) \mid f(K) \subset V\},$$

где $K \subset X$ — произвольное компактное, а $V \subset Y$ — произвольное открытое множества.

Задача 54. Пусть \mathbf{n} — (метрическое) пространство, состоящее из n точек. Тогда

$$Y^{\mathbf{n}} \approx Y^n := \underbrace{Y \times \cdots \times Y}_n.$$

Задача 55. Пусть X , Y и Z — топологические пространства. Тогда имеется естественное отображение

$$e : C(X, C(Y, Z)) \rightarrow C(X \times Y, Z), \quad e(f)(x, y) := f(x)(y).$$

Если X и Y хаусдорфовы и локально компактны, то e — гомеоморфизм: $(Z^Y)^X \approx Z^{X \times Y}$.

Определение 2.11. В пространстве путей $C(I, X)$ пространства X выделим следующие подпространства. (Началом пути $\varphi : I \rightarrow X$ называется $x_0 = \varphi(0)$, концом — $x_1 = \varphi(1)$, петлей называется путь, у которого $x_0 = x_1$.)

Пространство $E(X; x_0, x_1)$ путей с началом и концом в фиксированных точках x_0 и x_1 , соответственно.

Пространство $E(X; x_0)$ путей с началом в фиксированной точке x_0 .

Пространство $\Omega(X, x_0) = E(X; x_0, x_0)$ петель с началом в фиксированной точке x_0 .

Задача 56. Пространство $E(S^n; x_0, x_1)$ не зависит (с точностью до гомеоморфизма) от выбора точек, даже если они совпадают. Найти более широкий класс пространств с этим свойством, а также контрпримеры.

Модифицируем основные приведенные определения на случай пространств с отмеченной точкой (пунктированные пространства). Последние будем часто обозначать через (X, x_0) вместо X , чтобы указать отмеченную точку. Таким образом, мы хотим, чтобы в результате получалось снова пунктированное пространство.

- В произведении $X \times Y$ отмеченной точкой считается (x_0, y_0) , где x_0 и y_0 — отмеченные точки X и Y , соответственно.
- В цилиндре, конусе и надстройке пространства X образующая, проходящая через отмеченную точку X , факторизуется в точку, которая и объявляется отмеченной точкой CX .

- В джойне $X * Y$ факторизуется в отмеченную точку отрезок, соединяющий отмеченные точки пространств X и Y .
- Все отображения предполагаются переводящими отмеченную точку в отмеченную.
- В частности, в цилиндре и конусе отображения имеется образующая, соединяющая отмеченные точки пространств X и Y — x_0 и $y_0 = \varphi(x_0)$. Эта образующая факторизуется и объявляется отмеченной точкой.
- Отмеченной точкой пространства $C(X, Y)$ считается отображение, переводящее все X в отмеченную точку Y .
- Если X — пунктированное пространство, то EX — пространство путей, начинающихся в отмеченной точке, а ΩX — пространство петель начинающихся и заканчивающихся в отмеченной точке. В соответствии с предыдущим пунктом, отмеченная точка этих пространств — путь, отображающий все точки I в отмеченную точку X .

Если не оговорено противного, выделенная точка стандартной сферы S^{n-1} и шара $D^n = (1, 0, \dots, 0)$.

Задача 57. Для пространств с отмеченной точкой сохраняются гомеоморфизмы

$$CS^n \approx D^{n+1}, \quad \Sigma S^n \approx S^{n+1}, \quad S^m * S^n \approx S^{m+n+1}.$$

Задача 58. Пусть X и Y — пунктированные пространства. Тогда имеется гомеоморфизм $h_{X,Y} : C(\Sigma X, Y) \rightarrow C(X, \Omega Y)$, естественный в том смысле что для любых непрерывных отображений $\varphi : X' \rightarrow X$, $\psi : Y \rightarrow Y'$ коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} C(\Sigma X, Y) & \xrightarrow{h_{X,Y}} & C(X, \Omega Y) \\ \downarrow \alpha & & \downarrow \beta \\ C(\Sigma X', Y') & \xrightarrow{h_{X',Y'}} & C(X', \Omega Y') \end{array}$$

где $\alpha(f)(x', t) = \psi(f(\varphi(x'), t))$, $\beta(g)(x')(t) = \psi(g(\varphi(x')))(t)$.

Определение 2.12. Для пунктированных пространств (X, x_0) , (Y, y_0) естественным аналогом несвязной суммы служит *букет* $X \vee Y \subset X \times Y$,

$$X \vee Y := \{(x, y) \in X \times Y \mid x = x_0 \text{ или } y = y_0\}$$

Определение 2.13. *Смеш-произведение* или *тензорное произведение* $X \otimes Y := X \times Y / X \vee Y$.

3. ГОМОТОПИИ, ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ, КЛАССЫ

Определение 3.1. Непрерывные отображения $f, g : X \rightarrow Y$ *гомотопны* ($f \sim g$), если имеется такое непрерывное отображение $F : X \times I \rightarrow Y$, $f_t(x) := F(x, t)$, что $f_0 = f$ и $f_1 = g$. Тогда F — *гомотопия*, связывающая f и g .

Задача 59. (и определение) Проверить, что гомотопность — отношение эквивалентности в пространстве $C(X, Y)$ и, следовательно, определено множество *гомотопических классов* $\pi(X, Y) = C(X, Y) / \sim$. Класс элемента f будем обозначать $[f]$ или $cls(f)$.

Задача 60. Для любого X множество $\pi(X, I)$ одноэлементно.

Замечание 3.2. Для достаточно хороших пространств эти определения равносильны следующим: гомотопия — это путь в пространстве отображений, а $\pi(X, Y)$ — множество компонент линейной связности $C(X, Y)$.

Задача 61. Проверить, что гомотопность хорошо ведет себя по отношению взятию композиции непрерывных отображений, т. е. если $f \sim f' : X \rightarrow Y$ и $g \sim g' : Y \rightarrow Z$, то $(g \circ f) \sim (g' \circ f') : X \rightarrow Z$.

В силу этого для непрерывных отображений

$$h : X \rightarrow X', \quad g : Y \rightarrow Y',$$

корректно определены отображения

$$h^* : \pi(X', Y) \rightarrow \pi(X, Y), \quad g_* : \pi(X, Y) \rightarrow \pi(X, Y')$$

по формулам

$$h^*[f] = [f \circ h], \quad g_*[q] = [q \circ g],$$

т. е. путем перехода к гомотопическим классам в диаграммах

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{f} & Y \\ h \uparrow & \nearrow & \uparrow \\ X & & Y \end{array}, \quad \begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{q} & Y \\ & \searrow & \downarrow g \\ & & Y' \end{array}.$$

Определение 3.3. Пространства X_1 и X_2 называются *гомотопически эквивалентными* (пишем $X_1 \sim X_2$), если имеются такие $f \in C(X_1, X_2)$, $g \in C(X_2, X_1)$, что $g \circ f \sim \text{Id}_{X_1}$, $f \circ g \sim \text{Id}_{X_2}$.

Теорема 3.4. Это определение эквивалентно следующим двум свойствам.

- (1) Для любого пространства Y существует такая биекция $\varphi_Y : \pi(X_1, Y) \rightarrow \pi(X_2, Y)$, что для любого Y' и $h \in C(Y, Y')$ коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \pi(X_1, Y) & \xrightarrow{\varphi_Y} & \pi(X_2, Y) \\ \downarrow h_* & & \downarrow h_* \\ \pi(X_1, Y') & \xrightarrow{\varphi_{Y'}} & \pi(X_2, Y'). \end{array}$$

- (2) Для любого пространства Y существует такая биекция $\varphi^Y : \pi(Y, X_1) \rightarrow \pi(Y, X_2)$, что для любого Y' и $h \in C(Y, Y')$ коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \pi(Y, X_1) & \xrightarrow{\varphi^Y} & \pi(Y, X_2) \\ h^* \uparrow & & h^* \uparrow \\ \pi(Y', X_1) & \xrightarrow{\varphi^{Y'}} & \pi(Y', X_2). \end{array}$$

Доказательство. Пусть выполнены условия пункта (1). В частности, имеются биекции $\varphi_{X_2} : \pi(X_1, X_2) \rightarrow \pi(X_2, X_2)$, $\varphi_{X_1} : \pi(X_1, X_1) \rightarrow \pi(X_2, X_1)$. Выберем $f \in$

$(\varphi_{X_2})^{-1}[\text{Id}_{X_2}]$, $g \in (\varphi_{X_1})[\text{Id}_{X_1}]$. Имеем коммутативную диаграмму:

$$\begin{array}{ccc} \pi(X_1, X_1) & \xrightarrow{\varphi_{X_1}} & \pi(X_2, X_1) \\ \downarrow f_* & & \downarrow f_* \\ \pi(X_1, X_2) & \xrightarrow{\varphi_{X_2}} & \pi(X_2, X_2). \end{array}$$

Откуда

$$\begin{aligned} (\varphi_{X_2} \circ f_*)[\text{Id}_{X_1}] &= \varphi_{X_2}[f \circ \text{Id}_{X_1}] = \varphi_{X_2}[f] = [\text{Id}_{X_2}], \\ &\parallel \\ (f_* \circ \varphi_{X_1})[\text{Id}_{X_1}] &= f_*[g] = [f \circ g], \end{aligned}$$

так что $f \circ g \sim \text{Id}_{X_2}$. Аналогично для обратной композиции.

Пусть теперь $X_1 \sim X_2$, т. е. имеются f и g с соответствующими свойствами. Положим для любого пространства Y : $\varphi_Y := g^*$. Покажем, что φ_Y — биекция, точнее, что f^* является обратным. Действительно, имеем для любого $r \in C(X_1, Y)$:

$$(f^* \circ g^*)[r] = f^*[r \circ g] = [r \circ g \circ f] = [r],$$

и, совершенно аналогично, в другом порядке. Осталось проверить коммутативность диаграммы

$$\begin{array}{ccc} \pi(X_1, Y) & \xrightarrow{\varphi_Y = g^*} & \pi(X_2, Y) \\ \downarrow h_* & & \downarrow h_* \\ \pi(X_1, Y') & \xrightarrow{\varphi_{Y'} = g^*} & \pi(X_2, Y'). \end{array}$$

Имеем для любого $r \in C(X_1, Y)$:

$$(g^* h_*)[r] = g^*[h \circ r] = [h \circ r \circ g], \quad (h_* g^*)[r] = h_*[r \circ g] = [h \circ r \circ g].$$

Для (2) доказательство аналогично. \square

Определение 3.5. Классы гомотопической эквивалентности называются *гомотопическими типами*.

Задача 62. Доказать, что а) точка и плоскость, б) кольцо и окружность гомотопически эквивалентны, но не гомеоморфны.

Определение 3.6. Пространство называется *стягиваемым*, если его тождественное отображение гомотопно отображению в точку. Это равносильно гомотопической эквивалентности точке (проверьте!).

Задача 63. Для любого X пространства CX и $E(X, x_0)$ стягиваемы.

Задача 64. $C(f) \sim Y$, где $f : X \rightarrow Y$.

Задача 65. Если $X \sim Y$, то $\Sigma X \sim \Sigma Y$.

Определение 3.7. Подпространство $A \subset X$ называется *ретрактом* X , если имеется непрерывное отображение r (*ретракция*) пространства X на A , тождественное на A :

$$r : X \rightarrow X, \quad r(X) \subset A, \quad r(a) = a \quad \forall a \in A.$$

Ретракт называется *деформационным*, если существует ретракция с $r \sim \text{Id}_X$ и *строгим деформационным*, если эта гомотопия неподвижна на A .

Задача 66. Любая точка X является его ретрактом. Приведите пример, что она не является деформационным ретрактом.

Задача 67. Вообще: докажите, что A является деформационным ретрактом X тогда и только тогда, когда включение A является гомотопической эквивалентностью. Приведите пример, когда $A \subset X$, $A \sim X$, но не является деформационным ретрактом X .

Задача 68. Докажите, что двоеточие (концы отрезка) не является его ретрактом.

Задача 69. Основания цилиндра являются его ретрактами.

Задача 70. Основание SX является ретрактом тогда и только тогда, когда X стягиваемо.

Если, как и ранее, переходя к пунктированным пространствам, мы будем требовать, чтобы все отображения, в том числе и гомотопии, сохраняли отмеченные точки, мы получим обобщения всех этих понятий, включая гомотопические типы. Соответствующие множества гомотопических классов будут обозначаться $\pi_b(X, Y)$.

Задача 71. Проверить, что для пунктированных пространств основные конструкции сохраняют гомотопические эквивалентности, т. е. являются операциями на гомотопических типах.

Нам также понадобятся гомотопии отображений пар, т. е. таких непрерывных отображений $f : X \rightarrow Y$, что $f(A) \subset B$, где $A \subset X$ и $B \subset Y$ — фиксированные подмножества. Если пространства пунктированы, то подразумевается, что $x_0 \in A$, $y_0 \in B$.

4. H - и H' -ПРОСТРАНСТВА, ГРУППОВЫЕ СТРУКТУРЫ

Зафиксируем пунктированное пространство (Y, y_0) .

Определение 4.1. *Естественная групповая структура* на множествах $\pi_b(X, Y)$ — это структура группы на каждом из них, причем для любого $f : X_1 \rightarrow X_2$ соответствующее отображение $f^* : \pi_b(X_2, Y) \rightarrow \pi_b(X_1, Y)$ является гомоморфизмом групп.

Соответственно, естественная групповая структура на множествах $\pi_b(Y, X)$ — это структура группы на каждом из них, причем для любого $f : X_1 \rightarrow X_2$ соответствующее отображение $f_* : \pi_b(Y, X_1) \rightarrow \pi_b(Y, X_2)$ является гомоморфизмом групп.

Лемма 4.2. *Если имеется естественная групповая структура на множествах $\pi_b(X, Y)$, то единицей группы $\pi_b(Y, Y)$ является класс постоянного отображения $c : Y \rightarrow y_0$.*

Доказательство. Рассмотрим (единственное) вложение одноточечного пространства $i : pt \rightarrow Y$, так что $i(pt) = y_0$, и индуцированное отображение $i_* : \pi_b(Y, pt) \rightarrow \pi_b(Y, Y)$, где первая группа состоит лишь из единицы $e = [\varepsilon : Y \rightarrow pt]$. Значит, ее образ $i_*(e) = i_*[\varepsilon] = [i \circ \varepsilon] = [c]$ — единица $\pi_b(Y, Y)$. \square

Определение 4.3. Пространство Y называется H -пространством, если определены отображения $\mu : Y \times Y \rightarrow Y$ (умножение) и $\nu : Y \rightarrow Y$ (взятие обратного), обладающие следующими свойствами

(1) (гомотопическая единица). Отображения

$$\begin{aligned}\mu \circ j_1 : Y &\xrightarrow{j_1} Y \times Y \xrightarrow{\mu} Y, & j_1(y) &= (y, y_0), \\ \mu \circ j_2 : Y &\xrightarrow{j_2} Y \times Y \xrightarrow{\mu} Y, & j_2(y) &= (y_0, y),\end{aligned}$$

гомотопны тождественному: $\mu \circ j_1 \sim \text{Id}_Y$, $\mu \circ j_2 \sim \text{Id}_Y$.

(2) (гомотопическая ассоциативность). Отображения

$$Y \times (Y \times Y) \xrightarrow{\text{Id} \times \mu} Y \times Y \xrightarrow{\mu} Y, \quad (Y \times Y) \times Y \xrightarrow{\mu \times \text{Id}} Y \times Y \xrightarrow{\mu} Y$$

гомотопны.

(3) (гомотопическое обращение). Отображения

$$Y \xrightarrow{\text{diag}} Y \times Y \xrightarrow{\text{Id} \times \nu} Y \times Y \xrightarrow{\mu} Y, \quad Y \xrightarrow{\text{diag}} Y \times Y \xrightarrow{\nu \times \text{Id}} Y \times Y \xrightarrow{\mu} Y$$

гомотопны отображению в точку.

Задача 72. Доказать, что на пространстве петель ΩZ отображения

$$\mu(f, g)(t) := \begin{cases} f(2t), & t \in [0, 1/2], \\ g(2t - 1), & t \in [1/2, 1], \end{cases} \quad \nu(f)(t) := f(1 - t),$$

(пробегание двух петель последовательно и пробегание петли в противоположном направлении) задают структуру H -пространства.

Задача 73. Доказать, что на топологической группе групповые операции задают структуру H -пространства.

Теорема 4.4. *Естественная по X групповая структура на $\pi_b(X, Y)$ существует тогда и только тогда, когда Y является H -пространством.*

Мы не будем доказывать эту теорему, а перейдем к более важному сейчас для нас двойственному понятию.

Определение 4.5. Пространство Y называется H' -пространством, если определены отображения $\mu : Y \rightarrow Y \vee Y$ (коумножение) и $\nu : Y \rightarrow Y$ (взятие кообратного), обладающие следующими свойствами

(1) (гомотопическая коединица). Отображения

$$\begin{aligned}p_1 \circ \mu : Y &\xrightarrow{\mu} Y \vee Y \xrightarrow{p_1} Y, & p_1(y, y_0) &= y, & p_1(y_0, y) &= y_0, \\ p_2 \circ \mu : Y &\xrightarrow{\mu} Y \vee Y \xrightarrow{p_2} Y, & p_2(y, y_0) &= y_0, & p_1(y_0, y) &= y,\end{aligned}$$

гомотопны тождественному: $p_1 \circ \mu \sim \text{Id}_Y$, $p_2 \circ \mu \sim \text{Id}_Y$.

(2) (гомотопическая коассоциативность). Отображения

$$Y \xrightarrow{\mu} Y \vee Y \xrightarrow{\text{Id} \vee \mu} Y \vee (Y \vee Y), \quad Y \xrightarrow{\mu} Y \vee Y \xrightarrow{\mu \vee \text{Id}} (Y \vee Y) \vee Y$$

гомотопны.

(3) (гомотопическое кообращение). Отображения

$$Y \xrightarrow{\mu} Y \vee Y \xrightarrow{\text{Id} \vee \nu} Y \vee Y \xrightarrow{p} Y, \quad Y \xrightarrow{\mu} Y \vee Y \xrightarrow{\nu \vee \text{Id}} Y \vee Y \xrightarrow{p} Y$$

гомотопны отображению в точку, где $p(y, y_0) = p(y_0, y) = y$.

Задача 74. Доказать, что на надстройке ΣZ отображения

$$\mu(z, t) := \begin{cases} ((z, 2t), y_0), & t \in [0, 1/2], \\ (y_0, (z, 2t - 1)), & t \in [1/2, 1], \end{cases} \quad \nu(z, t) := (z, 1 - t),$$

где y_0 — отмеченная точка ΣZ , задают структуру H' -пространства.

Теорема 4.6. *Естественная по X групповая структура на $\pi_b(Y, X)$ существует тогда и только тогда, когда Y является H' -пространством.*

Доказательство. Пусть групповая структура существует. Положим

$$i_{1,2} : Y \rightarrow Y \vee Y, \quad i_1(y) = (y, y_0), \quad i_2(y) = (y_0, y).$$

Пусть $m = [i_1] \cdot [i_2] \in \pi_b(Y, Y \vee Y)$ в смысле этой групповой структуры (групповое умножение обозначается через \cdot), а $\mu : Y \rightarrow Y \vee Y$ — любой представитель класса m . Возьмем $n = [\text{Id}]^{-1} \in \pi_b(Y, Y)$, а ν — любой его представитель.

Проверим первое свойство пункта (1). Отображение $p_1 : Y \vee Y \rightarrow Y$ индуцирует гомоморфизм $(p_1)_* : \pi_b(Y, Y \vee Y) \rightarrow \pi_b(Y, Y)$, причем

$$(1) \quad (p_1)_*[i_1] = [p_1 \circ i_1] = [\text{Id}_Y], \quad (p_1)_*[i_2] = [p_1 \circ i_2] = [c : Y \rightarrow y_0].$$

В силу мультипликативности, (1) и леммы 4.2

$$[p_1 \circ \mu] = (p_1)_*([i_1] \cdot [i_2]) = (p_1)_*[i_1] \cdot (p_1)_*[i_2] = [\text{Id}_Y] \cdot [c] = [\text{Id}_Y],$$

что и требовалось. Свойство (2) проверяется следующим образом. Сначала заметим следующее. Пусть

$$j_1, j_2, j_3 : Y \rightarrow Y \vee Y \vee Y, \quad j_1(y) = (y, y_0, y_0), \quad j_2(y) = (y_0, y, y_0), \quad j_3(y) = (y_0, y_0, y),$$

а

$$\mu_{12}, \mu_{23} : Y \rightarrow Y \vee Y \vee Y, \quad \mu_{12}(y) = (\mu(y), y_0), \quad \mu_{23}(y) = (y_0, \mu(y)).$$

Тогда

$$(2) \quad [\mu_{12}] = [j_1] \cdot [j_2].$$

Действительно, положим $J_{12} : Y \vee Y \rightarrow Y \vee Y \vee Y$ по формуле $(y, z) \mapsto (y, z, y_0)$. Тогда

$$\mu_{12} = J_{12} \circ \mu, \quad j_1 = J_{12} \circ i_1, \quad j_2 = J_{12} \circ i_2,$$

так что (2) равносильно

$$(J_{12})_*[\mu] = (J_{12})_*[i_1] \cdot (J_{12})_*[i_2].$$

Последнее сразу следует из естественности групповой структуры и определения μ . Аналогично (2) получаем

$$(3) \quad [\mu_{23}] = [j_2] \cdot [j_3].$$

Из (2) и (3) получаем

$$\begin{aligned} [(\text{Id} \vee \mu) \circ \mu] &= (\text{Id} \vee \mu)_*([i_1] \cdot [i_2]) = (\text{Id} \vee \mu)_*[i_1] \cdot (\text{Id} \vee \mu)_*[i_2] = \\ &= [(\text{Id} \vee \mu) \circ i_1] \cdot [(\text{Id} \vee \mu) \circ i_2] = [j_1] \cdot [\mu_{23}] = [j_1] \cdot [j_2] \cdot [j_3], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [(\mu \vee \text{Id}) \circ \mu] &= (\mu \vee \text{Id})_*([i_1] \cdot [i_2]) = (\mu \vee \text{Id})_*[i_1] \cdot (\mu \vee \text{Id})_*[i_2] = \\ &= [(\mu \vee \text{Id}) \circ i_1] \cdot [(\mu \vee \text{Id}) \circ i_2] = [\mu_{12}] \cdot [j_3] = [j_1] \cdot [j_2] \cdot [j_3]. \end{aligned}$$

Проверим свойство (3):

$$\begin{aligned} [p \circ (\text{Id} \vee \nu) \circ \mu] &= p_*(\text{Id} \vee \nu)_*([i_1] \cdot [i_2]) = \\ &= p_*(\text{Id} \vee \nu)_*[i_1] \cdot p_*(\text{Id} \vee \nu)_*[i_2] = [\text{Id}] \cdot [\nu] = [\text{Id}] \cdot [\text{Id}]^{-1} = e = [c]. \end{aligned}$$

Остальные свойства проверяются аналогично.

Обратно, пусть Y является H' -пространством. Определим на $\pi_b(Y, X)$ умножение по формуле

$$\pi_b(Y, X) \times \pi_b(Y, X) \cong \pi_b(Y \vee Y, X) \xrightarrow{\mu^*} \pi_b(Y, X),$$

а взятие обратного —

$$\pi_b(Y, X) \xrightarrow{\nu^*} \pi_b(Y, X).$$

Тогда они задают естественную групповую структуру. Проверим, например, ассоциативность умножения. После естественного отождествления букетов, взятых в разном порядке, это следует из гомотопической коассоциативности. Единицей должен быть класс постоянного отображения. Действительно,

$$[f] [c] = \mu^*(p_1)^*[f] = [f \circ p_1 \circ \mu] = [f]$$

в силу первого свойства из (1) (гомотопической коединицы). Аналогично проверяется, что $\nu^*[f]$ — обратный к $[f]$:

$$[f] \nu^*[f] = \mu^*(\text{Id} \vee \nu)^*p^*[f] = [f \circ p \circ (\text{Id} \vee \nu) \circ \mu] = [f]$$

в силу гомотопического кообращения. Естественность по X , т. е. коммутативность диаграммы

$$\begin{array}{ccc} \pi_b(Y \vee Y, X) & \xrightarrow{\mu^*} & \pi_b(Y, X) \\ h_* \downarrow & & h_* \downarrow \\ \pi_b(Y \vee Y, X') & \xrightarrow{\mu^*} & \pi_b(Y, X') \end{array}$$

для любого $h : X \rightarrow X'$ следует из того, что h_* и g^* всегда коммутируют (мы с этим уже встречались):

$$h_*g^*[f] = h_*[f \circ g] = [h \circ f \circ g], \quad g^*h_*[f] = g^*[h \circ f] = [h \circ f \circ g].$$

□

Задача 75. Доделать детали доказательства.

Следствие 4.7. Поскольку сферы являются надстройками, то $\pi_b(S^n, X)$ несут естественную групповую структуру.

Определение 4.8. Гомотопическими группами $\pi_n(X)$ пространства X называются группы $\pi_b(S^n, X)$.

Задача 76. Если $f \sim g : X \rightarrow Y$, то $f_* = g_* : \pi_n(X) \rightarrow \pi_n(Y)$.

5. ФУНДАМЕНТАЛЬНАЯ ГРУППА

Определение 5.1. *Фундаментальной группой* пространства $X = (X, x_0)$ называется $\pi_1(X) = \pi_1(X, x_0) = \pi_b(S^1, X)$. В соответствии со сказанным в предыдущем параграфе, $\pi_1(X)$ как множество совпадает с гомотопическими классами петель как отображений $S^1 \rightarrow X$, сохраняющих отмеченную точку, а групповое умножение задается последовательным пробеганием двух петель (см. задачу 74).

Замечание 5.2. Перемножать таким способом можно не только петли, но и любые пути, если конец первого совпадает с началом второго.

Теорема 5.3. *Пусть X линейно связно. Тогда $\pi_1(X, x_0) \cong \pi_1(X, x_1)$ для любых x_0, x_1 .*

Доказательство. Выберем (неоднозначно) в силу линейной связности путь $a : I \rightarrow X$, соединяющий x_0 и x_1 . Определим

$$a_\bullet : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(X, x_1), \quad a_\bullet(\varphi) := (a\varphi)a^{-1}.$$

Ясно, что класс результата одинаков для гомотопных петель, так что a_\bullet действительно отображает гомотопические множества, причем, так как

$$(a\varphi)a^{-1} \cdot (a\psi)a^{-1} = (a\varphi\psi)a^{-1},$$

то a_\bullet — гомоморфизм. Поскольку $\varphi \mapsto (a^{-1}\varphi)a$, очевидно является обратным к a_\bullet , то a_\bullet — изоморфизм. \square

Задача 77. При изменении a изоморфизм изменяется на внутренний автоморфизм группы. При изменении a на гомотопный, изоморфизм не меняется.

Замечание 5.4. Мы ставили скобки, т. к. перемножение петель и путей не ассоциативно — другой способ пробегания параметра. Ассоциативность имеется только на гомотопическом уровне.

Теорема 5.5. $\pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$.

Доказательство. Каждая точка S^1 — это вещественное число t , определенное с точностью до $2k\pi$: $\mathbb{C} \supset S^1 \ni z = e^{it}$. При этом отождествлении петля $\varphi : I \rightarrow S^1$ превращается в многозначную функцию $\bar{\varphi} : I \rightarrow \mathbb{R}$, значения которой определены с точностью до $2k\pi$, причем на концах отрезка — в точности числа вида $2k\pi$.

Определим однозначную функцию $f = f_\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$ следующим образом. Поскольку I — компакт, то отображение φ равномерно непрерывно и можно выбрать достаточно большое n чтобы $\varphi(x)$ и $\varphi(x')$ не были бы диаметрально противоположными точками S^1 при $|x - x'| \leq 1/n$. Значения f будем определять последовательно на отрезках $[0, 1/n]$, $[1/n, 2/n]$, \dots , $[(n-1)/n, 1]$. Положим $f(0) = 0$, а при $x \in [0, 1/n]$ в качестве значения $f(x)$ будем брать то (единственное) значение $\bar{\varphi}(x)$, которое отличается от $0 = f(0)$ меньше, чем на π . На последующих отрезках то же самое делается относительно (уже полученного) значения в начальной точке (не обязательно нулевого). Поскольку при сделанных предположениях функция не может на этих отрезках сделать скачок в $2k\pi$, $k \neq 0$, то она непрерывна.

При этом функция f_φ непрерывно зависит от φ , а значит и ее значение $f_\varphi(1)$. Но последнее принимает дискретные значения, а значит не меняется при малых возмущениях, а следовательно, и при гомотопиях. Получаем отображение

$$e : \pi(S^1) \rightarrow \mathbb{Z}, \quad [\varphi] \mapsto \frac{f_\varphi(1)}{2\pi}.$$

Оно является сюръективным, поскольку для любого k мы можем взять петлю ρ_k , получающуюся равномерной намоткой в нужном направлении окружности на себя k раз. Ей будет отвечать линейная функция f_{ρ_k} , $f_{\rho_k}(0) = 0$, $f_{\rho_k}(1) = 2k\pi$. Более того, всякая функция f_ψ , удовлетворяющая этим условиям, (линейно) гомотопна f_{ρ_k} : $F(x, t) = tf_\psi(x) + (1-t)f_{\rho_k}(x)$. Тогда $G(e^{2\pi ix}, t) = e^{iF(x, t)}$ — корректно определенная гомотопия ρ_k и ψ . Значит, e — инъективно и, таким образом, биективно. Более того, мы показали, что всякая петля гомотопна равномерной намотке ρ_k , а для таких петель, очевидно, выполнено мультипликативное свойство:

$$e([\rho_k] \cdot [\rho_m]) = e[\rho_{k+m}] = k + m = e[\rho_k] + e[\rho_m].$$

Значит, e — изоморфизм групп. \square

Замечание 5.6. При доказательстве этой теоремы мы использовали очень важное и общее наблюдение в теории гомоморфизмов групп гомотопических классов отображений: если имеется инъекция на представителях, сюръекция и на отображениях, и на их гомотопиях, то имеется инъекция на классах.

Замечание 5.7. Другое доказательство может быть основано на гладких аппроксимациях и степени отображения, либо на клеточной аппроксимации, о которой речь пойдет ниже,

6. КЛЕТОЧНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

Определение 6.1. *Клеточное пространство* (или *клеточное разбиение*, *клеточный комплекс*, *CW-комплекс*) — хаусдорфово топологическое пространство K , для которого:

- зафиксировано разбиение K на непересекающиеся подмножества (*клетки*):

$$K = \bigcup_{q=0}^{\infty} \bigcup_{i \in I_q} e_i^q,$$

- для каждой клетки e_i^q существует (иногда фиксируется) такое непрерывное *характеристическое отображение* $\chi_i^q : D^q \rightarrow K$ замкнутого шара размерности q , что его ограничение на внутренность шара является гомеоморфизмом

$$\chi_i^q|_{\text{Int } D^q} : \text{Int } D^q \approx e_i^q,$$

причем требуется выполнение следующих двух аксиом:

(C) *граница* $\partial e_i^q = \overline{e_i^q} \setminus e_i^q$ содержится в объединении конечного числа клеток, причем они имеют меньшую размерность, чем q ;

(W) множество $F \subset K$ замкнуто тогда и только тогда, когда для любой клетки e_i^q замкнуто $F \cap \overline{e_i^q}$ (т. е. топология K — слабейшая, для которой все χ_i^q непрерывны — проверьте!).

Определение 6.2. *Клеточное подпространство* — объединение некоторого набора клеток, являющееся замкнутым подмножеством K .

Задача 78. Проверьте, что оно само является клеточным пространством.

Определение 6.3. Подмножество $\text{sk}_n K \subset K$, составленное из его клеток размерности, не превосходящей n , называется его *n -остовом*.

Задача 79. Проверьте, что $\text{sk}_n K$ — клеточное подпространство.

Определение 6.4. Клеточное пространство называется *конечным* (соотв., *счетным*), если оно состоит из конечного (соотв., счетного) числа клеток, и *локально конечным*, если для каждой точки его найдется окрестность, содержащаяся в некотором конечном клеточном подпространстве.

Задача 80. Для конечных клеточных пространств аксиомы (C) и (W) следуют из первой части определения.

Задача 81. Каждая точка клеточного пространства содержится в некотором конечном клеточном подпространстве.

Задача 82. Каждое компактное подмножество клеточного пространства содержится в некотором конечном клеточном подпространстве.

Задача 83. Докажите, что клеточное пространство конечно (локально конечно) тогда и только тогда, когда оно компактно (локально компактно).

Задача 84. Докажите, что отображение клеточного пространства в другое топологическое пространство непрерывно тогда и только тогда, когда оно непрерывно на любом конечном подпространстве.

Определение 6.5. Непрерывное отображение f клеточного пространства X в клеточное пространство Y называется *клеточным*, если $f(\text{sk}_n X) \subset \text{sk}_n Y$ при любом n .

Задача 85. Пусть X и Y обозначают отрезок I , представленный как клеточное пространство двумя способами:

$$X = \{0\} \cup (0, 1) \cup \{1\}, \quad Y = \{0\} \cup (0, 1/2) \cup \{1/2\} \cup (1/2, 1) \cup \{1\}.$$

Будут ли клеточными тождественные отображения $X \rightarrow Y$ и $Y \rightarrow X$?

Приведем некоторые контрпримеры.

Замечание 6.6. Замыкание клетки может не быть клеточным пространством. Пример: разбиение букета $S^2 \vee S^1$, состоящее из одной двумерной клетки (S^2 без отмеченной точки A), одной нульмерной клетки (точка B , противоположная A на S^1), и одной одномерной клетки (S^1 без B). Тогда замыкание двумерной клетки не является клеточным подпространством.

Замечание 6.7. Из (W) не следует (C). Разбиение диска D^2 на двумерную клетку, равную внутренности $\text{Int } D^2$ и бесконечное множество нульмерных клеток, отвечающих точкам граничной окружности S^1 удовлетворяет аксиоме (W) (потому что всегда $F \cap \text{Int } D^2 = F$), но не удовлетворяет аксиоме (C).

Замечание 6.8. Из (C) не следует (W). Возьмем бесконечное семейство $\{I_\alpha\}_{\alpha=1}^\infty$ копий отрезка I , отождествим нулевые концы и топологизируем получившееся множество при помощи метрики: расстояние между точками $t' \in I_{\alpha'}$ и $t \in I_\alpha$ равно $|t - t'|$, если $\alpha = \alpha'$, и равно $t + t'$, если $\alpha \neq \alpha'$. Разбиение построенного пространства на множества $\text{Int } I_\alpha$ и оставшиеся точки не удовлетворяет только аксиоме (W): точки $1/\alpha \in I_\alpha$ составляют последовательность, сходящуюся к 0, и, значит, незамкнутое множество, но пересечение этой последовательности с замыканием любой клетки замкнуто.

Замечание 6.9. Клеточные разбиения хорошо ведут себя по отношению к операциям, за исключением произведения, тензорного произведения и джойна. При последних трех конструкциях может потеряться (W). Тем не менее, если одно из двух пространств локально конечно, то проблемы не возникает.

Задача 86. Проверьте.

С точностью до осторожности с аксиомой (W) клеточные пространства могут быть построены по индукции путем приклеивания клеток следующей размерности к остову предыдущей размерности. Точнее, пусть $\{e_\alpha^n\}$ — все n -мерные клетки пространства X , а $f_\alpha^n : D^n \rightarrow X$ — соответствующие характеристические отображения. Поскольку $f_\alpha^n(S^{n-1}) \subset \text{sk}_{n-1} X$, мы можем сузить f_α^n до отображения $g_\alpha^n : S^{n-1} \rightarrow \text{sk}_{n-1} X$ (отображения g_α^n называются приклеивающими). Рассмотрим несвязную сумму $D = \sqcup_\alpha D_\alpha^n$ n -мерных шаров, по одному на каждую n -мерную клетку пространства X , и положим $S = \sqcup_\alpha S_\alpha^{n-1} \subset D$. Далее, рассмотрим отображения $g^n : S \rightarrow X$ по формуле $g^n|_{S_\alpha^{n-1}} = g_\alpha^n$. Тогда

$$\text{sk}_n X = (\text{sk}_{n-1} X) \cup_{g^n} D.$$

Задача 87. Докажите, что клеточное пространство линейно связно тогда и только тогда, когда линейно связан его первый остов.

Задача 88. Докажите, что клеточное пространство линейно связно тогда и только тогда, когда оно связно.

Определение 6.10. Пара (X, A) называется *парой Борсука* (или корасслоением), если для любого пространства Y и любого непрерывного отображения $F : X \rightarrow Y$ всякая гомотопия $f_t : A \rightarrow Y$, такая, что $f_0 = F|_A$ может быть продолжена до гомотопии $F_t : X \rightarrow Y$, у которой $F_0 = F$.

Теорема 6.11 (Борсук). *Если X — клеточное пространство и A — его клеточное подпространство, то (X, A) — пара Борсука.*

Доказательство. Нам даны отображения $f : A \times I \rightarrow Y$ (гомотопия f_t) и $F : X \times 0 \rightarrow Y$, причем $f|_{A \times 0} = F|_{A \times 0}$. Нам нужно определить такое отображение $\bar{F} : X \times I \rightarrow Y$, что $\bar{F}|_{A \times I} = f$ и $\bar{F}|_{X \times 0} = F$. Мы это сделаем индукцией по остовам. Продолжим сначала f на $(A \cup \text{sk}_0 X) \times I$ “тождественно”:

$$\bar{F}(x, t) := \begin{cases} F(x, 0), & \text{если } x \in (\text{sk}_0 X \setminus A), \\ f(x, t), & \text{если } x \in A. \end{cases}$$

Вопрос о непрерывности мы пока не обсуждаем. Заметим только, что отображение непрерывно на замыкании каждой одномерной клетки, полученной умножением нульмерной клетки на внутренность отрезка. Допустим, что мы продолжили таким образом f на $(A \cup \text{sk}_n X) \times I$, причем отображение непрерывно на замыкании каждой $i+1$ -мерной клетки, полученной умножением i -мерной клетки на внутренность отрезка, $i \leq n$. Продолжим теперь f на $(A \cup \text{sk}_{n+1} X) \times I$, поступая для каждой $n+1$ -мерной клетки e_α^{n+1} следующим образом. Отображение уже задано на замкнутой части границы $e_\alpha^{n+1} \times \text{Int}(I)$, именно, на $e_\alpha^{n+1} \times 0$ (где оно равняется F) и на $\dot{e}_\alpha^{n+1} \times I$. Поскольку это множество равняется объединению конечного числа замкнутых множеств, на которых \bar{F} по предположению индукции непрерывно, то \bar{F} непрерывно и на всем этом

множестве. Пусть $p : D^{n+1} \times I \rightarrow (S^n \times I) \cup (D^{n+1} \times 0)$ — проектирование цилиндра из точки находящейся “несколько выше” верхнего основания. Это ретракция. Определим $p' := \bar{F} \circ \chi \circ p$. Поскольку на внутренности $D^{n+1} \times 1$ верхнего основания цилиндра при приклеивании никаких отождествлений не происходит, то отображение p' определяет продолжение \bar{F} на соответствующую клетку цилиндра. В итоге получаем \bar{F} , продолженное на все пространство. Убедимся, что оно непрерывно, поскольку по построению, ограничение его на замыкание каждой клетки непрерывно. Прообраз замкнутого множества K равняется объединению прообразов $(\bar{F}_\beta)^{-1}(K)$, где \bar{F}_β — ограничения на замыкания клеток. В силу их непрерывности соответствующие прообразы замкнуты. Значит, по аксиоме (W) множество $(\bar{F})^{-1}(K)$ замкнуто, что и требовалось. \square

Следствие 6.12. Пусть X — клеточное пространство, а A — его клеточное подпространство. Если A стягиваемо по себе в точку, то $X/A \sim X$.

Доказательство. Обозначим через p проектирование $X \rightarrow X/A$. Так как A стягиваемо, то существует такая гомотопия $f_t : A \rightarrow A$, что $f_0 = \text{Id}_A$ и $f_1(A)$ есть точка. В силу теоремы Борсука, существует такая гомотопия $F_t : X \rightarrow X$, что $F_0 = \text{Id}_X$ и $F_t|_A = f_t$. В частности, $F_1(A) = x_0 \in A \subset X$. Это означает, что $F_1 = q \circ p$, где $q : X/A \rightarrow X$ — некоторое непрерывное отображение. По построению, $F_1 \sim F_0$, т. е. $q \circ p \sim \text{Id}_X$. Далее, при любом t имеем $F_t(A) \subset A$. Следовательно, $p \circ F_t = q_t \circ p$, где $q_t : X/A \rightarrow X/A$ — некоторая гомотопия. При этом $q_0 = \text{Id}_{X/A}$ и $q_1 = p \circ q$; следовательно, $p \circ q \sim \text{Id}_{X/A}$. \square

Следствие 6.13. Если X — клеточное пространство и A — его клеточное подпространство, то $X/A \sim X \cup CA$, где CA конус над A .

Доказательство. $X/A = (X \cup CA)/CA \sim X \cup CA$; последнее вытекает из предыдущего следствия, примененного к клеточному пространству $X \cup CA$ и его стягиваемому клеточному подпространству CA . \square

Лемма 6.14 (о свободной точке). Пусть U — открытое подмножество пространства \mathbb{R}^p и $\varphi : U \rightarrow \text{Int } D^q$ — такое непрерывное отображение, что множество $V = \varphi^{-1}(d^q) \subset U$ компактно, где d^q — некоторый замкнутый шар в $\text{Int } D^q$. Если $q > p$, то существует такое непрерывное отображение $\psi : U \rightarrow \text{Int } D^q$, совпадающее с φ вне V , что его образ не покрывает всего шара d^q . При этом новое отображение (линейно) гомотопно исходному.

Идея доказательства. Существует два подхода к доказательству. Один основан на аппроксимации отображения гладким. Второй — на аппроксимации линейным на маленьких кусках. Точнее, устраивается триангуляция, достаточно мелкая по сравнению со степенью равномерной непрерывности отображения компакта. \square

Теорема 6.15 (о клеточной аппроксимации). Пусть f — непрерывное отображение клеточного пространства X в клеточное пространство Y , причем на клеточном подпространстве A пространства X отображение f клеточно. Тогда существует такое клеточное отображение $g : X \rightarrow Y$, что $g|_A = f|_A$ и, более того, f гомотопна g относительно A ($f \sim g \text{ rel } A$), т.е. гомотопия постоянна на A .

Доказательство. Пусть отображение f уже сделано клеточным не только на всех клетках из A , но и на всех клетках из X , имеющих размерность $< p$. Возьмем p -мерную клетку $e^p \subset X \setminus A$. Ее образ $f(e^p)$ пересекается лишь с конечным числом клеток пространства Y (это следует из компактности \bar{e}^p по доказательству упражнения 81, а значит, и $f(\bar{e}^p)$, так что можно применить упражнение 82). Выберем среди этих клеток пространства Y клетку наибольшей размерности, скажем, e^q , $\dim e^q = q$. Если $q < p$, она уже удовлетворяет условиям. В противном случае по лемме 6.14 сужение $f|_{A \cup \text{sk}_{p-1} X \cup e^p}$ гомотопно $\text{rel}(A \cup \text{sk}_{p-1} X)$ такому отображению $f' : A \cup \text{sk}_{p-1} X \cup e^p \rightarrow Y$, что $f'(e^p)$ задевает те же клетки, что и $f(e^p)$, но $f'(e^p)$ не содержит всю клетку e^q . В самом деле, пусть $h : D^p \rightarrow X$, $k : D^q \rightarrow Y$ — характеристические отображения, соответствующие клеткам e^p , e^q . Положим $U = h^{-1}(f^{-1}(e^q) \cap e^p)$ и определим отображение $\varphi : U \rightarrow \text{Int } D^q$ как композицию:

$$U \xrightarrow{h} f^{-1}(e^q) \cap e^p \xrightarrow{f} e^q \xrightarrow{k^{-1}} \text{Int } D^q.$$

Заметим, что U является открытым множеством в $\text{Int } D^p \subset \mathbb{R}^p$. Обозначим через $d^q \subset \text{Int } D^q \subset D^q$ замкнутый концентрический шар в D^q . По аксиоме (W) $k(d^q) \subset e^q$ замкнуто в Y , а значит и в \bar{e}^q . Тогда множество $V := \varphi^{-1}d^q$ совпадает с прообразом $k(d^q)$ при отображении $f \circ h : U_* \rightarrow \bar{e}^q$, где $U_* := h^{-1}(f^{-1}(\bar{e}^q) \cap \bar{e}^p)$, $U \subset U_*$. В силу непрерывности f , множество $f^{-1}(\bar{e}^q)$ замкнуто, а значит, и U_* — замкнутое подмножество компакта D^p . Поэтому V компактно как замкнутое подмножество D^p . Поэтому можем применить лемму 6.14 и получить отображение $\psi : U \rightarrow \text{Int } D^q$. Отображение f' мы определим как совпадающее с f вне $h(U)$ и как композицию

$$(4) \quad h(U) \xrightarrow{h^{-1}} U \xrightarrow{\psi} \text{Int } D^q \xrightarrow{k} e^q \subset Y$$

на $h(U)$. Так как ψ совпадает с φ на $U \setminus V$, то (4) совпадает с f на $h(U \setminus V)$, так что f' непрерывно. Оно гомотопно f' относительно $A \cup \text{sk}_{p-1} X$, и даже $A \cup \text{sk}_{p-1} X \cup (e^p \setminus h(V))$. Ясно также, что $f'(e^p)$ не покрывает e^q . Итак, отображение f' обладает всеми необходимыми свойствами.

Теперь выберем точку $y_0 \in e^q$, $y_0 \notin f'(e^p)$, и подвергнем $f'|_{e^p}$ "радиальной гомотопии": если точка $x \in e^p$ не принадлежит $(f')^{-1}(e^q)$, то $f'(x)$ не меняется, а если $f'(x) \in e^q$, то при гомотопии $f'(x)$ движется по образу при характеристическом отображении k прямолинейного отрезка, начинающегося в точке $k^{-1}(y_0)$, проходящего через точку $k^{-1}(f'(x)) \neq k^{-1}(y_0)$ и кончающегося на граничной сфере S^q шара D^q .

Получающееся отображение $f'' : A \cup \text{sk}_{p-1} X \cup e^p$ гомотопно $f|_{A \cup \text{sk}_{p-1} X \cup e^p}$ $\text{rel}(A \cup \text{sk}_{p-1} X)$ и обладает тем свойством, что $f''(e^p)$ задевает q -мерных клеток на одну меньше, чем $f(e^p)$ (и, как и $f(e^p)$, не задевает клеток размерности $> q$). При этом число клеток меньших размерностей, с которыми пересекается образ e^p , может увеличиться. Применив эту процедуру конечное число раз (см. рассуждения в начале доказательства), мы прогомотируем отображение $f|_{A \cup \text{sk}_{p-1} X \cup e^p}$ к отображению, клеточному на $A \cup \text{sk}_{p-1} X \cup e^p$, причем гомотопия будет неподвижной на $A \cup \text{sk}_{p-1} X$. В силу аксиомы (C) это свойство позволяет нам таким образом исправить отображение сразу для всех p -мерных клеток $X \setminus A$, причем в силу (W) гомотопия действительно будет непрерывной. Теперь воспользуемся теоремой Борсука, чтобы продолжить эту гомотопию ограничения $f|_{A \cup \text{sk}_p X}$ на все X , причем $\text{rel}(A \cup \text{sk}_{p-1} X)$. Неподвижную на A гомотопию f_t , связывающую отображение f с клеточным отображением, мы получим, если проделаем последовательно построенные гомотопии

при $p = 0, 1, 2, \dots$, причем p -ю гомотопию мы производим при значении параметра гомотопии $t \in [1 - \frac{1}{2^p}, 1 - \frac{1}{2^{p+1}}]$. Конечное отображение гомотопии f_1 определяется следующим образом: $f_1|_e = f_{1-2^{-p-1}}|_e$, где $p = \dim e$. Непрерывность всей гомотопии обеспечивается аксиомой (W): для каждой клетки e из X гомотопия будет неподвижной, начиная с некоторого $t_e < 1$. \square

Следствие 6.16. *Если X – клеточное пространство с единственной нульмерной клеткой (вершиной), не имеющее других клеток размерности $< q$, то всякое отображение $Y \rightarrow X$ клеточного пространства Y размерности $< q$ гомотопно постоянному отображению. При этом можно рассматривать пунктированные пространства и считать вершину отмеченной точкой.*

Следствие 6.17. $\pi_m(S^n) = 0$ (тривиальная группа) при $m < n$.

Определение 6.18. Пространство X называется n -связным, если при $q \leq n$ множество $\pi(S^q, X)$ состоит из одного элемента (т.е. если любые два отображения $S^q \rightarrow X$ с $q \leq n$ гомотопны).

1-связное пространство называется *односвязным*.

Задача 89. Докажите, что каждое из следующих условий эквивалентно n -связности: (i) $\pi_b(S^q, X)$ состоит из одного элемента при $q \leq n$; (ii) любое непрерывное отображение $S^q \rightarrow X$ продолжается до непрерывного отображения $D^{q+1} \rightarrow X$ при $q \leq n$.

Задача 90. Докажите, что 0-связность — это то же самое, что линейная связность.

Теорема 6.19. *Всякое n -связное клеточное пространство гомотопически эквивалентно клеточному пространству с единственной вершиной и без клеток размерностей $1, 2, \dots, n$.*

Доказательство. Выберем в нашем пространстве X вершину e_0 и соединим с ней остальные вершины путями (возможно в силу задачи 90). Используя теорему о клеточной аппроксимации, мы можем добиться того, чтобы эти пути лежали в одномерном остове пространства X . Пусть s_i — путь, соединяющий вершину e_0 с вершиной e_i . Приклеим при каждом i к X двумерный диск по отображению нижней полуокружности в X при помощи пути s_i . Получим новое клеточное пространство \hat{X} , которое будет содержать X и, кроме того, клетки e_i^1 (верхние полуокружности) и e_i^2 (внутренности приклеенных дисков). То, что границы клеток e_i^2 лежат в одномерном остове, вытекает из того, что этим свойством обладают пути s_i . Ясно, что X есть деформационный ретракт \hat{X} : каждый приклеенный диск можно деформировать на нижнюю полуокружность. Обозначим через Y объединение замыканий клеток e_i^1 . Очевидно, Y стягиваемо; следовательно, $\hat{X}/Y \sim \hat{X} \sim X$, причем у \hat{X}/Y всего одна вершина. Дальнейшее рассуждение совершенно аналогично. Предположим, что $X \sim X'$, причем X' имеет единственную вершину и не имеет клеток размерностей $1, \dots, k-1$, $k \leq n$. В этом случае замыкание каждой k -мерной клетки представляет собой k -мерную сферу. Ввиду n -связности X (и, следовательно, X') включение этой сферы в X' продолжается до непрерывного отображения $(k+1)$ -мерного шара, образ которого, ввиду теоремы о клеточной аппроксимации, можно считать лежащим в $\text{sk}_{k+1} X$. По этому отображению (которое мы считаем отображением нижней полушеры $(k+1)$ -мерной сферы) мы приклеиваем к X' шар D^{k+2} , и подобным образом

мы поступаем для каждой k -мерной клетки пространства X' . Полученное клеточное пространство \widehat{X}' гомотопически эквивалентно X' и содержит стягиваемое подпространство Y — объединение замыканий всех вновь приклеенных $(k+1)$ -мерных клеток (верхних полусфер приклеенных шаров), содержащее все k -мерные клетки. Получаем: $\widehat{X}'/Y \sim \widehat{X}' \sim X' \sim X$, причем у \widehat{X}'/Y всего одна вершина и нет клеток размерностей $1, \dots, k$. \square

Следствие 6.20. Если клеточное пространство X n -связно, а клеточное пространство Y n -мерно, то множество $\pi(Y, X)$ состоит из одного элемента. Это же верно для $\pi_b(Y, X)$, если X и Y имеют отмеченные точки, являющиеся вершинами.

Определение 6.21. Топологическая пара (X, A) называется n -связной, если всякое отображение (D^n, S^{n-1}) гомотопно (как отображение пар) отображению, отображающему все D^n в A .

Теорема 6.22. Всякая n -связная клеточная пара гомотопически эквивалентна клеточной паре (Y, B) , у которой $B \supset \text{sk}_n Y$ (т. е. разность $Y \setminus B$ не содержит клеток размерности $< n$).

Задача 91. Докажите эту теорему.

Задача 92. Придумайте эквивалентные определения n -связной пары в духе упражнения 89 и интерпретации 0-связности и 1-связности пар в духе упражнения 90.

7. НАКРЫТИЯ

Мы предполагаем, что все участвующие пространства являются клеточными.

Определение 7.1. (Линейно связное) пространство T называется *накрывающей* для линейно связного пространства X , если задано такое отображение $p : T \rightarrow X$, что у любой точки $x \in X$ имеется окрестность $U \subset X$, для которой $p^{-1}(U)$ гомеоморфно $U \times \Gamma$, где Γ — дискретное множество, причем диаграмма

$$\begin{array}{ccc} p^{-1}(U) & \approx & U \times \Gamma \\ & \searrow p & \swarrow \text{проекция} \\ & U & \end{array}$$

коммутативна. Отображение $p : T \rightarrow X$ называется в этой ситуации *накрытием*, а окрестности вида U — *элементарными*.

Пример 7.2. а) $p : \mathbb{R} \rightarrow S^1 \subset \mathbb{C}$, $x \mapsto e^{1\pi i x}$.

б) $p : S^1 \rightarrow S^1$, $z \mapsto z^k$.

в) $p : S^n \rightarrow \mathbb{R}P^n$ — отображает точку сферы в прямую, ее содержащую.

г) Декартов квадрат накрытия является накрытием. Для пункта а) — это $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$.

Задача 93. Покажите, что при любом $g \geq 2$ сфера с g ручками способна покрывать сферу с 2 ручками.

Задача 94. Покажите, что при любом $n \geq 2$ букет n окружностей способен покрывать букет двух окружностей.

Лемма 7.3 (о накрывающем пути). Для любого пути $s : I \rightarrow X$ и любой точки $\tilde{x} \in T$, такой, что $p(\tilde{x}) = s(0)$ существует единственный путь $\tilde{s} : I \rightarrow T$, такой, что $\tilde{s}(0) = \tilde{x}$ и $p \circ \tilde{s} = s$.

Доказательство. Для каждого $t \in I$ найдем элементарную окрестность $U(t) \subset X$ точки $s(t)$. В силу компактности I из этих окрестностей можно выбрать последовательность U_1, \dots, U_N , таким образом, что $U_i \supset s(t_i, t_{i+1})$, где $0 = t_1 < t_2 < \dots < t_{N+1} = 1$. Прообраз $p^{-1}U_1$ окрестности U_1 гомеоморфен дискретному семейству таких же окрестностей. Пусть \tilde{U}_1 — та из них, которая содержит точку x . Возьмем $\tilde{s} : [0, t_2] \rightarrow \tilde{U}_1$ равным $(p')^{-1} \circ s|_{[0, t_2]}$, где $p' := p|_{\tilde{U}_1}$ — гомеоморфизм. Заметим, что это поднятие маленького фрагмента пути определено однозначно, так как результирующее отображение \tilde{s} отрезка $[0, t_2]$ должно быть непрерывно, а отрезок, а значит и его образ, связны, так что $\tilde{s}[0, t_2]$ должно лежать в одной из окрестностей, накрывающих U_1 , именно в той, где находится \tilde{x} . Так как p' — гомеоморфизм, то поднятие однозначно.

Затем поделаем то же самое с окрестностью U_2 , точкой $\tilde{s}(t_2)$ и куском пути и т.д. Так как число окрестностей конечно, то процесс конечен, а так как для каждой окрестности он однозначен, то путь с нужными свойствами существует только один. \square

Теорема 7.4 (о накрывающей гомотопии). Пусть $p : T \rightarrow X$ — накрытие, Z — клеточный комплекс, $F : Z \rightarrow T$ — непрерывное отображение и $f_t : Z \rightarrow X$ — такая гомотопия, что $f_0 = p \circ F$. Тогда существует единственная гомотопия $F_t : Z \rightarrow T$, такая, что $F_0 = F$ и $f_t = p \circ F_t$.

Доказательство. Пусть $z \in Z$ — произвольная точка. Формула $t \mapsto f_t(z)$ определяет путь в X . Этот путь единственным образом можно поднять на T так, чтобы поднятый путь начинался в точке $F(z)$. Заставив z пробегать Z , мы получим отображение $Z \times I \rightarrow T$. Это и есть нужная гомотопия. Проверим ее непрерывность и единственность. Единственность сразу следует из единственности накрывающего пути. Непрерывность, по определению клеточного пространства, достаточно проверить на замыканиях клеток, причем можно выбрать более мелкое разбиение на клетки таким образом, что образ замыкания d соответствующей клетки вида $e \times (\alpha, \beta) \subset Z \times I$ при f_t содержится в элементарной окрестности. Тогда $F_t|_d = (p')^{-1} \circ f_t|_d$, поскольку F_t мы определяли через пути, а значит, как в лемме о накрывающем пути. Значит, F_t непрерывно на d и поэтому везде. \square

Теорема 7.5. Пусть $p : T \rightarrow X$ — накрытие, $p(\tilde{x}_0) = x_0$. Тогда $p_* : \pi_1(T, \tilde{x}_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$ — мономорфизм.

Доказательство. Нам надо доказать, что если петля $s : I \rightarrow T$ с началом \tilde{x}_0 проектируется в петлю $s : I \rightarrow X$, гомотопную постоянной петле, то она и сама гомотопна нулю. Фиксируем такую гомотопию $s_t : I \rightarrow X$, что $s_0 = s$, $s_t(0) = s_t(1) = x_0$, $s_1(I) = x_0$. По теореме о накрывающей гомотопии существует такая гомотопия $\tilde{s}_t : I \rightarrow T$, $\tilde{s}_0 = \tilde{s}$ и $p \circ \tilde{s}_t = s_t$. Но так как полный прообраз точки x_0 дискретен в T , то $\tilde{s}_t(0) = \tilde{s}_t(1) = \tilde{x}_0$. $\tilde{s}_1(I) = \tilde{x}_0$, что и требовалось. \square

Определение 7.6. Подгруппа $p_*(\pi_1(T, \tilde{x}_0))$ группы $\pi_1(X, x_0)$ называется *группой накрытия*.

Замечание 7.7. Ясно, что если мы изменим точку \tilde{x}_0 на $\tilde{x}'_0 \in p^{-1}(x_0)$, не меняя точку x_0 , то подгруппа заменится сопряженной (сопряженность определяется классом петли в X , получающейся при проектировании пути, соединяющего \tilde{x}_0 и \tilde{x}'_0 в T). При замене же точки x_0 группы накрытия переводятся друг в друга изоморфизмами вида α_\bullet (см. доказательство теоремы 5.3).

Теорема 7.8. *Имеется каноническое взаимно однозначное соответствие между элементами фактормножества $\pi_1(X, x_0)/p_*(\pi_1(T, \tilde{x}_0))$ и элементами множества $p^{-1}(x_0) \subset T$.*

Доказательство. Рассмотрим петлю с началом x_0 в X . Поднимем ее в T как путь с началом в точке \tilde{x}_0 . Поставим в соответствие петле конец этого пути. Получим точку из $p^{-1}(x_0)$. Ясно, что эта точка зависит только от гомотопического класса исходной петли: при гомотопии петли накрывающий путь тоже подвергается гомотопии, но его конец может варьироваться только в пределах дискретного множества и потому не меняется. Ясно, далее, что петли s_1 и s_2 тогда и только тогда определяют одну точку множества $p^{-1}(x_0)$ (конец поднятия), когда петля $s_1 s_2^{-1}$ накрывается в T петлей, т.е. определяет элемент группы $\pi_1(T, \tilde{x}_0)$. Таким образом, мы определили инъективное отображение $\pi_1(X, x_0)/p_*(\pi_1(T, \tilde{x}_0)) \rightarrow p^{-1}(x_0)$. Его сюръективность следует из связности T : любая точка из $p^{-1}(x_0)$ соединяется с \tilde{x}_0 путем, и проекция этого пути есть петля, поднятие которой есть путь, кончающийся в выбранной точке. \square

Определение 7.9. По теореме и замечанию 7.7 мощность множества $p^{-1}(x_0) \subset T$ не зависит от выбора точки. Эта мощность называется *числом листьев* накрытия p .

Следствие 7.10 (из доказательства теоремы 7.5). *Пусть $\tilde{x} \neq \tilde{x}' \in T$, $p(\tilde{x}) = p(\tilde{x}')$, $\tilde{\gamma}$ — любой путь, соединяющий их. Тогда петля $p \circ \tilde{\gamma}$ не гомотопна нулю в X .*

Доказательство. Пусть $p \circ \tilde{\gamma}$ гомотопна нулю. Тогда поднятие соответствующей гомотопии сдвигает точку \tilde{x} в \tilde{x}' , причем при этой гомотопии точка все время проектируется в $p(\tilde{x}) = p(\tilde{x}')$. Противоречие с дискретностью слоя. \square

Теорема 7.11. *Фундаментальная группа $\pi_1(\bigvee_{\alpha \in A} S_\alpha^1)$ букета окружностей — это свободная группа с системой образующих, соответствующих элементам A .*

Доказательство. Пусть i_α — фиксированное вложение стандартной окружности S^1 в букет X (на α -место), определяющее класс ι_α в фундаментальной группе букета, а также ориентацию S_α^1 . Прежде всего мы докажем при помощи кусочно линейной аппроксимации, что любая петля гомотопна конечному произведению элементов вида ι_α и $(\iota_\alpha)^{-1}$.

На каждой из окружностей S_α^1 , входящих в букет, отметим два отрезка (замкнутых дуги), I_α , и J_α , не содержащих отмеченной точки и таких, что $J_\alpha \subset \text{Int } I_\alpha$. Возьмем петлю $\varphi : I \rightarrow X$ и фиксируем такое n , что если образ некоторого отрезка $J \subset I$ длины $1/n$ пересекается с J_α , то он содержится в I_α . Это возможно в силу равномерной непрерывности. Обозначим через K объединение отрезков вида $[k/n, (k+1)/n]$, образы которых пересекаются с $\bigcup_\alpha J_\alpha$, и заменим отображение φ отображением $\varphi' : I \rightarrow X$, совпадающим с φ вне K и во всех точках вида k/n и линейным на каждом из отрезков указанного вида (линейное отображение отрезка в окружность это отображение вида $x \mapsto (\cos(\lambda(x)), \sin(\lambda(x)))$, где $\lambda(x)$ — линейная функция). Очевидно, что φ' — петля, гомотопная φ . Выделим теперь в каждом отрезке J_α меньший отрезок K_α , не содержащий ни одной точки вида $\varphi'(k/n)$. Заметим, что прообраз $(\varphi')^{-1}(\bigcup_\alpha K_\alpha)$ состоит из конечного числа отрезков, каждый из которых отображается на свое K_α линейно. Наконец подвергнем φ' гомотопии

$$I \xrightarrow{\varphi'} X \xrightarrow{h_t} X,$$

где h_t — гомотопия, растягивающая каждый из отрезков K_α равномерно на свою окружность S_α^1 и сжимающая дополнение $S_\alpha^1 \setminus K_\alpha$ в отмеченную точку. Мы приходим к петле $\psi : I \rightarrow X$, устроенной так: на отрезке I расположено некоторое конечное количество маленьких отрезков, каждый из которых отображением ψ линейно наматывается на свою окружность S_α^1 (в том или в другом направлении); промежутки между этими отрезками отображаются в отмеченную точку. Ясно, что эта петля принадлежит классу требуемого вида

$$(5) \quad \iota_{\alpha_1}^{\pm 1} \dots \iota_{\alpha_s}^{\pm 1}.$$

Для завершения доказательства остается показать, что петля вида (5) не гомотопна нулю, если среди сомножителей не встречаются идущие подряд элементы ι_α и ι_α^{-1} . Рассмотрим $s + 1$ экземпляров нашего букета окружностей и расположим их один над другим. Под этими $s + 1$ экземплярами расположим еще один экземпляр и будем считать, что верхние экземпляры вертикально проектируются на нижний экземпляр. Возьмем теперь первую букву слова (5). В первом и втором экземплярах нашего букета (снизу) в окружности, соответствующей этой первой букве, вырежем один над другим по маленькому отрезку и концы образовавшихся дырок соединим крест-накрест, соответствующим очевидным образом изменив отображение проекции. Затем аналогичным образом соединяем второй экземпляр с третьим, используя вторую букву, потом — третий с четвертым и т.д. Если в нашем слове идут подряд две одинаковые буквы, то нам придется выкидывать два отрезка из одной и той же окружности. Мы сделаем это так, чтобы вторая дырка предшествовала первой, если соответствующие буквы стоят в степени $+1$, и следовала за ней, если буквы стоят в степени -1 . Очевидно, что мы построили $(s + 1)$ -листное накрытие над нашим букетом окружностей и что петля (5) накрывается в нем путем, который начинается в самой нижней точке, проектирующейся в отмеченную, а кончается в самой верхней. Следовательно, наша петля не гомотопна нулю по следствию 7.10. \square

Определение 7.12. Накрытие $p : T \rightarrow X$ называется *регулярным*, если группа накрытия $p_*(\pi_1(T, \tilde{x}_0))$ является нормальной подгруппой в $\pi_1(X, x_0)$.

Задача 95. Докажите, что накрытие $p : T \rightarrow X$ регулярно тогда и только тогда, когда никакая петля в X не служит образом одновременно образом замкнутого пути и образом незамкнутого пути в T .

Задача 96. Докажите, что если $p : T \rightarrow X$ — регулярное накрытие, то существует такое свободное действие группы $G = \pi_1(X, x_0)/\pi_1(T, \tilde{x}_0)$ в T , что $X = T/G$, точнее, что орбиты этого действия совпадают с множествами $p^{-1}(x)$.

Задача 97. Верно и обратное: если группа G действует в пространстве T свободно и дискретно (т. е. каждая точка $\tilde{x} \in T$ обладает такой окрестностью U , что $gU \cap g'U = \emptyset$ для любых различных $g, g' \in G$), то проекция $p : T \rightarrow T/G =: X$ является регулярным накрытием, причем $\pi_1(X)/\pi_1(T) = G$.

Задача 98. Докажите, что двулистные накрытия всегда регулярны. Постройте пример трехлистного нерегулярного накрытия над восьмеркой.

Определение 7.13. Накрытие $p : T \rightarrow X$ называется *универсальным*, если T односвязно. Очевидно, что универсальное накрытие регулярно.

Замечание 7.14. Пробраз произвольной точки пространства X в его универсальной накрывающей находится во взаимно однозначном соответствии с группой $\pi_1(X)$.

Теорема 7.15. *Фундаментальная группа пространства $\mathbb{R}P^n$, $n \geq 2$, изоморфна \mathbb{Z}_2 .*

Доказательство. Естественная проекция $S^n \rightarrow \mathbb{R}P^n$, является универсальным двулистным накрытием. \square

Теорема 7.16 (теорема о поднятии отображения). *Пусть $p : T \rightarrow X$ — накрытие, Z — линейно связное клеточное пространство, причем $\tilde{x}_0 \in T$, $x_0 = p(\tilde{x}_0) \in X$ и $z_0 \in Z$ — отмеченные точки. а $f : Z \rightarrow X$ — непрерывное отображение, переводящее z_0 в x_0 . Тогда для существования такого непрерывного отображения $F : Z \rightarrow T$, что $F(z_0) = \tilde{x}_0$ и $p \circ F = f$ необходимо и достаточно, чтобы $f_*(\pi_1(Z, z_0)) \subset p_*(\pi_1(T, \tilde{x}_0))$.*

Доказательство. Пусть F' и F'' — два таких отображения. Если $z \in Z$ — произвольная точка и $s : I \rightarrow Z$ — путь, соединяющий z_0 с z , то пути $F' \circ s$ и $F'' \circ s$ накрывают путь $f \circ s$ и имеют общее начало, поэтому совпадают; следовательно, $F''(z) = F'' \circ s(1) = F' \circ s(1) = F'(z)$.

Для построения F берем для точки $z \in Z$ путь $s : I \rightarrow Z$, соединяющий z_0 и z , строим поднятие \tilde{s} с началом в точке \tilde{x}_0 пути $f \circ s : I \rightarrow X$ и полагаем $F(z) = \tilde{s}(1)$. Для того чтобы эта конструкция была корректной, необходимо и достаточно, чтобы для любого другого пути $s' : I \rightarrow Z$, соединяющего z_0 с z , соответствующий путь \tilde{s}' кончался в той же точке, что и \tilde{s} , т. е. чтобы петля $f \circ (s(s')^{-1})$ накрывалась в T петлей. Это, очевидно, равносильно включению из формулировки. \square

Следствие 7.17. *Пусть Z — односвязный клеточный комплекс, а $p : T \rightarrow X$ — накрытие. Тогда $p_* : C_b(Z, T) \rightarrow C_b(Z, X)$ — гомеоморфизм, а $p_* : \pi_b(Z, T) \rightarrow \pi_b(Z, X)$ — биекция.*

8. КЛЕТОЧНЫЕ ПРОСТРАНСТВА И ФУНДАМЕНТАЛЬНАЯ ГРУППА

Как уже указывалось, отображение окружности, не обязательно переводящее отмеченную точку в отмеченную, определяет элемент фундаментальной группы с точностью до сопряженности. Пусть X — клеточное пространство с единственной вершиной e^0 , одномерными клетками e_i^1 , $i \in I$, и двумерными клетками e_j^2 , $j \in J$. Характеристические отображения $f_j : D^2 \rightarrow X$ определяют отображения $g_j : S^1 \rightarrow X$ ("приклеивающие отображения"), которые, в силу сказанного, определяют некоторые элементы $\beta_j \in \pi_1(\text{sk}_1 X)$ с точностью до сопряженности. При этом $\text{sk}_1 X$ — букет окружностей \bar{e}_i^1 , и по теореме 7.11 $\pi_1(\text{sk}_1 X, e^0)$ — свободная группа с соответствующими образующими.

Теорема 8.1. *Группа $\pi_1(X, e^0)$ есть группа с системой образующих e_i^1 , $i \in I$, и с системой определяющих соотношений β_j , $j \in J$.*

Доказательство. По теореме о клеточной аппроксимации, отображение

$$i_* : \pi_1(\text{sk}_1 X, e^0) \rightarrow \pi_1(X, e^0),$$

индуцируемое включением $i : \text{sk}_1 X \rightarrow X$, является эпиморфизмом.

Покажем, что $\beta_j \in \text{Ker } i_*$ для любого $j \in J$. Действительно, отображение $g_j : S^1 \rightarrow \text{sk}_1 X$ продолжается до отображения $f_j : D^2 \rightarrow X$ и потому определяет тривиальный элемент в группе $\pi_1(X, g_j(y_0))$; но этот элемент соответствует элементу β_j

при некотором изоморфизме $\pi_1(X, g_j(y_0)) \cong \pi_1(X, e^0)$ вида α_\bullet . По теореме о клеточной аппроксимации он поднимается до изоморфизма соответствующих групп $\text{sk}_1 X$ (можно считать α лежащим в $\text{sk}_1 X$). Но α_\bullet переводит ядро в себя.

Обратно, покажем, что нормальная подгруппа $\text{Ker } i_*$ содержится в нормальной подгруппе группы $\pi_1(\text{sk}_1 X, e^0)$, порожденной β_j , $j \in J$. Будем считать, что клетки e_j^2 отождествлены с копиями открытого диска $\text{Int } D^2$ посредством характеристических отображений; таким образом, мы получаем возможность говорить о концентрических дисках, прямолинейных отрезках и т.п. в клетках e_j^2 . Построим в каждой клетке e_j^2 концентрические диски $d_{1j}, d_{2j}, d_{3j}, d_{4j}$, радиусов $1/5, 2/5, 3/5, 4/5$. Пусть $\gamma \in \text{Ker } i_*$, а $\varphi : S^1 \rightarrow \text{sk}_1 X$ — его представитель. В силу выбора γ отображение φ продолжается до непрерывного отображения $\Phi : D^2 \rightarrow X$, причем теорема о клеточной аппроксимации позволяет считать, что $\Phi(D^2) \subset \text{sk}_2 X$. Триангулируем D^2 настолько мелко, что если Δ — симплекс триангуляции и $\Phi(\Delta)$ при некотором j пересекается с d_{4j} , то $\Phi(\Delta) \subset e_j^2$ и $\text{diam } \Phi(\Delta) < 1/5$. Пусть K — объединение тех симплексов этой триангуляции, образы которых при Φ пересекаются с $\cup_j d_{4j}$. Рассмотрим отображение $\Phi' : K \rightarrow \text{sk}_2 X$, совпадающее с Φ на вершинах триангуляции и линейное на каждом симплексе. Отображения $\Phi|_K$ и Φ' соединяются прямолинейной (в клетках e_j^2) гомотопией $\Phi_t : K \rightarrow \text{sk}_2 X$, $\Phi_0 = \Phi|_K$, $\Phi_1 = \Phi'$. Определим отображение $\Phi'' : D^2 \rightarrow X$ формулой

$$\Phi''(u) = \begin{cases} \Phi(u), & \text{если } \Phi(u) \notin \cup_j d_{3j} \\ \Phi'(u), & \text{если } \Phi(u) \in \cup_j d_{2j} \\ \Phi_{3-5\rho(u)}(u), & \text{если } \Phi(u) \in \cup_j (d_{3j} \setminus d_{2j}) \end{cases}$$

где $\rho(u)$ — расстояние от $\Phi(u)$ до центра $e_j^2 \ni \Phi(u)$. Отображение Φ'' является кусочно линейным на прообразе объединения $\cup_j d_{1j}$. Зафиксируем в каждом d_{1j} маленький диск δ_j , не пересекающийся с Φ'' -образами никаких вершин и ребер триангуляции K . Тогда Φ'' -прообраз каждого из дисков δ_j будет состоять из конечного числа овальных областей (кусков плоскости, ограниченных эллипсами), каждая из которых линейно отображается посредством Φ'' на δ_j . Наконец, рассмотрим отображение $\omega : \text{sk}_2 X \rightarrow \text{sk}_2 X$, тождественное на $\text{sk}_1 X$, линейно растягивающее каждый диск δ_j на свою клетку e_j^2 и сминающее $e_j^2 \setminus \delta_j$ на границу клетки e_j^2 . Отображение $\Psi : D^2 \rightarrow X$, $\Psi(u) := \omega(\Phi''(u))$, продолжает, как и Φ , отображение $\varphi : S^1 \rightarrow \text{sk}_1 X$, отображает в $\text{sk}_1 X$ дополнение к конечному набору E_1, \dots, E_N неперекрывающихся овальных областей и отображает каждую из этих овальных областей линейно на одну из двумерных клеток. Соединим точку $y_0 \in S^1 \subset D^2$ несамопересекающимися и попарно непересекающимися путями s_1, \dots, s_N с какими-нибудь точками y_1, \dots, y_N границ областей E_1, \dots, E_N и обозначим через $\sigma_1, \dots, \sigma_N$ петли с началами y_1, \dots, y_N обходящие эти границы против часовой стрелки; при этом можно считать, что пути $\sigma_1, \dots, \sigma_N$ занумерованы в порядке их выхода, против часовой стрелки, из точки y_0 . Очевидно, петля σ , обходящая границу S^1 диска D^2 против часовой стрелки из точки y_0 , гомотопна в $D^2 \setminus \cup_i \text{Int } E_i$ петле

$$(s_1 \sigma_1 s_1^{-1})(s_2 \sigma_2 s_2^{-1}) \dots (s_N \sigma_N s_N^{-1}).$$

Следовательно, петля φ гомотопна (в $\text{sk}_1 X$) петле

$$[\Psi \circ (s_1 \sigma_1 s_1^{-1})] [\Psi \circ (s_2 \sigma_2 s_2^{-1})] \dots [\Psi \circ (s_N \sigma_N s_N^{-1})].$$

Но петля $[\Psi \circ (s_i \sigma_i s_i^{-1})]$ определяет в $\pi_1(\text{sk}_1 X, e^0)$ элемент, сопряженный с $\beta_j^{\pm 1}$, где j — номер клетки $\Psi(E_i)$, а знак в показателе зависит от того, в какую сторону петля $\Psi \circ \sigma_i$ обходит e_j^2 . Мы видим, что класс γ петли φ действительно принадлежит нормальной подгруппе группы $\pi_1(\text{sk}_1 X, e^0)$, порожденной $\beta_j, j \in J$. \square

Следствие 8.2. $\pi_1(X) = \pi_1(\text{sk}_2 X)$ для любого клеточного пространства X .

Напомним, что сфера с g ручками получается как клеточное пространство с одной 2-клеткой, представляемой как многоугольник с $4g$ сторонами, разбитыми на подряд идущие четверки вида $a_i b_i a_i^{-1} b_i^{-1}$, т. е. первая сторона склеивается с третьей, но с противоположным направлением, а вторая — с четвертой с противоположным направлением. Таким образом, одномерных клеток у этого разбиения имеется $2g$ штук: $a_i, b_i, i = 1, \dots, g$, а нульмерная — одна. Непосредственно из описания этой клеточной структуры и из теоремы 8.1 получаем следующее утверждение.

Теорема 8.3. *Фундаментальная группа сферы с g ручками порождена $2g$ образующими $a_i, b_i, i = 1, \dots, g$, связанными одним соотношением*

$$a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \dots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1} = e.$$

В частности, для тора $\pi_1(\mathbb{T}^2) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$. Это же можно получить из следующей задачи:

Задача 99. $\pi_1(X \times Y) = \pi_1(X) \times \pi_1(Y)$.

Для неориентируемых поверхностей (см. [1, §5 гл. 4]), используя аналогичное представление, получаем следующее.

Теорема 8.4. *Фундаментальная группа проективной плоскости с g ручками или бутылки Клейна с g ручками порождена образующими c_1, \dots, c_h , где в случае проективной плоскости $h = 2g + 1$ и в случае бутылки Клейна $h = 2g + 2$, связанными одним соотношением $(c_1)^2 \dots (c_h)^2 = e$.*

9. ГОМОТОПИЧЕСКИЕ ГРУППЫ

В соответствии с общим определением, гомотопические группы $\pi_1(X, x_0)$ топологического пространства X с отмеченной точкой x_0 — множество гомотопических классов отображений $S^n \rightarrow X$, переводящих отмеченную точку сферы S^n в точку x_0 . Сами эти отображения называются *сфероидами*. Это то же самое, что отображение n -мерного куба I^n в X , переводящее границу куба ∂I^n в точку x_0 . Сумма двух сфероидов $f, g : S^n \rightarrow X$ определяется как сфероид построенный следующим образом. Сначала экватор сферы S^n (содержащий отмеченную точку) сжимается в точку, в результате чего сфера превращается в букет двух сфер, затем сферы, составляющие этот букет, отображаются в X с помощью отображений f и g . На языке кубов: если заданы сфероиды $f, g : I^n \rightarrow X$ то сумма $f + g$ определяется как отображение $I^n \rightarrow X$, совпадающее на левой половине куба с композицией f и сжатия куба вдвое, на правой половине — с композицией g и сжатия. Сложение сфероидов не является групповой операцией. Однако оно гомотопически инвариантно и индуцирует групповую операцию $\pi_1(X, x_0)$. При $n \geq 2$ эта операция коммутативна. Действительно, пусть f' и g' — указанные выше сжатия, так что

$$(f + g)(t_1, \dots, t_n) = \begin{cases} f'(t_1, \dots, t_n), & \text{если } t_1 \leq 1/2, \\ g'(t_1, \dots, t_n), & \text{если } t_1 \geq 1/2, \end{cases}$$

причем любые точки, у которых хотя бы одна координата равна 0 или 1, а также у которых $t_1 = 1/2$, отображаются в x_0 . Определим гомотопию при $t \in [0, 1/2]$ как

$$h_t(t_1, \dots, t_n) = \begin{cases} f'(t_1, \frac{t_2}{1-t}, \dots, t_n), & \text{если } t_1 \leq 1/2, t_2 \leq 1-t, \\ x_0, & \text{если } t_1 \leq 1/2, t_2 \geq 1-t, \\ x_0, & \text{если } t_1 \geq 1/2, t_2 \leq t, \\ g'(t_1, \frac{t_2-t}{1-t}, \dots, t_n), & \text{если } t_1 \geq 1/2, t_2 \geq t. \end{cases}$$

Вспоминая, какие точки отображаются в x_0 , видим, что гомотопия непрерывна. При $t \in [1/2, 1]$ определим гомотопию по формулам:

$$h_t(\mathbf{t}) = \begin{cases} f'(t_1 - t + \frac{1}{2}, 2 \cdot t_2, \dots, t_n), & \text{если } t_1 \in [t - \frac{1}{2}, t], t_2 \leq \frac{1}{2}, \\ x_0, & \text{если } t_1 \in [0, t - \frac{1}{2}] \cup [t, 1], t_2 \leq \frac{1}{2}, \\ x_0, & \text{если } t_1 \in [0, 1-t] \cup [\frac{3}{2} - t, 1], t_2 \geq \frac{1}{2}, \\ g'(t_1 + t - \frac{1}{2}, 2 \cdot (t_2 - \frac{1}{2}), \dots, t_n), & \text{если } t_1 \in [1-t, \frac{3}{2} - t], t_2 \geq \frac{1}{2}, \end{cases}$$

где $\mathbf{t} = (t_1, \dots, t_n)$. Наконец, на третьем этапе применяем гомотопию “по t_2 ”, обратную к первой гомотопии, но с f' в области $t_1 \geq 1/2$ и g' — в области $t_1 \leq 1/2$ (т. е. наоборот по отношению к первой гомотопии).

Задача 100. Выписать явные формулы для последней гомотопии.

Заметим, что построить указанную гомотопию можно было только имея два параметра — например, t_1 и t_2 . Т. о. метод не работает для π_1 . Более того, как показывает теорема 8.1, π_1 может быть некоммутативной (например, букет двух окружностей).

Путь $\alpha : I \rightarrow X$, соединяющий точки $x_0, x_1 \in X$, индуцирует изоморфизм $\alpha_\bullet : \pi_n(X, x_0) \rightarrow \pi_n(X, x_1)$, определенный следующим образом. Пусть $f : S^n \rightarrow X$, $f(*) = x_0$. Тогда $\alpha_\bullet f$ отображает экваториальную сферу S^{n-1} в точку x_0 , верхнюю полусферу — при помощи отображения f , а нижнюю — на путь α (каждая нижняя половинка меридиана отображается на α). Точнее, если $\omega : S^n \rightarrow S^n \vee I$ отображает верхнюю полусферу на сферу, а нижнюю — на отрезок, то

$$\alpha_\bullet f : S^n \xrightarrow{\omega} S^n \vee I \xrightarrow{f \vee \alpha} X.$$

Легко проверить, что α_\bullet — изоморфизм групп (обратный — $(\alpha^{-1})_\bullet$), а при $n = 1$ он совпадает с изоморфизмом построенным ранее.

Если при данном n изоморфизм α_\bullet от α не зависит, то пространство X называется n -простым. Пространства, n -простые при всех n , называются простыми.

Задача 101. Докажите, что любое H -пространство просто, в частности, фундаментальная группа любого H -пространства коммутативна.

Задача 102. $\pi_n(X \times Y, (x_0, y_0)) = \pi_n(X, x_0) \times \pi_n(Y, y_0)$.

Теорема 9.1. Если $p : T \rightarrow X$ — накрытие и $n \geq 2$, то $p_* : \pi_n(T, \tilde{x}_0) \rightarrow \pi_n(X, p(\tilde{x}_0))$ — изоморфизм.

Доказательство. Это следует из следствия 7.17, поскольку $\pi_1(S^n) = 0$, при $n \geq 2$. \square

Теорема 9.2.

$$\pi_n(S^1) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{при } n = 1, \\ 0 & \text{при } n \geq 2. \end{cases}$$

Доказательство. Первое доказано в теореме 5.5. В силу существования накрытия $\mathbb{R} \rightarrow S^1$, по предыдущей теореме $\pi_n(S^1) \cong \pi_n(\mathbb{R}) = 0$, поскольку \mathbb{R} стягиваемо. \square

Задача 103. а) Докажите, что гомотопические группы π_n , $n \geq 2$, букета окружностей тривиальны.

б) Используя а), докажите, что двумерная компактная поверхность с краем обладает тем же свойством.

в) Используя неуниверсальное накрытие докажите то же самое для поверхности без края.

Определение 9.3. Пусть (X, A) — пара с отмеченной точкой $x_0 \in A$ и $n \geq 2$. *Относительная гомотопическая группа* $\pi_n(X, A; x_0)$ определяется как множество гомотопических классов n -мерных *относительных сфероидов*, которые, в свою очередь, определяются с помощью шаров или кубов. Шаровой относительный сфероид — это отображение $D^n \rightarrow X$, переводящее $S^{n-1} \subset D^n$ в A и переводящее отмеченную точку $y_0 \in A \subset X$ в x_0 . Кубический относительный сфероид — это отображение $I^n \rightarrow X$, переводящее в A границу ∂I^n и переводящее в x_0 часть $\partial I^n \setminus I^{n-1}$ этой границы. Относительные сфероиды называются *гомотопными*, если они гомотопны в классе относительных сфероидов. Сумма $f + g$ (кубических) относительных сфероидов (так же как и абсолютных) определяется формулой

$$(f + g)(t_1, t_2, \dots, t_n) = \begin{cases} f(2t_1, t_2, \dots, t_n), & \text{если } t_1 \leq 1/2, \\ g(2t_1 - 1, t_2, \dots, t_n), & \text{если } t_1 \geq 1/2. \end{cases}$$

Задача 104. Проверьте для $\pi_n(X, A; x_0)$ выполнение групповых аксиом; нулем служит класс любого относительного сфероида $f : I^n \rightarrow X$, для которого $f(I^n) \subset A$.

Задача 105. Покажите, что при $n \geq 3$ группа $\pi_n(X, A; x_0)$ коммутативна.

Если $(X, A), (Y, B)$ — пары с отмеченными точками $x_0 \in A, y_0 \in B$, то непрерывное отображение $f : X \rightarrow Y$ такое, что $f(A) \subset B$ и $f(x_0) = y_0$ (пишут $f : (X, A; x_0) \rightarrow (Y, B, y_0)$) индуцирует гомоморфизмы $f_* : \pi_n(X, A; x_0) \rightarrow \pi_n(Y, B, y_0)$. Гомотопные отображения индуцируют одинаковые гомоморфизмы, в частности, у гомотопически эквивалентных пар гомотопические группы одинаковы.

Зависимость групп $\pi_n(X, A; x_0)$ от отмеченной точки аналогична зависимости от отмеченной точки абсолютных гомотопических групп: путь $\alpha : I \rightarrow A$, соединяющий $x_0 \in A$ с $x_1 \in A$, индуцирует изоморфизм $\alpha_* : \pi_n(X, A; x_0) \cong \pi_n(X, A; x_1)$.

В множествах $\pi_0(X, x_0)$ и $\pi_1(X, A; x_0)$ отсутствует естественная групповая структура, хотя имеется выделенный элемент — “единица” — класс постоянного сфероида $S^0 \rightarrow x_0$ или $D^1 \rightarrow x_0$.

Определение 9.4. Под точностью для отображений множеств с выделенным элементом. подразумевается, что образ предыдущего отображения совпадает с прообразом выделенного элемента.

Теорема 9.5 (точная гомотопическая последовательность пары). *Последовательность*

$$\begin{aligned} \dots \xrightarrow{\partial} \pi_n(A, x_0) \xrightarrow{i_*} \pi_n(X, x_0) \xrightarrow{j_*} \pi_n(X, A; x_0) \xrightarrow{\partial} \pi_{n-1}(A, x_0) \xrightarrow{i_*} \dots \\ \dots \xrightarrow{j_*} \pi_1(X, A; x_0) \xrightarrow{\partial} \pi_0(A, x_0) \xrightarrow{i_*} \pi_0(X, x_0) \end{aligned}$$

в которой

- (1) гомоморфизм i_* индуцирован вложением пар $i : (A, x_0) \hookrightarrow (X, x_0)$;
- (2) гомоморфизм j_* индуцирован тождественным отображением $j : X \rightarrow X$, рассматриваемым как отображение пар $j : (X, x_0) \rightarrow (X, A)$;
- (3) гомоморфизм ∂ отображает класс относительного сфероида

$$f : (I^n, \partial I^n, \partial I^n \setminus I^{n-1}) \rightarrow (X, A, x_0)$$

в класс абсолютного сфероида $f|_{I^{n-1}} : (I^{n-1}, \partial I^{n-1}) \rightarrow (A, x_0)$, или, по-другому, класс относительного сфероида $f : (D^n, S^{n-1}, y_0) \rightarrow (X, A, x_0)$ в класс абсолютного сфероида $f|_{S^{n-1}} : (S^{n-1}, y_0) \rightarrow (A, x_0)$;

является точной.

Доказательство. $\boxed{\text{Ker } j_* \supset \text{Im } i_*}$ Для любого сфероида $f : I^n \rightarrow A$ сфероид $i \circ f : I^n \rightarrow X$ определяет нулевой элемент группы $\pi_n(X, A; x_0)$, поскольку его образ содержится в A .

$\boxed{\text{Ker } j_* \subset \text{Im } i_*}$ Пусть $f : I^n \rightarrow X$ — сфероид пространства X , представляющий элемент из $\text{Ker } j_*$, а $F : I^n \times I \rightarrow X$ — гомотопия, соединяющая f с постоянным отображением в классе относительных сфероидов пары (X, A) ; очевидно, F является отображением куба I^{n+1} в X , совпадающее на грани $x_{n+1} = 0$ с f , отображающее грань $x_n = 0$ в A и отображающее оставшуюся часть границы ∂I^{n+1} в x_0 . Пусть $I_t^n \subset I^{n+1}$ — сечение куба I^{n+1} плоскостью $tx_n + (1-t)x_{n+1} = 0$. Тогда $I_t^n \approx I^n$ и $F|_{I_t^n} : I_t^n = I^n \rightarrow X$ — гомотопия, связывающая (в классе абсолютных сфероидов пространства X) сфероид f со сфероидом, образ которого содержится в A .

$\boxed{\text{Ker } \partial \supset \text{Im } j_*}$ Действительно, если $f : I^n \rightarrow X$ — абсолютный сфероид, то $f|_{I^{n-1}}$ — постоянное отображение.

$\boxed{\text{Ker } \partial \subset \text{Im } j_*}$ Пусть $f : I^n \rightarrow X$ — относительный сфероид, а $g_t : I^{n-1} \rightarrow A$ — гомотопия, связывающая абсолютный сфероид $f|_{I^{n-1}}$ пространства A с постоянным сфероидом. Рассмотрим гомотопию $f_t : \partial I^n \rightarrow X$, совпадающую с g_t на I^{n-1} и переводящую $\partial I^n \setminus I^{n-1}$ в x_0 . Распространим ее (пользуясь теоремой Борсука) до гомотопии $h_t : I^n \rightarrow X$ сфероида f . Очевидно, h_t — гомотопия, соединяющая f в классе относительных сфероидов с постоянным сфероидом.

$\boxed{\text{Ker } i_* \supset \text{Im } \partial}$ Если абсолютный сфероид $f : I^{n-1} \rightarrow A$ является сужением относительного сфероида $g : I^n \rightarrow X$, то $g_t = g|_{I^{n-1} \times t} \approx I^{n-1} \rightarrow X$ — гомотопия, связывающая в X сфероид f с постоянным сфероидом.

$\boxed{\text{Ker } i_* \subset \text{Im } \partial}$ Если $g_t : I^{n-1} \rightarrow X$ — гомотопия, связывающая в X сфероид $f = g_0 : I^{n-1} \rightarrow A$ с постоянным сфероидом, то $g : I^n \rightarrow X$, $g(x_1, \dots, x_n) := g_{x_n}(x_1, \dots, x_{n-1})$ — относительный сфероид пары (X, A) , сужение которого на A равно f . \square

Следствие 9.6. • Если A стягиваемо, то $j_* : \pi_n(X) \cong \pi_n(X, A)$ при $n \geq 1$;

- если X стягиваемо, то $\partial : \pi_n(X, A) \cong \pi_{n-1}(A)$ при $n \geq 1$;
- если A есть деформационный ретракт X , то $\pi_n(X, A) = 0$ при $n \geq 1$;

Задача 106. (1) Если A — ретракт X , то при всех n

$$\begin{aligned} i_* : \pi_n(A) &\rightarrow \pi_n(X) && \text{— мономорфизм,} \\ j_* : \pi_n(X) &\rightarrow \pi_n(X, A) && \text{— эпиморфизм,} \\ \partial : \pi_n(X, A) &\rightarrow \pi_{n-1}(A) && \text{— нулевой гомоморфизм} \end{aligned}$$

и $\pi_n(X) = \pi_n(X, A) \oplus \pi_n(A)$.

(2) Если A стягиваемо по X в точку, то

$$\begin{aligned}
j_* : \pi_n(X) &\rightarrow \pi_n(X, A) && \text{— мономорфизм,} \\
\partial : \pi_n(X, A) &\rightarrow \pi_{n-1}(A) && \text{— эпиморфизм,} \\
i_* : \pi_n(A) &\rightarrow \pi_n(X) && \text{— нулевой гомоморфизм}
\end{aligned}$$

и $\pi_n(X, A) = \pi_n(X) \oplus \pi_{n-1}(A)$.

(3) Если существует гомотопия $f_t : X \rightarrow X$, $f_0 = \text{Id}$, $f_1(X) \subset A$, то

$$\begin{aligned}
\partial : \pi_n(X, A) &\rightarrow \pi_{n-1}(A) && \text{— мономорфизм,} \\
i_* : \pi_n(A) &\rightarrow \pi_n(X) && \text{— эпиморфизм,} \\
j_* : \pi_n(X) &\rightarrow \pi_n(X, A) && \text{— нулевой гомоморфизм}
\end{aligned}$$

и $\pi_n(A) = \pi_n(X) \oplus \pi_{n+1}(X, A)$.

Из теоремы и леммы 1.29 о пяти гомоморфизмах получаем следующее

Следствие 9.7. Пусть (X, A) и (Y, B) — топологические пары с отмеченными точками $x_0 \in A$ и $y_0 \in B$, а $f : X \rightarrow Y$ — такое непрерывное отображение, что $f(A) \subset B$ и $f(x_0) = y_0$. Тогда любые два из следующих трех утверждений влекут за собой третье:

- (1) $f_* : \pi_n(X, x_0) \rightarrow \pi_n(Y, y_0)$ — изоморфизм при всех n ;
- (2) $(f|_A)_* : \pi_n(A, x_0) \rightarrow \pi_n(B, y_0)$ — изоморфизм при всех n ;
- (3) $f_* : \pi_n(X, A, x_0) \rightarrow \pi_n(Y, B, y_0)$ — изоморфизм при всех n .

10. РАССЛОЕНИЯ

Определение 10.1. (Локально тривиальным) расслоением называется четверка (E, B, F, p) , где E , B и F — пространства, а $p : E \rightarrow B$ — такое отображение, что любая точка $x \in B$ обладает такой окрестностью $U \subset B$, что имеется гомеоморфизм $\varphi : p^{-1}(U) \approx U \times F$, замыкающий коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc}
p^{-1}(U) & \xrightarrow{\varphi} & U \times F \\
& \searrow p & \swarrow \text{проекция} \\
& & B.
\end{array}$$

При этом p называется *проекцией*, E — *тотальным пространством*, B — *базой* и F — *слоем* расслоения, $p^{-1}(x) \approx F$ — *слоем над точкой x* . Расслоение $p : E \rightarrow B$ называется *тривиальным*, если имеется коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc}
E & \xrightarrow{\cong} & B \times F \\
& \searrow p & \swarrow \text{проекция} \\
& & B.
\end{array}$$

Два расслоения (E, B, F, p) и (E', B, F', p') называются *эквивалентными*, если существует гомеоморфизм $f : E \rightarrow E'$ и коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc}
E & \xrightarrow[\cong]{f} & E' \\
& \searrow p & \swarrow p' \\
& & B.
\end{array}$$

При этом, конечно, $F = F'$.

Примерами расслоений являются накрытия (расслоения с дискретным слоем), лента Мебиуса с проекцией на серединную окружность (нетривиальное расслоение).

Задача 107. Докажите, что отображение

$$p : E = S^3 \rightarrow B = S^2 = \mathbb{C}P^1, \quad S^3 = \{(z_1, z_2) \mid z_1 \bar{z}_1 + z_2 \bar{z}_2 = 1\} \subset \mathbb{C}^2, \quad p(z_1, z_2) = (z_1 : z_2)$$

является локально тривиальным нетривиальным расслоением (*расслоение Хопфа*). Рассмотрите естественное обобщение $(S^{2n+1}, \mathbb{C}P^n, S^1, p)$. Убедитесь, что эти расслоения являются частными случаями следующих более общих.

Пусть G — группа Ли, H — ее компактная подгруппа, $p : G \rightarrow G/H$ — естественная проекция. Тогда $(G, G/H, H, p)$ — расслоение.

Пусть компактная группа Ли G свободно гладко действует на многообразии X , $p : X \rightarrow X/G$ — естественная проекция. Тогда $(X, X/G, G, p)$ — расслоение.

Определение 10.2. Пусть $\xi = (E, B, F, p)$ — расслоение, $B' \subset B$, и $E' = p^{-1}(B')$. Локально-тривиальное расслоение $\xi|_{B'} := (E', B', F, p')$, где $p' = p|_{E'}$, называется *сужением ξ на B'* .

Определение 10.3. Пусть $\xi = (E, B, F, p)$ — расслоение, а $f : B' \rightarrow B$ — непрерывное отображение. Обозначим через E' подмножество таких точек (e, b') произведения $E \times B'$, что $p(e) = f(b')$. Пусть $p' : E' \rightarrow B'$, $p'(e, b') = b'$. Говорят, что локально тривиальное расслоение $f^*\xi = (E', B', F, p')$ *индуцировано расслоением ξ при помощи f* , или что оно является *обратным образом расслоения ξ при f* .

Задача 108. Если для локально тривиальных расслоений $\xi' = (E', B', F, p')$ и $\xi = (E, B, F, p)$ существует непрерывное отображение $E' \rightarrow E$, гомеоморфно отображающее слои над точкой $b' \in B$ в слои над точкой $f(b')$, то ξ' эквивалентно $f^*\xi$.

Теорема 10.4 (Фельдбау). *Всякое локально тривиальное расслоение над q -мерным кубом I^q тривиально.*

Доказательство. В силу локальной тривиальности существует такое (достаточно мелкое) разбиение куба на маленькие (одинаковые) кубы, что над каждым из них расслоение тривиально. Тогда для доказательства теоремы достаточно уметь доказывать следующий факт: если некоторый куб (параллелепипед) разбит на два параллелепипеда и над каждым из них расслоение тривиально, то и над всем кубом оно тоже тривиально. Будем считать, что это — исходный куб I^q и разбит он на

$$I_1^q = \{(x_1, \dots, x_q) \in I^q \mid x_q \leq 1/2\}, \quad I_2^q = \{(x_1, \dots, x_q) \in I^q \mid x_q \geq 1/2\}.$$

Пусть $p_1 : E_1 \rightarrow I_1^q$, $p_2 : E_2 \rightarrow I_2^q$ — сужения; можно считать, что $E_1 = I_1^q \times F$, $E_2 = I_2^q \times F$. Точка из E_1 имеет координаты (x, y) , $x \in I_1^q$, $y \in F$. Аналогично, точка из E_2 имеет координаты $[x, y]$. Если $x \in I_{12}^{q-1} := I_1^q \cap I_2^q$, то точка (x, y) имеет также координаты $[x, y']$. Таким образом, для каждого $x \in I_{12}^{q-1}$ определено отображение $f_x : F \rightarrow F$, $f_x(y) = y'$. Определим проекцию $\pi : I_2^q \rightarrow I_{12}^{q-1}$ формулой $\pi(x_1, \dots, x_q) = (x_1, \dots, x_{q-1}, 1/2)$ и положим $\varphi[x, y] = (x, f_{\pi(x)}(y))$. Получается гомеоморфизм $\varphi : E_2 \rightarrow I_2^q \times F$, который вместе с уже имеющимся (тождественным) гомеоморфизмом $E_1 \rightarrow I_1^q \times F$ составляет гомеоморфизм $E \rightarrow I^q \times F$, очевидно, удовлетворяющий условию из определения тривиального расслоения. \square

Теорема 10.5 (о накрывающей гомотопии). Пусть (E, B, F, p) — локально тривиальное расслоение, Z — клеточное пространство, $\tilde{g} : Z \rightarrow E$ — непрерывное отображение и $G : Z \times I \rightarrow B$ — такая гомотопия, что $G|_{Z \times 0} = p \circ \tilde{g}$. Тогда существует такая гомотопия $\tilde{G} : Z \times I \rightarrow E$, что $\tilde{G}|_{Z \times 0} = \tilde{g}$ и $p \circ \tilde{G} = G$. Если на клеточном подпространстве $Z' \subset Z$ уже задана такая гомотопия $\tilde{G}' : Z' \times I \rightarrow E$, что $\tilde{G}'|_{Z' \times 0} = \tilde{g}|_{Z'}$ и $p \circ \tilde{G}' = G|_{Z' \times I}$, то можно выбрать \tilde{G} продолжающей \tilde{G}' .

Доказательство. Пусть данное расслоение тривиально: $E = B \times F$, и мы отождествляем отображения в E с парами отображений в B и F . Отображение \tilde{g} и гомотопия \tilde{G}' задаются парами

$$(g = G|_{Z \times 0}; \quad h : Z \rightarrow E), \quad (G|_{Z' \times I}; \quad H' : Z' \times I \rightarrow F),$$

а то, что мы должны построить, — парой, первый элемент которой нам уже известен — это G , а второй — гомотопия $H : Z \times I \rightarrow F$ отображения h , продолжающая H' ; существование H прямо следует из теоремы Борсука.

Пусть теперь расслоение произвольно, но $Z = D^k$ и $Z' = S^{k-1}$. Расслоение

$$G^*(E, B, F, p) = (E', D^k \times I \approx I^{k+1}, F, p')$$

тривиально в силу теоремы Фельдбау. Напомним, что $E' \subset (D^k \times I) \times E$, и обозначим через φ естественное отображение $E' \rightarrow E$. Отображение $\tilde{h} : D^k \rightarrow E'$, $\tilde{h}(x) = ((x, 0), \tilde{g}(x))$ и гомотопии $H : D^k \times I \rightarrow D^k \times I$ (тождественная) и $\tilde{H}' : S^{k-1} \times I \rightarrow E'$, $\tilde{H}'(x, t) = ((x, t), \tilde{G}'(x, t))$, удовлетворяют требованиям теоремы о накрывающей гомотопии, и в силу доказанного случая существует гомотопия $\tilde{H} : D^k \times I \rightarrow E'$ отображения \tilde{h} , накрывающая H и продолжающая \tilde{H}' . Ясно, что $\tilde{G} = \varphi \circ \tilde{H} : D^k \times I \rightarrow E$ — гомотопия отображения \tilde{g} , накрывающая G и продолжающая \tilde{G}' .

Пусть теперь расслоение E произвольно, а пространство Z конечно, точнее Z получается из Z' приклеиванием конечного числа клеток. Очевидная индукция позволяет считать, что $Z \setminus Z'$ состоит из одной клетки e ; пусть $f : D^k \rightarrow Z$ — соответствующее характеристическое отображение. Отображение $\tilde{h} = \tilde{g} \circ f : D^k \rightarrow E$ и гомотопии $H = G \circ (f \times I) : D^k \times I \rightarrow B$ и $\tilde{H}' = \tilde{G}' \circ (f|_{S^{k-1}} \times I) : S^{k-1} \times I \rightarrow E$ удовлетворяют условиям теоремы о накрывающей гомотопии, и в силу доказанного ранее существует гомотопия $\tilde{H} : D^k \times I \rightarrow E$ отображения \tilde{h} , накрывающая H и продолжающая \tilde{H}' . Нужную гомотопию $\tilde{G} : Z \times I \rightarrow E$ мы определим на $Z' \times I$ как совпадающую с \tilde{G}' , и на $e \times I$ формулой $\tilde{G}(f(x), t) = \tilde{H}(x, t)$ при $x \in \text{Int } D^k$. Корректность определения очевидна.

В общем случае к бесконечному числу клеток одной размерности, не лежащих в Z' , предыдущую конструкцию нужно применить одновременно. Если же в $Z \setminus Z'$ содержатся клетки сколь угодно большой размерности, то конструкция применяется бесконечное число раз и непрерывность гомотопии \tilde{G} следует из аксиомы (W) в силу непрерывности на клетках. \square

Определение 10.6. Расслоение в смысле Серра — это тройка (E, B, p) , где E и B — пространства и p — непрерывное отображение $E \rightarrow B$, удовлетворяющее условию СНР (накрывающей гомотопии — covering homotopy property) для клеточных пространств: для любого клеточного пространства Z и любых таких отображения $\tilde{g} : Z \rightarrow E$ и гомотопии $G : Z \times I \rightarrow B$, что $p \circ \tilde{g} = G|_{Z \times 0}$, существует гомотопия $\tilde{G} : Z \times I \rightarrow E$, для которой $\tilde{G}|_{Z \times 0} = \tilde{g}$ и $p \circ \tilde{G} = G$.

При этом единственности накрывающей гомотопии не требуется, а расслоение не обязательно является локально тривиальным.

Задача 109. В определении можно считать Z кубом.

Задача 110. В определении можно считать СНР относительным.

Определение 10.7. *Сильное расслоение в смысле Серра* или *расслоение в смысле Гуревича* — когда в предыдущем определении Z — произвольное топологическое пространство.

Пример 10.8. Пусть Y — произвольное топологическое пространство с отмеченной точкой y_0 . Положим $E = E(Y, y_0)$ (пространство путей пространства Y , начинающихся в точке y_0), $B = Y$ и определим отображение $p : E \rightarrow B$ как относящее пути $s \in E$ его конец $s(1)$. Получаем (сильное) расслоение в смысле Серра. В самом деле, пусть $\tilde{g} : Z \rightarrow E(Y, y_0)$ и $G : Z \times I \rightarrow Y$ отображение и гомотопия, удовлетворяющие условиям СНР. Накрывающая гомотопия $\tilde{G} : Z \times I \rightarrow E(Y, y_0)$ может быть задана формулой

$$[\tilde{G}(z, t)](\tilde{t}) = \begin{cases} [\tilde{g}(z)](\tilde{t}(1+t)) & \text{при } \tilde{t}(1+t) \leq 1, \\ G(z, \tilde{t}(1+t) - 1) & \text{при } \tilde{t}(1+t) \geq 1. \end{cases}$$

Заметим, что "слой" $p^{-1}(y_0)$ расслоения p есть не что иное, как пространство петель $\Omega(Y, y_0)$.

Задача 111. Пусть Y — произвольное пространство, (X, A) — пара Борсука (например, клеточная пара). Положим $E = C(X, Y)$ (пространство непрерывных отображений $X \rightarrow Y$), $B = C(A, Y)$ и определим отображение $p : E \rightarrow B$ формулой $p(f) = f|_A$. Покажите, что (E, B, p) — сильное расслоение в смысле Серра.

Хотя слои расслоения в смысле Серра не гомеоморфны друг другу, но все же они связаны между собой. Чтобы уточнить это, нам понадобится следующее определение.

Определение 10.9. Пространство X *слабо гомотопически эквивалентно пространству Y* , если для каждого клеточного пространства Z определено такое взаимно однозначное соответствие $\varphi_Z : \pi(Z, X) \rightarrow \pi(Z, Y)$, что для любого клеточного пространства Z' и любого непрерывного отображения $f : Z \rightarrow Z'$ коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \pi(Z, X) & \xrightarrow{\varphi_Z} & \pi(Z, Y) \\ \uparrow f^* & & \uparrow f^* \\ \pi(Z', X) & \xrightarrow{\varphi_{Z'}} & \pi(Z', Y). \end{array}$$

Задача 112. Для клеточных пространств гомотопическая эквивалентность совпадает со слабой гомотопической эквивалентностью.

Теорема 10.10. *Если $p : E \rightarrow B$ — расслоение в смысле Серра, а x_0 и x_1 — точки из одной компоненты линейной связности B , то $p^{-1}(x_0)$ и $p^{-1}(x_1)$ слабо гомотопически эквивалентны.*

Доказательство. Положим $p^{-1}(x_0) = F_0$ и $p^{-1}(x_1) = F_1$ и зафиксируем непрерывное отображение $h_0 : Z \rightarrow F_0$, где Z — клеточное пространство. Зафиксируем также путь $s : I \rightarrow B$, соединяющий x_0 с x_1 . Рассмотрим отображение $\tilde{g} = i_0 \circ h_0 : Z \rightarrow E$, где

i_0 — включение $p^{-1}(x_0)$ в E , и гомотопию $G : Z \times I \rightarrow B$, $G(z, t) = s(t)$. В силу СНР существует гомотопия $\tilde{G} : Z \times I \rightarrow E$ отображения \tilde{g} , такая, что $p \circ \tilde{G} = G$, т.е. $\tilde{G}(Z \times t) \subset p^{-1}(s(t))$. В частности, $\tilde{G}(Z \times 1) \subset F_1$, ввиду чего возникает отображение $h_1 : Z \rightarrow F_1$. Мы покажем, что гомотопический класс этого отображения не зависит от выбора накрывающей гомотопии, так что сопоставление $h_0 \mapsto h_1$ корректно определяет отображение $\pi(Z, F_0) \rightarrow \pi(Z, F_1)$. Более того, мы покажем, что этот гомотопический класс не меняется при замене пути гомотопным путем.

Пусть s' — другой путь, соединяющий x_0 с x_1 , и $G' : Z \times I \rightarrow B$, $\tilde{G}' : Z \times I \rightarrow E$ и $h'_1 : Z \rightarrow F_1$ — гомотопии и отображение, построенные при помощи пути s' так же, как гомотопии G , \tilde{G} и отображение h_1 были построены при помощи s . Предположим, что пути s и s' гомотопны, фиксируем гомотопию $S : I \times I \rightarrow B$ между ними и рассмотрим гомотопию $T : I \times I \rightarrow B$, определяемую формулой $T(t_1, t_2) = S(t_2, t_1)$. Таким образом, T — гомотопия, начальное отображение которой — отображение $I \rightarrow x_0 \in B$, промежуточное отображение — путь, соединяющий $s(t)$ с $s'(t)$, а конечное отображение $I \rightarrow x_1 \in B$. Рассмотрим, далее, гомотопию $G^* : (Z \times I) \times I \rightarrow B$, определенную формулой $G^*(z, t_1, t_2) = T(t_1, t_2)$ и отображение $\tilde{g}^* : Z \times I \rightarrow E$, определенное формулой $\tilde{g}^*(z, t_1) = \tilde{g}(z)$. В силу относительного варианта СНР (см. упражнение 110) существует гомотопия $\tilde{G}^* : (Z \times I) \times I \rightarrow E$ отображения \tilde{g}^* , накрывающая G^* и совпадающая с \tilde{G} на $(Z \times 0) \times I$ и с \tilde{G}' на $(Z \times 1) \times I$. Конечное отображение этой гомотопии, $(z, t) \mapsto \tilde{G}^*(z, t, 1)$, отображает $Z \times I$ в F_1 и представляет собой гомотопию, связывающую отображения h_1 и h'_1 .

Таким образом, путь $s : I \rightarrow B$ корректно определяет отображение

$$\varphi_s : \pi(Z, p^{-1}(s(0))) \rightarrow \pi(Z, p^{-1}(1)),$$

зависящее только от гомотопического класса пути s . Очевидно, что отображение φ_s естественно по Z , причем постоянному пути $s : I \rightarrow b_0 \in B$ отвечает тождественное отображение φ_s и произведению путей отвечает композиция отображений $\varphi_{s_1 s_2} = \varphi_{s_1} \circ \varphi_{s_2}$. Это позволяет завершить доказательство: отображения φ_s и $\varphi_{s^{-1}}$ взаимно обратны и, таким образом, φ_s — взаимно однозначное соответствие. \square

Задача 113. Для сильного расслоения в смысле Серра слои гомотопически эквивалентны.

Определение 10.11. Непрерывные отображения $f : X \rightarrow Y$ и $g : X_1 \rightarrow Y_1$ гомотопически эквивалентны, если существуют такие гомотопические эквивалентности $\varphi : X_1 \rightarrow X$, $\psi : Y_1 \rightarrow Y$, что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} X_1 & \xrightarrow{g} & Y_1 \\ \downarrow \varphi & & \downarrow \psi \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

гомотопически коммутативна ($f \circ \varphi \sim \psi \circ g$).

Теорема 10.12. Для любого непрерывного отображения $f : X \rightarrow Y$ существует (сильное) расслоение в смысле Серра, $p : X_1 \rightarrow Y_1$, гомотопически эквивалентное этому отображению.

При этом можно выбрать $Y_1 = Y$, $\psi = \text{Id}_Y$. Более того, это соответствие (по отображению $f : X \rightarrow Y$ канонически строятся расслоение $p(f) : X_1 \rightarrow Y$ и такая

гомотопическая эквивалентность $\varphi(f) : X_1 \rightarrow X$, что $f \circ \varphi(f) \sim p(f)$) является естественным в том смысле, что если имеется коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \downarrow \alpha & & \downarrow \beta \\ X' & \xrightarrow{f'} & Y', \end{array}$$

то канонически находится такое отображение α_1 , что коммутативны диаграммы

$$\begin{array}{ccc} X_1 & \xrightarrow{\alpha_1} & X'_1 \\ \downarrow p(f) & & \downarrow p(f') \\ Y & \xrightarrow{\beta} & Y', \end{array} \quad \begin{array}{ccc} X_1 & \xrightarrow{\alpha_1} & X'_1 \\ \downarrow \varphi(f) & & \downarrow \varphi(f') \\ X & \xrightarrow{\alpha} & X'. \end{array}$$

Доказательство. За X_1 мы принимаем пространство пар (x, s) , где $x \in X$, а s — путь пространства Y , начинающийся в точке $f(x)$. Расслоение $p(f) : X_1 \rightarrow Y$ и гомотопическая эквивалентность $\varphi(f) : X_1 \rightarrow X$ определяются формулами $p(f)(x, s) = s(1)$ и $\varphi(f)(x, s) = x$. \square

Теорема 10.13 (точная гомотопическая последовательность расслоения). Пусть (E, B, p) — расслоение в смысле Серра, $e \in E$, $b = p(e)$, $F = p^{-1}(b)$. Тогда для любого n имеются изоморфизмы

$$p_* : \pi_n(E, F, e) \rightarrow \pi_n(B, b),$$

и соответственно, последовательность

$$\begin{aligned} \cdots \rightarrow \pi_n(F, e) \rightarrow \pi_n(E, e) \rightarrow \pi_n(B, b) \rightarrow \\ \rightarrow \pi_{n-1}(F, e) \rightarrow \cdots \rightarrow \pi_0(F, e) \rightarrow \pi_0(E, e) \rightarrow \pi_0(B, b), \end{aligned}$$

получающаяся из последовательности пары (E, F) , точна.

Доказательство. Проверим мономорфность p_* . Пусть $\tilde{f} : D^n \rightarrow E$ — относительный сфероид пары (E, F) и $f_t : S^n \rightarrow B$ — гомотопия сфероида, получающегося из \tilde{f} проектированием и ограничением на сферу, в постоянный сфероид $S^n \rightarrow b$. По свойству накрывающей гомотопии \tilde{f} гомотопно сфероиду, отображающему все D^n в F (с отмеченными точками при этом все в порядке).

Проверим эпиморфность p_* . Пусть $\varphi_t : S^{n-1} \rightarrow S^n$ — гомотопия, образ которой пробегает S^n , и которая для отображает S^{n-1} в сферу той же размерности, получающуюся в пересечении S^n (которую считаем стандартно вложенной в \mathbb{R}^{n+1}) и плоскости, проходящей через отмеченную точку $s = (1, \dots, 1) \in S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$, пересекающей гиперплоскость $x^{n+1} = 0$ по линейному многообразию $x^n = 1$ и наклоненной к оси Ox^{n+1} под углом πt . Пусть $f : S^b \rightarrow B$ — произвольный сфероид. Поднимем гомотопию $f \circ \varphi_t : S^{n-1} \rightarrow B$ до гомотопии $\tilde{g}_t : S^{n-1} \rightarrow E$, неподвижной на отмеченной точке, причем начальное отображение, в силу построения φ_t , постоянно (отображают в e), а конечное отображает сферу в $p^{-1}b = F$, $\tilde{g}_1(S^{n-1}) \subset F$. Рассмотрим шар D^n как объединение вложенных $(n-1)$ -мерных сфер, пересекающихся по единственной (отмеченной) точке. Занумеруем их параметром $t \in [0, 1]$. Определим $D^n \rightarrow E$, полагая

его равным на t -й сфере соответствующему \tilde{g}_t . Получим относительный сфероид пары (E, F) , поскольку $\tilde{g}_1(S^{n-1}) \subset F$. По построению, его проекция на базу совпадает с исходным сфероидом f . \square

Задача 114. Записать в явном виде гомоморфизмы последовательности.

Задача 115. Объяснить, что происходит там, где не группы.

Задача 116. Рассмотреть точную гомотопическую последовательность расслоения Хопфа (S^3, S^2, S^1, p) и вывести, что $\pi_2(S^2) \cong \pi_1(S^1)$ (а значит, равно \mathbb{Z}) и $\pi_n(S^3) \cong \pi_n(S^2)$ при $n \geq 3$.

Задача 117. Пусть S^∞ — индуктивный предел последовательности $S^1 \subset S^2 \subset S^3 \subset \dots$, т.е. точки S^∞ — это точки несвязного объединения S^i профакторизованного по указанным включениям, в этом смысле каждая точка S^∞ "принадлежит некоторому S^k ". Топология вводится следующим образом: $F \subset S^\infty$ замкнуто тогда и только тогда, когда все пересечения $F \cap S^k$ замкнуты в S^k . Аналогично определяется $\mathbb{C}P^\infty$, а также индуктивный предел расслоений Хопфа $(S^\infty, \mathbb{C}P^\infty, S^1, p)$. Убедитесь, что это действительно расслоение, а S^∞ стягиваема. Из точной последовательности этого расслоения выведите, что $\pi_2(\mathbb{C}P^\infty) \cong \mathbb{Z}$, а остальные гомотопические группы $\mathbb{C}P^\infty$ тривиальны.

Задача 118. Рассмотрите расслоение путей из примера 10.8. Докажите, что всегда $\pi_n(\Omega X) \cong \pi_{n+1}(X)$.

Задача 119. Если база расслоения Серра стягиваема, то включение (любого) слоя в тотальное пространство индуцирует изоморфизм гомотопических групп. Если база расслоения связна и один из его слоев стягиваем, то проекция индуцирует изоморфизм гомотопических групп.

Задача 120. Если все гомотопические группы базы и слоя конечны, то гомотопические группы тотального пространства тоже конечны и их порядки не больше произведений порядков соответствующих гомотопических групп базы и слоя.

Задача 121. Покажите, что если расслоение (E, B, p) обладает сечением (т.е. таким непрерывным отображением $s : B \rightarrow E$), что $p \circ s = \text{Id}_B$) или если слой является ретрактом пространства E , то $\pi_n(E) \cong \pi_n(B) \oplus \pi_n(F)$.

Задача 122. Покажите, что если слой расслоения (E, B, p) стягивается в точку по E , то $\pi_n(B) \cong \pi_n(E) \oplus \pi_{n-1}(F)$.

11. ТЕОРЕМА О НАДСТРОЙКЕ И ГОМОТОПИЧЕСКИЕ ГРУППЫ СФЕР

Рассмотрим q -мерный сфероид $f : S^q \rightarrow X$ топологического пространства X (с отмеченной точкой). Отображение

$$\Sigma f : \Sigma S^q = S^{q+1} \rightarrow \Sigma X, \quad (\Sigma f)(y, t) = (f(y), t),$$

является $(q + 1)$ -мерным сфероидом пространства ΣX . Ясно, что если сфероиды $f, g : S^q \rightarrow X$ гомотопны, то гомотопны и сфероиды $\Sigma f, \Sigma g : S^{q+1} \rightarrow \Sigma X$. Легко проверить также, что сфероид $\Sigma(f + g)$ гомотопен сфероиду $\Sigma f + \Sigma g$. Таким образом, сопоставление $f \mapsto \Sigma f$ порождает гомоморфизм $\pi_q(X) \rightarrow \pi_{q+1}(\Sigma X)$. Он называется

гомоморфизмом надстройки и обозначается через Σ . В частности, для любых q и n возникает отображение

$$\Sigma : \pi_q(S^n) \rightarrow \pi_{q+1}(S^{n+1}).$$

Теорема 11.1 (Фрейденталя). Гомоморфизм $\Sigma : \pi_q(S^n) \rightarrow \pi_{q+1}(S^{n+1})$ является изоморфизмом при $q \leq 2n - 2$ и эпиморфизмом при $q = 2n - 1$.

Лемма 11.2. Пусть $f : S^{q+1} = \mathbb{R}^{q+1} \cup \infty \rightarrow S^{n+1}$, a и b — полюса S^{n+1} , $f(\infty) \neq a$, $f(\infty) \neq b$. Тогда существует такое сколь угодно близкое к f (в частности ему гомотопное) отображение f_1 , что $f_1^{-1}(a)$ и $f_1^{-1}(b)$ — полиэдры размерности $\leq q - n$ в $\mathbb{R}^{q+1} \subset S^{q+1}$.

Доказательство. Применяем метод симплициальной аппроксимации, как мы уже делали несколько раз. Окружим каждую из точек a и b пятью концентрическими шарами

$$a \in B_1^a \subset B_2^a \subset \dots \subset B_5^a, \quad b \in B_1^b \subset B_2^b \subset \dots \subset B_5^b,$$

не содержащими $f(\infty)$. Выберем в \mathbb{R}^{q+1} компактный многогранник, содержащий $f^{-1}(B_5^a \cup B_5^b)$ (это можно сделать, так как прообраз содержится в компактном множестве, не содержащем ∞). Триангулируем его настолько мелко, что если образ симплекса при f пересекается с B_i^a , то он содержится в B_{i+1}^a , $i = 1, 2, 3, 4$, и аналогично для b . Пусть K — объединение всех симплексов, которые пересекаются с $B_4^a \cup B_4^b$. Заменяем f на K на отображение f' , совпадающее с f на вершинах симплексов, и линейное на каждом симплексе. Построим отображение f'_1 , совпадающее с f вне $f^{-1}(B_3^a \cup B_3^b)$, с f' на $f^{-1}(B_2^a \cup B_2^b)$ и такое, что образ при нем дополнения к $f^{-1}(B_2^a \cup B_2^b)$ не пересекается с $B_1^a \cup B_1^b$ (ср. с доказательством теоремы 8.1). При этом, чем мельче разбиение, тем ближе f'_1 к f . Полученное отображение обладает следующим свойством: прообраз окрестности каждой из точек a и b покрывается конечным числом симплексов, на каждом из которых отображение линейно. Гомеоморфизмом сферы, сколь угодно близким к тождественному, можно добиться, что ни одна из двух точек не содержится в образе $(q + 1)$ -мерного симплекса, имеющего размерность $< (n + 1)$, поскольку таких симплексов конечное число. Полученное отображение и есть искомое f_1 . Действительно, прообраз точки при линейном отображении $(q + 1)$ -мерного симплекса, имеющем $(n + 1)$ -мерный образ, является пересечением симплекса с линейным многообразием размерности $(q - n)$, то есть выпуклым многогранником размерности $\leq (q - n)$. \square

Лемма 11.3. Пусть $K, L \subset \mathbb{R}^p$ — полиэдры размерностей $\leq k$ и $\leq l$ соответственно, причем $k + l + 2 \leq p$. Тогда K и L не зацеплены, т.е. существует изотопия $F_t : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^p$ (т.е. $F_0 = \text{Id}$, а F_t — гомеоморфизм при любом t), причем $F_1(K)$ и $F_1(L)$ разделяются в \mathbb{R}^p гиперплоскостью.

Доказательство. Проведем в \mathbb{R}^p гиперплоскость, не пересекающуюся с K . Пусть K_1, \dots, K_M — плоскости размерности $\leq k$, причем $K \subset K_1 \cup \dots \cup K_M$, а L_1, \dots, L_N — плоскости размерности $\leq l$, причем $L \subset L_1 \cup \dots \cup L_N$. Пусть P_{ij} — минимальная плоскость, содержащая K_i и L_j . Тогда $\dim P_{ij} \leq \dim K_i + \dim L_j + 1 \leq k + l + 1 < p$ (если взять за начальную точку P_{ij} некоторую точку K_i , то в качестве порождающей системы векторов можно взять некоторый базис K_i в объединении с некоторым базисом L_j и некоторым вектором, соединяющим точку K_i с некоторой точкой L_j). Выберем такую точку $x \in \mathbb{R}^p$, что она лежит с другой стороны от первоначальной

гиперплоскости, чем K , и не содержится в объединении P_{ij} , так что никакая прямая, проходящая через x , не пересекает одновременно K и L . Изотопия задается следующим образом. Рассмотрим лучи, выходящие из точки x , и отождествим их множество с маленькой сферой с центром x . Пусть K' и L' — компактные непересекающиеся множества этой сферы, образованные лучами, пересекающимися с K и L соответственно. Найдем по лемме Урысона непрерывную функцию α на сфере, принимающую значения в $[0, 1]$, равную 1 на L' и 0 на K' . При изотопии каждая точка пространства движется по лучу σ к точке x со скоростью, пропорциональной расстоянию до x , а коэффициент пропорциональности равен $\alpha(\sigma)$. В частности, K остается на месте, а L когда-нибудь окажется с той же стороны от гиперплоскости, что и x . Это будет конечный момент изотопии. \square

Доказательство теоремы Фрейденталля. Докажем эпиморфность Σ при $q \leq 2n - 1$. Пусть $f : S^{q+1} \rightarrow S^{n+1}$ — сфероид. Мы должны доказать, что существует такой сфероид $h : S^q \rightarrow S^n$, что сфероид f гомотопен Σh . Исключив тривиальный случай $n = 0$, считаем, что $n > 0$, т.е. что сфера S^{n+1} односвязна, и это позволяет нам при построении гомотопий забыть про отмеченные точки. Пользуясь двумя предыдущими леммами, мы гомотопируем отображение f в отображение $g_1 : S^{q+1} \rightarrow S^{n+1}$ со следующим свойством: прообраз северного полюса лежит в северном полушарии, прообраз южного — в южном, образ экватора не задевает полюсов. Точнее, по лемме 11.2 мы гомотопируем f в такое отображение f_1 , что прообразы полюсов имеют размерность $\leq q - n$, и $(q - n) + (q - n) + 1 = 2q - (2n - 1) \leq 2q - q < q + 1$. Поэтому можно применить лемму 11.3 и считать разделяющую гиперплоскость из этой леммы экватором. Более того, существуют окрестности полюсов — полярные шапки A и B , в которых нет точек образа экватора. Можно произвести гомотопию $S^{n+1} \rightarrow S^{n+1}$, которая растягивает A на северное полушарие и B — на южное, а все остальное сжимает на экватор. Композиция этой гомотопии с g_1 — такое отображение $g_2 : S^{q+1} \rightarrow S^{n+1}$, которое переводит экватор в экватор, северное полушарие в северное полушарие и южное — в южное. Далее, двигаясь по меридианам на север и на юг от экватора, сдвигаем соответствующие полушария в полюса. Получили надстройку.

Доказательство мономорфности Σ при $q \leq 2n - 2$ проводится по той же схеме. Пусть $h_1 : S^q \rightarrow S^n$, $h_2 : S^q \rightarrow S^n$ — сфероиды. Мы должны доказать, что если сфероиды Σh_1 и Σh_2 гомотопны, то и сфероиды h_1 и h_2 гомотопны. Возьмем произвольную гомотопию f_t , соединяющую Σh_1 и Σh_2 , и подправим ее так, чтобы все сфероиды f_t тоже были надстройками. Точнее, гомотопия f_t есть отображение $F : S^{q+1} \times I \rightarrow S^{n+1}$. Рассмотрим снова прообразы полюсов $F^{-1}(a), F^{-1}(b) \subset S^{q+1} \times I$. Эти прообразы можно сделать полиэдрами, имеющими размерность $\leq (q + 2) - (n + 1) = q - n + 1$. При $2(q - n + 1) + 1 < q + 2$, т.е. при $q \leq 2n - 2$, их можно “развести” — сделать лежащими в произведениях двух полусфер на отрезок. Дальше — как для эпиморфности. \square

Теорема 11.4 (Хопфа). $\pi_n(S^n) \cong \mathbb{Z}$.

Доказательство. При $n = 1$ и $n = 2$ это установлено в теореме 5.5 и упражнении 116. При $n \geq 3$ мы имеем изоморфизм

$$\Sigma : \pi_{n-1}(S^{n-1}) \rightarrow \pi_n(S^n),$$

поскольку $q = n - 1 \leq 2(n - 1) - 2 = 2n - 4$ при этих n . \square

Следствие 11.5 (из теоремы Хопфа). Сфера S^n не стягиваема ни при каком n .

Замечание 11.6. Гомоморфизм $\Sigma : \pi_1(S^1) \rightarrow \pi_2(S^2)$ является, в силу теоремы Фрейденталя, эпиморфизмом. Но так как $\pi_1(S^1) \cong \pi_2(S^2) \cong \mathbb{Z}$, это — изоморфизм.

Замечание 11.7. Образующей группы $\pi_n(S^n)$ служит класс тождественного сфероида $S^n \rightarrow S^n$: при $n = 1$ это было явно найдено, при остальных n вытекает из того, что надстройка над тождественным сфероидом есть, очевидно, тождественный сфероид.

Методом симплициальной аппроксимации (неоднократно нами уже использованным) доказывается следующая лемма.

Лемма 11.8. Пусть E^m — сфера S^m или шар D^m , где $m \leq n + 1$; при этом мы отождествляем \mathbb{R}^m с $S^m \setminus y_0$ или с $D^m \setminus \partial D^m$ (таким образом, $\mathbb{R}^m \subset E^m$). Пусть, далее, $h : E^m \rightarrow Y$ — такое непрерывное отображение, что $h(E^m \setminus \mathbb{R}^m) \subset X$. Тогда существует гомотопное h непрерывное отображение $h_1 : E^m \rightarrow Y$ со следующими свойствами:

- (1) на $h^{-1}(X)$ отображение h_1 совпадает с h ;
- (2) если $m \leq n$, то $h(E^m) \subset X$;
- (3) если $m = n + 1$, то в E^m лежит такое конечное семейство попарно непересекающихся шариков d_1, \dots, d_N , что $h_1(E^m \setminus \cup_i d_i) \subset X$ и $h_1|_{\text{Int } d_i}$ при каждом i — линейный (сохраняющий или обращающий ориентацию) гомеоморфизм открытого шарика $\text{Int } d_i$ на $\text{Int } D^{n+1} \subset Y$.

Теорема 11.9 (аддиционная). Пусть X — связное топологическое пространство и $f : S^n \rightarrow X$ — непрерывное отображение. Положим $Y = X \cup_f D^{n+1}$. Гомоморфизм

$$(6) \quad \pi_i(X, x_0) \rightarrow \pi_i(Y, y_0),$$

где $x_0 \in X \subset Y$ — произвольная отмеченная точка, индуцированный включением $X \rightarrow Y$, при $i < n$ является изоморфизмом, а при $i = n$ является эпиморфизмом, ядро которого порождено всевозможными классами вида $T_s[f]$, где s — путь, соединяющий x_0 с образом $f(y_0)$ отмеченной точки $y_0 \in S^n$, а $[f] \in \pi_n(X, f(y_0))$ — гомотопический класс сфероида f .

Доказательство. Эпиморфность отображения (6) при $i \leq n$ и его мономорфность при $i < n$ вытекает из леммы непосредственно. (При $i \leq n$ лемма перерабатывает сфероид $h : S^i \rightarrow Y$ в гомотопный сфероид $h_1 : S^i \rightarrow Y$, отображающий S в X ; при $i < n$ по отображению $h : D^{i+1} \rightarrow Y$, осуществляющему гомотопию в нуль в Y сфероида $h|_{S^i} : S^i \rightarrow X \subset Y$, лемма строит отображение $h_1 : D^{i+1} \rightarrow X \subset Y$, осуществляющее гомотопию в нуль этого же сфероида в X). Предположим, что гомотопический класс сфероида $g : S^n \rightarrow X$ принадлежит ядру отображения (6), т.е. g продолжается до некоторого отображения $h : D^{n+1} \rightarrow X$. Заменив отображение h отображением h_1 со свойствами, указанными в части (3) леммы, мы получим другое продолжение $h_1 : D^{n+1} \rightarrow X$ этого сфероида. На границе каждого шарика d_i отображение h_1 совпадает с композицией

$$\partial d_i \xrightarrow{l_i} S^n \xrightarrow{f} X,$$

где l_i — линейное отображение. Дальнейшее рассуждение мало отличается от соответствующей части доказательства теоремы 8.1. Положим $y_i = l_i^{-1}(y_0)$ и соединим при каждом i точку y_i путем σ_i с $y_0 \in S^n \subset D^{n+1}$ таким образом, чтобы эти пути не задевали своими внутренними точками шариков d_i и попарно не пересекались. В

$D^{n+1} \setminus \cup_i \text{Int } d_i$ существует очевидная гомотопия, соединяющая естественный сфероид $S^n \rightarrow D^{n+1}$ (включение) с суммой сфероидов $T_{\sigma_i}(l_i^{-1})$. Переведем эту гомотопию в X посредством отображения h_1 . Мы получим гомотопию, соединяющую сфероид g со сфероидом $T_{h \circ \sigma_i}(f_i)$, где f_i — сфероид, отличающийся от f на линейное преобразование сферы S^n . Поскольку $[f_i] = \pm[f]$ (знак зависит от того, сохраняет или обращает ориентацию это линейное преобразование), мы видим, что класс $[g]$ действительно является линейной комбинацией образующих, указанных в теореме. Этим последнее утверждение теоремы доказано в одну (более трудную) сторону. В другую сторону оно очевидно: класс $T_s[f]$, разумеется, принадлежит ядру отображения (6). \square

Замечание 11.10. Если считать, что $f(y_0) = x_0$, то ядро отображения (6) с $i = n$ порождается элементами $\pi_1(X, x_0)$ -орбиты класса $[f] \in \pi_n(X, x_0)$. Особенно важен случай, когда X односвязно: в этом случае теорема показывает, что при приклеивании $(n + 1)$ -мерной клетки гомотопические группы размерности $< n$ не меняются, а n -мерная гомотопическая группа факторизуется по циклической подгруппе, порожденной классом заклеиваемого сфероида.

Следствие 11.11. Если Y — клеточное подпространство пространства X и размерность $X \setminus Y$ не содержит клеток размерности $\leq n$, то гомоморфизм $\pi_i(Y) \rightarrow \pi_i(X)$, индуцированный включением, является изоморфизмом при $i < n$ и эпиморфизмом при $i = n$. В частности, $\pi_n(X) = \pi_n(\text{sk}_{n+1} X)$ для любого клеточного пространства X .

Теорема 11.12. Пусть X и Y — клеточные пространства. Если пространство X p -связно, а пространство Y q -связно, то: (1) $\pi_n(X \vee Y) = \pi_n(X) \oplus \pi_n(Y)$ при $n \leq p+q$; (2) при любом n группа $\pi_n(X \vee Y)$ содержит прямое слагаемое, изоморфное $\pi_n(X) \oplus \pi_n(Y)$.

Доказательство. В силу доказанного выше, пространства X и Y гомотопически эквивалентны клеточным пространствам с единственной вершиной и без клеток размерностей $1, \dots, p$ и $1, \dots, q$ соответственно; мы будем считать, что таковы уже X и Y . Букет $X \vee Y$ является клеточным подпространством произведения $X \times Y$, и клетки, лежащие в разности $(X \times Y) \setminus (X \vee Y)$, имеют размерности, не меньшие $p + q + 2$. Ввиду следствия из предыдущей теоремы (а также того факта, что $\pi_n(X \times Y) = \pi_n(X) \oplus \pi_n(Y)$), отсюда вытекает утверждение (1).

Для доказательства утверждения (2) достаточно заметить, что сквозное отображение

$$\pi_n(X) \oplus \pi_n(Y) \xrightarrow{i_* \oplus j_*} \pi_n(X \vee Y) \oplus \pi_n(X \times Y) = \pi_n(X) \oplus \pi_n(Y),$$

тождественно, где первая стрелка есть сумма гомоморфизмов $i_* : \pi_n(X) \rightarrow \pi_n(X \vee Y)$ и $j_* : \pi_n(Y) \rightarrow \pi_n(X \vee Y)$, индуцированных включениями $i : X \rightarrow X \vee Y$ и $j : Y \rightarrow X \vee Y$. \square

Следствие 11.13 (гомотопические группы букетов). $\pi_n(\underbrace{S^n \vee \dots \vee S^n}_q) \cong \underbrace{\mathbb{Z} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}}_q$,

где систему свободных образующих составляют классы q естественных вложений $S^n \rightarrow S^n \vee \dots \vee S^n$.

Непосредственно из теоремы 11.9 вытекает следующее утверждение.

Теорема 11.14 (первая нетривиальная гомотопическая группа клеточного пространства). Пусть X — клеточное пространство с единственной нульмерной клеткой,

не имеющее клеток размерностей $1, \dots, n-1$. отождествим остов $\text{sk}_n X$ с букетом $\bigvee_{i \in I} S^n$ n -мерных сфер, поставленным во взаимно однозначное соответствие с n -мерными клетками пространства X . Пусть $f_j : S^n \rightarrow \text{sk}_n X = \bigvee_{i \in I} S^n$, $j \in J$, — приклеивающие отображения, отвечающие $(n+1)$ -мерным клеткам пространства X , и пусть $\varphi_j \in \pi_n(\text{sk}_n X) \cong \bigoplus_{i \in I} \mathbb{Z}$ — гомотопические классы сфероидов f_j . Тогда группа $\pi_n(X)$ есть факторгруппа группы $\bigoplus_{i \in I} \mathbb{Z}$ по подгруппе, порожденной элементами φ_j , $j \in J$.

Задача 123. Докажите следующий относительный вариант теоремы 11.14 (уточнив надлежащим образом формулировку). Пусть (X, A) — такая клеточная пара со связным A , что в $X \setminus A$ лежат только клетки размерности $\geq n$, где $n \geq 3$. Тогда группа $\pi_n(X, A)$, т.е. первая нетривиальная гомотопическая группа пары (X, A) порождается как $\pi_1(A)$ -модуль n -мерными клетками из $X \setminus A$; соотношения между этими образующими $\pi_1(A)$ -модуля соответствуют $(n+1)$ -мерным клеткам из $X \setminus A$.

Задача 124. Пусть (X, A) — клеточная пара с односвязным A , и пусть клетки, лежащие в $X \setminus A$, имеют размерность $\geq n \geq 2$. Покажите, что естественное отображение $\pi_n(X, A) \rightarrow \pi_n(X/A)$ является изоморфизмом.

Напомним, что пространства X и Y слабо гомотопически эквивалентны, если можно определить для любого клеточного пространства Z взаимно однозначное соответствие $\varphi_Z : \pi(Z, X) \rightarrow \pi(Z, Y)$, естественное по Z . При этом может оказаться, что φ_Z индуцируется некоторым (одним и тем же при всех Z) непрерывным отображением $\varphi : X \rightarrow Y$.

Определение 11.15. Непрерывное отображение $\varphi : X \rightarrow Y$ называется *слабой гомотопической эквивалентностью*, если для любого клеточного пространства Z отображение $\varphi_* : \pi(Z, X) \rightarrow \pi(Z, Y)$ является взаимно однозначным соответствием.

Очевидно, пространства, которые можно связать слабой гомотопической эквивалентностью, слабо гомотопически эквивалентны. Обратное неверно, как показывают простейшие примеры.

Пример 11.16. Множества \mathbb{Q} и \mathbb{Z} в \mathbb{R} слабо гомотопически эквивалентны, но слабой гомотопической эквивалентности $\mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Z}$ не существует: непрерывное отображение $\mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Z}$ неизбежно будет постоянным на целых интервалах и потому не будет взаимно однозначным индуцируемое им отображение $\pi(\text{точка}, \mathbb{Q}) \rightarrow \pi(\text{точка}, \mathbb{Z})$.

Теорема 11.17. Следующие свойства непрерывного отображения $f : X \rightarrow Y$ эквивалентны.

- (1) f — слабая гомотопическая эквивалентность.
- (2) Гомоморфизм $f_* : \pi_n(X, x_0) \rightarrow \pi_n(Y, y_0)$ является изоморфизмом при любых n и x_0 .
- (3) Если (W, A) — клеточная пара и $h : A \rightarrow X$, $g : W \rightarrow Y$ — такие непрерывные отображения, что $f \circ h \sim g|_A$, то существует такое непрерывное отображение $\tilde{h} : W \rightarrow X$, что $\tilde{h}|_A = h$ и $f \circ \tilde{h} \sim g$.

Доказательство. Импликация (1) \Rightarrow (2) очевидна. Импликация (3) \Rightarrow (1) почти очевидна: взяв в качестве пары (W, A) пару (Z, φ) , мы убеждаемся в том, что отображение $f_* : \pi(Z, X) \rightarrow \pi(Z, Y)$ является отображением на, а положив $(W, A) =$

$(Z \times I, (Z \times 0) \cup (Z \times 1))$, мы видим, что оно переводит разные элементы в разные. Остается доказать импликацию (2) \Rightarrow (3). Пусть $f : X \rightarrow Y$ — отображение, удовлетворяющее условию (2), и пусть (W, A) — клеточная пара. Мы предположим сначала, что W отличается от A единственной клеткой: $W = A \cup_{\alpha} D^{n+1}$, где $\alpha : S^n \rightarrow A$ — непрерывное отображение. Поскольку сквозное отображение $\alpha : S^n \rightarrow A \subset W$ гомотопно нулю (его продолжением на шар служит естественное отображение $D^{n+1} \rightarrow W$), гомотопна нулю и композиция $(g|_A) \circ \alpha : S^n \rightarrow Y$. Значит, гомотопна нулю отображение $f \circ h \circ \alpha : S^n \rightarrow Y$, а с ним — и отображение $h \circ \alpha : S^n \rightarrow X$: отображение f переводит в сфероида, гомотопные нулю, только сфероида, гомотопные нулю (f_* — мономорфизм). Значит, отображение $h \circ \alpha : S^n \rightarrow X$ продолжается до непрерывного отображения $\beta : D^{n+1} \rightarrow X$, и мы можем составить из отображений h и β непрерывное отображение $\tilde{h}' : W \rightarrow X$. Нам нужно, чтобы было $f \circ \tilde{h}' \sim g$, а есть у нас пока только $f \circ \tilde{h}'|_A \sim g|_A$. Фиксируем гомотопию $\Phi : A \times I \rightarrow Y$, соединяющую $g|_A$ с $f \circ \tilde{h}'|_A = f \circ h$, и рассмотрим $(n+1)$ -мерный сфероид $\gamma : S^{n+1} = \partial(D^{n+1} \times I) \rightarrow Y$, составленный из отображений:

$$\begin{aligned} D^{n+1} \times 0 &= D^{n+1} \rightarrow W \xrightarrow{g} Y, \\ S^n \times I &\xrightarrow{\alpha \times I} A \times I \xrightarrow{\Phi} Y, \\ D^{n+1} \times 1 &= D^{n+1} \xrightarrow{\beta} X \xrightarrow{f} Y. \end{aligned}$$

Для того чтобы гомотопия Φ продолжалась до гомотопии, связывающей g с $f \circ \tilde{h}'$, нужно, чтобы сфероид γ был гомотопен нулю. Чтобы добиться этого, в нашем распоряжении есть выбор отображения β , продолжающего $h \circ \alpha$; если мы вместо β возьмем другое отображение, β' , то к гомотопическому классу сфероид γ прибавится гомотопический класс сфероид $f \circ \delta$, где $\delta : S^{n+1} \rightarrow X$ — сфероид, составленный из отображений $\beta, \beta' : D^{n+1} \rightarrow X$ (согласованных на ∂D^{n+1}). Ясно, что гомотопический класс сфероид δ может быть сделан произвольным элементом группы $\pi_{n+1}(X)$, но тогда произвольным будет и класс сфероид $f \circ \delta$ (f_* — эпиморфизм). Этим доказательство завершается в случае, когда $W \setminus A$ состоит из одной клетки. В общем случае применяется обычная клеточная индукция: на n -м шаге предыдущее построение проводится одновременно для всех n -мерных клеток из разности $W \setminus A$. \square

Теорема 11.18 (Теорема Уайтхеда). *Пусть X, Y — клеточные пространства. Если непрерывное отображение f обладает тем свойством, что $f_* : \pi_n(X, x_0) \rightarrow \pi_n(Y, f(x_0))$ — изоморфизм при всех n и x_0 , то f — гомотопическая эквивалентность.*

Доказательство. Теорема является прямым следствием теоремы 11.17 и того факта, что для клеточных пространств слабая гомотопическая эквивалентность совпадает с обычной. \square

Замечание 11.19. Если пространства X и Y связны, то условие теоремы достаточно проверять для некоторой произвольно фиксированной точки $x_0 \in X$.

Задача 125. Покажите, что пространства

- (1) S^2 и $S^3 \times \mathbb{C}P^\infty$,
- (2) $S^m \times \mathbb{R}P^n$ и $\mathbb{R}P^m \times S^n$, $m \neq n$,

имеют одинаковые гомотопические группы, но гомотопически не эквивалентны.

Теорема 11.20 (о клеточной аппроксимации топологических пространств). *Для любого топологического пространства X существует клеточное пространство Y и слабая гомотопическая эквивалентность $f : Y \rightarrow X$.*

Определение 11.21. Такая пара (Y, f) называется *клеточной аппроксимацией пространства X* .

Доказательство. Можно ограничиться случаем (линейно) связного пространства X . Мы построим цепочку пространств $Y_0 \subset Y_1 \subset \dots$, и такую систему продолжающих друг друга отображений $f_i : Y_i \rightarrow X$, что $(f_i)_* : \pi_q(Y_i) \rightarrow \pi_q(X)$ будет изоморфизмом при $q \leq i$. В качестве y_0 мы возьмем точку, в качестве $f_0 : Y_0 \rightarrow X$ — произвольное отображение. Предположим, что уже построены $Y_0 \subset Y_1 \subset \dots \subset Y_{n-1}$ и f_0, \dots, f_{n-1} . Положим $y_0 = Y_0$, $x_0 = f_0(y_0)$. Выберем в группе $\pi_n(X, x_0)$ (или даже в $\pi_1(X, x_0)$ -модуле $\pi_n(X, x_0)$) систему образующих $\{\varphi_\alpha\}$, фиксируем для φ_α представляющий сфероид $g_\alpha : S^n \rightarrow X$, положим $Y'_n = Y_{n-1} \vee (\vee_\alpha S^n)$ и определим отображение $f'_n : Y'_n \rightarrow X$ как совпадающее с f_{n-1} на y_{n-1} и с g_α на α -й компоненте букета $\vee_\alpha S^n$. В силу теоремы 11.9 $\pi_q(Y'_n) = \pi_q(Y_{n-1})$ при $q < n$, поэтому отображение $(f'_n)_*$ в размерностях $< n$ является изоморфизмом. Отображение же $(f'_n)_* : \pi_n(Y'_n) \rightarrow \pi_n(X)$ эпиморфно, поскольку все φ_α лежат в его образе. Мономорфизмом это отображение может не быть; возьмем в его ядре $K = \ker(f'_n)_*$ систему образующих $\{\psi_\beta \in \pi_n(Y'_n)\}$ (можно взять систему образующих над $\pi_1(Y'_n)$). Фиксируем для ψ_β представляющие сфероиды $h_\beta : S^n \rightarrow Y'_n$, и приклеим по каждому из них к Y'_n $(n+1)$ -мерную клетку. Полученное пространство примем за Y_n . Поскольку $(f'_n)_*\psi_\beta = 0$, композиции $f'_n \circ h_\beta$ гомотопны нулю, и отображение f'_n может быть продолжено на все приклеенные клетки. Результатом такого продолжения и будет отображение $f_n : Y_n \rightarrow X$. Приклеивание не изменит групп π_q с $q < n$, в силу же теоремы 11.9 $\pi_n(Y_n) = \pi_n(Y'_n)/K$, вследствие чего $(f_n)_* : \pi_n(Y_n) \rightarrow \pi_n(X)$ — изоморфизм. \square

Задача 126. Докажите гомотопическую единственность клеточной аппроксимации топологического пространства: если (Y, f) , (Z, g) — две клеточных аппроксимации пространства X , то существует такая гомотопическая эквивалентность $h : Z \rightarrow Y$, что $g = f \circ h$.

Задача 127. Если X и Y — слабо гомотопически эквивалентные пространства, то существует (единственное с точностью до гомотопической эквивалентности) клеточное пространство Z , обладающее слабыми гомотопическими эквивалентностями $f : Z \rightarrow X$, $g : Z \rightarrow Y$.

Теорема 11.22. Пусть n — натуральное число и π — группа, предполагаемая абелевой, если $n > 1$. Тогда существует такое клеточное пространство X , что

$$\pi_i(X) \cong \begin{cases} 0 & \text{при } i \neq n, \\ \pi & \text{при } i = n. \end{cases}$$

Определение 11.23. Такие пространства называются *пространствами Эйленберга-Маклейна* или *пространствами типа $K(\pi, n)$* .

Доказательство. Выберем в π систему образующих $\{\varphi_\alpha\}$ и систему соотношений $\{R_\beta\}$. Положим $X_n = \vee_\alpha S^n$; тогда $\pi_i(X_n) = 0$ при $i < n$ и $\pi_n(X_n) = \bigoplus_\alpha \mathbb{Z}$ (или $*_\alpha \mathbb{Z}$ при $n = 1$); образующие группы $\pi_n(X_n)$ находятся во взаимно однозначном соответствии с φ_α , и мы обозначаем их через $\tilde{\varphi}_\alpha$. Заменяем в каждом из соотношений R_β символы φ_α

символами $\tilde{\varphi}_\alpha$; получатся элементы r_β группы $\pi_n(X_n)$. Фиксируем сфероиды, представляющие эти элементы, и приклеим по этим сфероидам к X_n $(n+1)$ -мерные клетки. Получится такое пространство X_{n+1} , что $\pi_i(X_{n+1}) = 0$ при $i < n$ и $\pi_n(X_{n+1}) = \pi$. Далее мы берем произвольную систему образующих в $\pi_{n+1}(X_{n+1})$, представляем их сфероидами и приклеиваем по этим сфероидам к X_{n+1} $(n+2)$ -мерные клетки. Получается пространство X_{n+2} , которое имеет нужные гомотопические группы уже до размерности $n+1$. Затем заклеиваем у X_{n+2} группу π_{n+2} и т.д. \square

Пример 11.24. (1) Пространство $\mathbb{C}P^\infty$ есть пространство типа $K(\mathbb{Z}, 2)$; это — единственное обзримое пространство, имеющее тип $K(\pi, n)$ с $n > 1$.

(2) S^1 есть $K(\mathbb{Z}, 1)$.

(3) $\mathbb{R}P^\infty$ есть $K(\mathbb{Z}_2, 1)$.

(4) Бесконечномерные линзы $L_m^\infty = S^\infty/\mathbb{Z}_m$, где образующая T группы \mathbb{Z}_m действует в $S^\infty \subset \mathbb{C}^\infty$ по формуле $T(z_1, z_2, \dots) = (z_1 \exp(2\pi i/m), z_2 \exp(2\pi i/m), \dots)$ — пространства типа $K(\mathbb{Z}_m, 1)$.

(5) Так как произведение пространств типа $K(\pi_1, n)$ и $K(\pi_2, n)$ есть, очевидно, пространство типа $K(\pi_1 \times \pi_2, n)$, то конструкции (2)-(4) позволяют построить пространство типа $K(\pi, n)$ для любой конечнопорожденной абелевой группы π .

(6) Известно много пространств типа $K(\pi, 1)$ с неабелевыми π . К их числу относятся, например, все классические поверхности, кроме S^2 и $\mathbb{R}P^2$.

Задача 128. Докажите, что пространство всех неупорядоченных наборов из n различных точек плоскости есть пространство типа $K(\pi, 1)$ для некоторой группы π ; задайте эту группу образующими и соотношениями. Эта группа называется *группой кос из n нитей*.

Задача 129. Сделайте подобное для упорядоченных наборов (группа крашенных кос).

Задача 130. Построить пространство с заданными гомотопическими группами.

Задача 131. Покажите, что $\Omega K(\pi, n) = K(\pi, n-1)$.

Теорема 11.25. Любые два пространства типа $K(\pi, n)$ слабо гомотопически эквивалентны. В частности, любые два клеточных пространства типа $K(\pi, n)$ гомотопически эквивалентны.

Доказательство. Пусть X — пространство типа $K(\pi, n)$, построенное в доказательстве теоремы 11.22, и Y — произвольное пространство типа $K(\pi, n)$. Мы построим отображение $f : X \rightarrow Y$, индуцирующее изоморфизм гомотопических групп $\pi_n(X) \rightarrow \pi_n(Y)$. Напомним, что n -й остов X_n пространства X есть букет $\vee_\alpha S^n$ n -мерных сфер, соответствующих образующим группы π . Поскольку $\pi_n(Y) = \pi$, мы можем отождествить эти образующие с элементами группы $\pi_n(Y)$. Отобразим $\vee_\alpha S^n$ в Y при помощи сфероидов, представляющих эти элементы. Все, что мы должны еще сделать — как-нибудь продолжить это отображение до непрерывного отображения $X \rightarrow Y$; любое такое продолжение будет обладать требуемыми свойствами. Продолжение строится отдельно для каждой клетки пространства X , и каждый раз оно оказывается возможным, потому что композиция приклеивающего отображения клетки с уже построенным отображением есть сфероид, гомотопный нулю. Для клеток размерности $n+1$ это вытекает из того, что они отвечают соотношениям в группе π , а для клеток больших размерностей — из того, что $\pi_i(Y) = 0$ при $i > n$. \square

При доказательстве теоремы 11.22 и в других местах мы пользовались следующей операцией *заклеивания гомотопических групп* размерности $> n$, которая превращает пространство X в пространство X' содержащее X и такое, что (1) $\pi_q(X') = 0$ при $q > n$, (2) гомоморфизм $\pi_q(X) \rightarrow \pi_q(X')$, индуцированный включением $X \rightarrow X'$, является изоморфизмом при $q \leq n$. Для построения пространства X' достаточно сначала приклеить к X $(n+2)$ -мерные клетки по сфероидам, представляющим образующие группы $\pi_{n+1}(X)$, затем приклеить $(n+3)$ -мерные клетки по сфероидам, представляющим образующие группы π_{n+2} полученного пространства и т.д. Операция заклеивания гомотопически единственна:

Задача 132. Пусть X — топологическое пространство, X'_1 и X'_2 — два пространства, содержащие X и обладающие свойствами (1), (2) из определения заклеивания. Тогда существует слабая гомотопическая эквивалентность $X'_1 \rightarrow X'_2$, гомотопная на X включению $X \rightarrow X'_2$.

Заклеивание позволяет определить каноническое отображение произвольного пространства X в надлежащий $K(\pi, n)$. Именно, пусть $\pi_n(X) = \pi$ — первая нетривиальная гомотопическая группа пространства X (для простоты предполагаемого связным). Заклеим у X гомотопические группы размерностей $> n$. Получится пространство типа $K(\pi, n)$ и отображение (включение) $X \rightarrow K(\pi, n)$, которое устанавливает изоморфизм групп π_n . Из задачи 132 и теоремы 11.25 легко вывести, что эта конструкция гомотопически единственна.

Рассмотрим теперь операцию *убивания*. Превратим построенное выше отображение $X \rightarrow K(\pi, n)$, где $\pi = \pi_n(X)$, $\pi_q(X) = 0$ при $q < n$, в гомотопически эквивалентное расслоение в смысле Серра (см. теорему 10.12) и возьмем слой этого расслоения. Этот слой, определенный канонически с точностью до слабой гомотопической эквивалентности, называется (первым или $(n+1)$ -м) *убивающим пространством* для X и обозначается через $X|_{n+1}$. Имеется (гомотопически единственное) каноническое отображение $X|_{n+1} \rightarrow X$.

Теорема 11.26.

$$\pi_q(X|_{n+1}) = \begin{cases} 0 & \text{при } q \leq n, \\ \pi_q(X) & \text{при } q > n. \end{cases}$$

Более того, каноническое отображение $X|_{n+1} \rightarrow X$ индуцирует изоморфизм гомотопических групп в размерностях $> n$.

Это стандартным образом выводится из точности гомотопической последовательности расслоения, гомотопически эквивалентного отображению $X \rightarrow K(\pi, n)$. Конструкцию убивающего пространства можно итерировать. В результате для произвольного пространства X и произвольного числа m получаются пространство $X|_m$ и отображение $X|_m \rightarrow X$, такие, что индуцированное отображение $\pi_q(X|_m) \rightarrow \pi_q(X)$ является изоморфизмом при $q \geq m$, а группы $\pi_q(X|_m)$ с $q < m$ равны 0.

Задача 133. Докажите, что для любого связного пространства X каноническое отображение $X|_2 \rightarrow X$ слабо гомотопически эквивалентно универсальному накрытию.

Задача 134. Докажите, что $S^2|_3 = S^3$ и $\mathbb{C}P^n|_3 = \mathbb{C}P^n|_{2n+1} = S^{2n+1}$.

Задача 135. Докажите, что в ситуации теоремы 11.26 слой расслоения, гомотопически эквивалентного каноническому отображению $X|_{n+1} \rightarrow X$, есть $K(\pi, n-1)$.

12. СИНГУЛЯРНЫЕ ГОМОЛОГИИ

Пусть A_0, A_1, \dots, A_q — точки пространства \mathbb{R}^n , где $n > q$, не лежащие в одной $(q-1)$ -мерной плоскости. Выпуклая оболочка множества этих точек называется *евклидовым симплексом* с вершинами A_0, A_1, \dots, A_q ; выпуклые оболочки подмножеств этого множества — *границы* указанного симплекса. *Стандартный евклидов симплекс* — евклидов симплекс T^q в \mathbb{R}^{q+1} , вершинами которого являются концы координатных ортов:

$$T^q = \left\{ (t_0, \dots, t_q) \in \mathbb{R}^{q+1} \mid t_0 \geq 0, \dots, t_q \geq 0, \sum_{i=0}^q t_i = 1 \right\}.$$

Назовем q -мерным *сингулярным симплексом* топологического пространства X непрерывное отображение стандартного q -мерного симплекса T^q в X , а q -мерной (сингулярной) *цепью* пространства X — конечную линейную комбинацию сингулярных симплексов пространства X с целыми коэффициентами; $\sum k_i f_i$, $f_i : T^q \rightarrow X$. Множество q -мерных сингулярных цепей пространства X обозначается через $C_q(X)$. Сложение цепей как линейных комбинаций делает $C_q(X)$ группой, так что $C_q(X)$ — свободная абелева группа, порожденная множеством всех q -мерных сингулярных симплексов пространства X . Теперь мы определим *граничный гомоморфизм* $\partial = \partial_q : C_q(X) \rightarrow C_{q-1}(X)$. Так как группа $C_q(X)$ свободна, то достаточно определить ∂ на сингулярных симплексах. Для сингулярного симплекса f мы полагаем

$$\partial f = \sum (-1)^i \Gamma_i f,$$

где $\Gamma_i f$ — сужение отображения f на i -ю грань

$$T_i^{q-1} = \{(t_0, \dots, t_q) \in T^q \mid t_i = 0\}$$

стандартного симплекса T^q , которая отождествлена с T^{q-1} при помощи соответствия

$$(t_0, \dots, t_{i-1}, 0, t_{i+1}, \dots, t_q) \mapsto (t_0, \dots, t_{i-1}, t_{i+1}, \dots, t_q).$$

Теорема 12.1. *Композиция*

$$C_{q+1} \xrightarrow{\partial_{q+1}} C_q \xrightarrow{\partial_q} C_{q-1}$$

равна 0, т.е. $\text{Im } \partial_{q+1} \subset \text{Ker } \partial_q$.

Доказательство. Пользуемся соотношениями

$$\Gamma_i \Gamma_j f = \begin{cases} \Gamma_{j-1} \Gamma_i f, & \text{при } j > i, \\ \Gamma_j \Gamma_{i+1} f, & \text{при } j \leq i. \end{cases}$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \sum_i (-1)^i \sum_j (-1)^j \Gamma_i \Gamma_j f &= \sum_{j>i} (-1)^{i+j} \Gamma_{j-1} \Gamma_i f + \sum_{j<i} (-1) \Gamma_i \Gamma_j f + \sum_i (-1)^{2i} \Gamma_i \Gamma_i f = \\ &= \sum_{j<i} (-1)^{i+j} \Gamma_{i-1} \Gamma_j f + \sum_{j<i} (-1)^{i+j} \Gamma_i \Gamma_j f + \sum_i \Gamma_i \Gamma_i f = \\ &= 0 + \sum_{i=j+1} (-1)^{i+j} \Gamma_{i-1} \Gamma_j f + \sum_i \Gamma_i \Gamma_i f = - \sum_i \Gamma_i \Gamma_i f + \sum_i \Gamma_i \Gamma_i f = 0. \end{aligned}$$

□

Определение 12.2. Обозначим через $Z_q(X) := \text{Ker } \partial_q$ подгруппу *циклов*, а через $B_q(X) := \text{Im } \partial_{q+1}$ — подгруппу *границ*. При $q > 1$ факторгруппа $H_q(X) := Z_q(X)/B_q(X)$ называется q -й (q -мерной) *гомологической группой* (группой гомологий) пространства X . Полагают также $H_0(X) := C_0(X)/\text{Im } \partial_1$ и $H_q(X) = 0$ при $q < 0$. Циклы, разность которых есть граница, называют *гомологичными*; таким образом, элементы группы гомологий — это классы гомологичных циклов, иногда их называют гомологическими классами. Если группа $H_q(X)$ конечно порождена, то ее ранг (т.е. число слагаемых \mathbb{Z} в каноническом разложении $H_q(X) = \mathbb{Z} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_{k_1} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}_{k_m}$) называется q -м *числом Бетти* пространства X .

Определение 12.3. (Аугментированным) *цепным комплексом* называется последовательность

$$\dots \rightarrow C_q \xrightarrow{\partial_q} C_{q-1} \rightarrow \dots \rightarrow C_1 \xrightarrow{\partial_1} C_0 \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z}$$

абелевых групп, в которой $\partial_q \circ \partial_{q+1} = 0$, $\varepsilon \circ \partial_1 = 0$ и ε — эпиморфизм. Группа $H_q = \text{Ker } \partial_q / \text{Im } \partial_{q+1}$ называется q -й (q -мерной) *гомологической группой комплекса* при $q > 1$; 0-мерная гомологическая группа определяется как $C_0 / \text{Im } \partial_1$. Группа $\tilde{H}_0 = \text{Ker } \varepsilon / \text{Im } \partial_1$ называется *приведенной* 0-мерной гомологической группой.

Класс когомологий элемента α обозначаем $\{\alpha\}$.

Пополним последовательность

$$\dots \rightarrow C_q(X) \xrightarrow{\partial_q} C_{q-1}(X) \rightarrow \dots \rightarrow C_0(X)$$

групп цепей топологического пространства X гомоморфизмом

$$\varepsilon : C_0(X) \rightarrow \mathbb{Z}, \quad \varepsilon \left(\sum_i k_i f_i \right) = \sum_i k_i.$$

Получается *сингулярный цепной комплекс*, гомологические группы которого совпадают с гомологическими группами пространства X . Приведенные нульмерные гомологии пространства X обозначаются символом $\tilde{H}_0(X)$; пишут также $\tilde{H}_q(X) = H_q(X)$ при $q \neq 0$.

Определение 12.4. Пусть даны два цепных комплекса $C' = \{C'_q, \partial'_q, \varepsilon'\}$ и $C'' = \{C''_q, \partial''_q, \varepsilon''\}$. (Цепным) *отображением* комплекса C' в комплекс C'' называется такое семейство гомоморфизмов $\varphi_q : C'_q \rightarrow C''_q$, что диаграмма

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \longrightarrow & C'_q & \xrightarrow{\partial'_q} & C'_{q-1} & \longrightarrow & \dots \longrightarrow C'_1 & \xrightarrow{\partial'_1} & C'_0 & \xrightarrow{\varepsilon'} & \mathbb{Z} \\ & & \downarrow \varphi_q & & \downarrow \varphi_{q-1} & & \downarrow \varphi_1 & & \downarrow \varphi_0 & & \downarrow \text{Id} \\ \dots & \longrightarrow & C''_q & \xrightarrow{\partial''_q} & C''_{q-1} & \longrightarrow & \dots \longrightarrow C''_1 & \xrightarrow{\partial''_1} & C''_0 & \xrightarrow{\varepsilon''} & \mathbb{Z} \end{array}$$

коммутативна.

Ясно, что цепное отображение индуцирует отображение гомологий

$$\text{Ker } \partial'_q / \text{Im } \partial'_{q+1} \rightarrow \text{Ker } \partial''_q / \text{Im } \partial''_{q+1},$$

поскольку $\text{Ker } \partial'_q \rightarrow \text{Ker } \partial''_q$ и $\text{Im } \partial'_{q+1} \rightarrow \text{Im } \partial''_{q+1}$. Пусть $g : X \rightarrow Y$ — непрерывное отображение топологических пространств. Естественно возникают гомоморфизмы $g_{\#} = g_{\#q} C_q(X) \rightarrow C_q(Y)$: сингулярный симплекс $f : T^q \rightarrow X$ переходит в сингулярный симплекс $g \circ f : T^q \rightarrow Y$. Очевидно, что $\{g_{\#q}\}$ — цепное отображение комплекса

$\{C_q(X), \partial_q\}$ в комплекс $\{C_q(Y), \partial_q\}$; для возникающих отображений в гомологиях употребляется обозначение $g_* = g_{*q} : H_q(X) \rightarrow H_q(Y)$. Очевидно, что при этом

$$(h \circ g)_* = h_* \circ g_*,$$

$$(\text{Id}_X)_* = \text{Id}_{H_q(X)}.$$

Определение 12.5. Пусть C' и C'' — цепные комплексы, $\varphi = \{\varphi_q : C'_q \rightarrow C''_q\}$, $\psi = \{\psi_q : C'_q \rightarrow C''_q\}$ — цепные отображения. *Цепной гомотопией*, связывающей φ с ψ называется такая совокупность гомоморфизмов $D_q : C'_q \rightarrow C''_{q+1}$, $q \geq 0$, $D_{-1} = 0$, что при каждом q

$$D_{q-1} \circ \partial'_q + \partial''_{q+1} \circ D_q = \psi_q - \varphi_q.$$

Если такая гомотопия существует, отображения φ и ψ называют *гомотопными* ($\varphi \sim \psi$).

Теорема 12.6. *Гомотопные отображения индуцируют одинаковые отображения в гомологиях.*

Доказательство. Если $\partial'_q \alpha = 0$, то

$$\psi \alpha - \varphi \alpha = D_{q-1} \circ \partial'_q \alpha + \partial''_{q+1} \circ D_q \alpha = \partial''_{q+1} \circ D_q \alpha \in \text{Im } \partial''_{q+1}.$$

□

Теорема 12.7. *Если $g, h : X \rightarrow Y$ — гомотопные отображения топологических пространств, то цепные отображения $g_\#$ и $h_\#$, индуцированные отображениями g и h , цепно гомотопны. В частности, $g_* = h_*$.*

Доказательство. Пусть $H : X \times I \rightarrow Y$ — гомотопия, связывающая g с h . Тогда для любого сингулярного симплекса $f : T^q \rightarrow X$ определено отображение $H \circ (f \times \text{Id}) : T^q \times I \rightarrow Y$. Цилиндр $T^q \times I$ канонически разбивается на симплексы T'_i , $i = 0, \dots, q$:

$$T'_i = \{(t_0, \dots, t_q, \tau) \in T^q \times I \mid t_0 + \dots + t_{i-1} \leq \tau \leq t_0 + \dots + t_i\}.$$

Поэтому отображение $H \circ (f \times \text{Id})$ определяет $q+1$ сингулярных симплексов размерности $q+1$. Их сумму с некоторыми знаками мы принимаем за $D_q(f)$. По-другому можно поступить следующим образом. Рассмотрим $T^q \times I$ как подпространство $\mathbb{R}^{q+1} \times \mathbb{R}$. Для точек v_0, \dots, v_m из \mathbb{R}^{q+2} обозначим через $[v_0, \dots, v_m]$ линейный сингулярный симплекс, т.е. такое линейное отображение T^m в \mathbb{R}^{q+2} , при котором i -я вершина отображается в v_i , $0 \leq i \leq m$. Определим $(q+1)$ -мерную цепь $P\delta_q \in C_{q+1}(T^q \times I)$, где $\delta_q \in C_q(T^q)$ — тождественный сингулярный симплекс, формулой

$$P\delta_q = \sum_{i=0}^q (-1)^i [(e_0, 0), \dots, (e_i, 0), (e_i, 1), \dots, (e_q, 1)].$$

Зададим $P : C_q(X) \rightarrow C_{q+1}(X \times I)$, полагая

$$Pf = (f \times \text{Id})_\#(P\delta_q)$$

для любого сингулярного симплекса $f : T^q \rightarrow X$ и продолжая его на всю группу $C_n(X)$ по линейности. Очевидно, что P естественно и

$$\begin{aligned} & \partial_{q+1} P\delta_q + P\partial_q \delta_q = \\ & = \sum_{i=0}^q (-1)^i \partial_{q+1} [(e_0, 0), \dots, (e_i, 0), (e_i, 1), \dots, (e_q, 1)] + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{i=0}^q (-1)^i P[e_0, \dots, e_{i-1}, e_{i+1}, \dots, e_q] = \\
& = \sum_{i=0}^q (-1)^i \left(\sum_{j=0, j < i}^{q+1} (-1)^j [(e_0, 0), \dots, (e_{j-1}, 0), (e_{j+1}, 0), \dots, (e_i, 0), (e_i, 1), \dots, (e_q, 1)] + \right. \\
& \quad + (-1)^i [(e_0, 0), \dots, (e_{i-1}, 0), (e_i, 1), \dots, (e_q, 1)] + \\
& \quad \left. + (-1)^{i+1} [(e_0, 0), \dots, (e_i, 0), (e_{i+1}, 1), \dots, (e_q, 1)] + \right. \\
& \quad \left. + \sum_{j=0, j > i+1}^{q+1} (-1)^j [(e_0, 0), \dots, (e_i, 0), (e_i, 1), \dots, (e_{j-2}, 1), (e_j, 1), \dots, (e_q, 1)] \right) + \\
& + \sum_{i=0}^q (-1)^i \left(\sum_{j=0, j < i-1}^{q-1} (-1)^j [(e_0, 0), \dots, (e_j, 0), (e_j, 1), \dots, (e_{i-1}, 1), (e_{i+1}, 1), \dots, (e_q, 1)] + \right. \\
& \quad + (-1)^{i-1} [(e_0, 0), \dots, (e_{i-1}, 0), (e_{i-1}, 1), (e_{i+1}, 1), \dots, (e_q, 1)] + \\
& \quad \left. + (-1)^i [(e_0, 0), \dots, (e_{i-1}, 0), (e_{i+1}, 0), (e_{i+1}, 1), \dots, (e_q, 1)] + \right. \\
& \quad \left. + \sum_{j=0, j > i}^{q-1} (-1)^j [(e_0, 0), \dots, (e_{i-1}, 0), (e_{i+1}, 0), \dots, (e_j, 0), (e_{j+1}, 0), (e_{j+1}, 1), \dots, (e_q, 1)] \right) = \\
& = \sum_{i=0}^q \sum_{j=0, j < i}^{q+1} (-1)^{i+j} [(e_0, 0), \dots, (e_{j-1}, 0), (e_{j+1}, 0), \dots, (e_i, 0), (e_i, 1), \dots, (e_q, 1)] + \\
& \quad + \sum_{i=0}^q [(e_0, 0), \dots, (e_{i-1}, 0), (e_i, 1), \dots, (e_q, 1)] + \\
& \quad - \sum_{i=0}^q [(e_0, 0), \dots, (e_i, 0), (e_{i+1}, 1), \dots, (e_q, 1)] + \\
& + \sum_{i=0}^q \sum_{j=0, j > i+1}^{q+1} (-1)^{i+j} [(e_0, 0), \dots, (e_i, 0), (e_i, 1), \dots, (e_{j-2}, 1), (e_j, 1), \dots, (e_q, 1)] + \\
& + \sum_{i=0}^q \sum_{j=0, j < i-1}^{q-1} (-1)^{i+j} [(e_0, 0), \dots, (e_j, 0), (e_j, 1), \dots, (e_{i-1}, 1), (e_{i+1}, 1), \dots, (e_q, 1)] + \\
& \quad - \sum_{i=0}^q [(e_0, 0), \dots, (e_{i-1}, 0), (e_{i-1}, 1), (e_{i+1}, 1), \dots, (e_q, 1)] + \\
& \quad + \sum_{i=0}^q [(e_0, 0), \dots, (e_{i-1}, 0), (e_{i+1}, 0), (e_{i+1}, 1), \dots, (e_q, 1)] + \\
& + \sum_{i=0}^q \sum_{j=0, j > i}^{q-1} (-1)^{i+j} [(e_0, 0), \dots, (e_{i-1}, 0), (e_{i+1}, 0), \dots, (e_j, 0), (e_{j+1}, 0), (e_{j+1}, 1), \dots, (e_q, 1)] = \\
& = \sum_{i=0}^q \sum_{j=0, j < i}^{q-1} (-1)^{i+j} [(e_0, 0), \dots, (e_{j-1}, 0), (e_{j+1}, 0), \dots, (e_i, 0), (e_i, 1), \dots, (e_q, 1)] + \\
& \quad + [(e_0, 1), \dots, (e_q, 1)] - [(e_0, 0), \dots, (e_q, 0)] +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{i=0}^q \sum_{j=0, j>i+1}^{q+1} (-1)^{i+j} [(e_0, 0), \dots, (e_i, 0), (e_i, 1), \dots, (e_{j-2}, 1), (e_j, 1), \dots, (e_q, 1)] + \\
& + \sum_{j=0}^q \sum_{i=0, i<j-1}^{q-2} (-1)^{i+j} [(e_0, 0), \dots, (e_i, 0), (e_i, 1), \dots, (e_{j-1}, 1), (e_{j+1}, 1), \dots, (e_q, 1)] + \\
& \quad - \sum_{i=1}^q [(e_0, 0), \dots, (e_{i-1}, 0), (e_{i-1}, 1), (e_{i+1}, 1), \dots, (e_q, 1)] + \\
& \quad + \sum_{i=0}^{q-1} [(e_0, 0), \dots, (e_{i-1}, 0), (e_{i+1}, 0), (e_{i+1}, 1), \dots, (e_q, 1)] + \\
& + \sum_{j=0}^q \sum_{i=0, i>j}^{q-1} (-1)^{i+j} [(e_0, 0), \dots, (e_{j-1}, 0), (e_{j+1}, 0), \dots, (e_i, 0), (e_{i+1}, 0), (e_{i+1}, 1), \dots, (e_q, 1)].
\end{aligned}$$

Рассмотрим третью и четвертую строки. При $i = 0, \dots, q-2$ и $j = 0, \dots, q$ соответствующий элемент из четвертой строчки имеет противоположный знак и равен по модулю элементу из третьей строки с тем же i и $j' = j+1$. Остаются несокращенными из третьей строки элементы с $i = q-1, q$ и любым j . Из условий на j единственный вариант: $i = q-1, j = q+1$. Кроме этого, элементы с $i = 0, \dots, q-2$ и $j = i+2$. Итак, третья и четвертая строки редуцируются до

$$\sum_{i=0}^{q-1} (-1)^{2i+2} [(e_0, 0), \dots, (e_i, 0), (e_i, 1), (e_{i+2}, 1), \dots, (e_q, 1)],$$

что сокращается с пятой строкой. Рассмотрим первую и последнюю строки. Элемент с $j = 0, \dots, q-1$ и $i = 0, \dots, q, i > j$ (так что $i = 1, \dots, q$) из первой строчки сокращается с элементом с тем же j и $i' = i-1$ из последней строчки, а элементов с $j = q$ в последней строчке фактически нет из-за ограничения. Не могут сократиться лишь элементы из первой строки с $i = j+1$, так как для соответствующих i' не выполняется условие $i' > j$. Итак, первая и последняя строчки редуцируются до

$$\sum_{j=0}^{q-1} (-1)^{j+1+j} [(e_0, 0), \dots, (e_{j-1}, 0), (e_{j+1}, 0), (e_{j+1}, 1), \dots, (e_q, 1)],$$

что сокращается с шестой строкой. Остается

$$[(e_0, 1), \dots, (e_q, 1)] - [(e_0, 0), \dots, (e_q, 0)] = i_{1\#} \delta_q - i_{0\#} \delta_q,$$

где $i_0, i_1 : X \rightarrow X \times I$ определяются формулами $i_0(x) = (x, 0)$, $i_1(x) = (x, 1)$, $x \in X$.

Имеем $H \circ i_0 = g$, $H \circ i_1 = h$. Так что если определить $D_q : C_q(X) \rightarrow C_{q+1}(Y)$ как композицию $H_{\#} \circ P$, то

$$\partial \circ D_q + D_q \circ \partial = \partial \circ H_{\#} \circ P + H_{\#} \circ P \circ \partial = H_{\#} \circ (\partial \circ P + P \circ \partial) = H_{\#} \circ (i_{1\#} - i_{0\#}) = h - g.$$

□

Следствие 12.8. *Гомотопическая эквивалентность индуцирует изоморфизм гомологий.*

Пример 12.9. Пусть pt — одноточечное пространство. При любом q имеется единственный сингулярный симплекс $f_q : T^q \rightarrow pt$. Таким образом, $C_q(pt) = \mathbb{Z}$ при всех $q \geq 0$. Далее,

$$\partial f_q = \sum_i (-1)^i \Gamma_i f_q = \left[\sum_i (-1)^i \right] f_{q-1},$$

откуда

$$\partial f_q = \begin{cases} 0 & \text{при нечетном } q, \\ f_{q-1} & \text{при четном } q. \end{cases}$$

Следовательно, цепной комплекс имеет вид

$$\dots \xrightarrow{\text{Id}} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \xrightarrow{\text{Id}} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \xrightarrow{\varepsilon=\text{Id}} \mathbb{Z},$$

так что $H_0(pt) = \mathbb{Z}$, $H_q(pt) = 0$ при $q > 0$ (если q нечетно, то $\text{Ker } \partial_q = \text{Im } \partial_{q+1} = \mathbb{Z}$, а если q четно, то $\text{Ker } \partial_q = \text{Im } \partial_{q+1} = 0$). Далее, $\tilde{H}_0(pt) = 0$ (так что $\tilde{H}_q(pt) = 0$ при всех q).

Определение 12.10. Пространство, имеющее такие же гомологии как точка, называется *ациклическим*.

Следствие 12.11 (из примера 12.9 и теоремы 12.8). *Всякое стягиваемое пространство ациклично.*

Теорема 12.12. (1) Если пространство X линейно связно, то $H_0(X) = \mathbb{Z}$.
 (2) В общем случае $H_0(X)$ — свободная абелева группа, порожденная множеством компонент линейной связности пространства X , т.е. множеством $\pi_0(X)$.
 (3) Всегда $H_0(X) \cong \tilde{H}_0(X) \oplus \mathbb{Z}$.
 (4) Если X_α — множество компонент линейной связности пространства X , то при любом q имеем $H_q(X) = \sum_\alpha H_q(X_\alpha)$.

Доказательство. Все пункты, кроме первого, очевидны. Докажем первый пункт. Нульмерные сингулярные симплексы полностью определяются точкой (образом), а одномерные сингулярные симплексы — это пути, причем граница пути — конец минус начало. Если пространство X линейно связно, то отсюда следует, что всякая нульмерная цепь $\sum k_i f_i$ (которая всегда является циклом) гомологична цепи $(\sum k_i) f_0$, где f_0 — произвольно фиксированный нульмерный сингулярный симплекс, поскольку $f_i - f_0$ — граница пути, их соединяющего. Из этого видно, что достаточным условием гомологичности $\sum k_i f_i \sim \sum k'_i f'_i$ является равенство $\sum k_i = \sum k'_i$. Это же условие является и необходимым, поскольку у границы сумма коэффициентов равна 0. Таким образом, имеем одно линейное условие, выделяющее границы среди циклов, что дает требуемый результат. \square

Задача 136. Если $f : X \rightarrow Y$ — непрерывное отображение одного связного пространства в другое, то $f_* : H_0(X) \rightarrow H_0(Y)$ — изоморфизм.

Пусть A — подмножество топологического пространства X (иначе говоря, (X, A) — топологическая пара). Тогда $C_q(A) \subset C_q(X)$ и $\partial_q(C_q(A)) \subset C_{q-1}(A)$. Факторгруппа $C_q(X, A) = C_q(X)/C_q(A)$ называется группой *относительных сингулярных цепей пространства X по модулю A* ; это — свободная абелева группа, множество образующих которой можно отождествить с множеством таких сингулярных симплексов

$f : T^q \rightarrow X$, что $f(T^q) \not\subset A$. Операторы $\partial_q : C_q(X) \rightarrow C_{q-1}(X)$ индуцируют операторы $\partial_q : C_q(X, A) \rightarrow C_{q-1}(X, A)$, и получаем комплекс

$$(7) \quad \dots C_2(X, A) \xrightarrow{\partial_2} C_1(X, A) \xrightarrow{\partial_1} C_0(X, A)$$

(без аугментации). Соответствующие *относительные гомологические группы* — гомологии этого комплекса — обозначаются через $H_q(X, A)$. Если определить *относительные циклы* как такие цепи пространства X , границы которых лежат в A , а *относительные границы*, как те относительные циклы, которые отличаются от обычных границ на некоторую цепь, лежащую в A , то относительные гомологические группы можно определить как факторгруппы групп относительных циклов по группам относительных границ.

Задача 137. Провести аккуратно это отождествление.

Задача 138. По аналогии с теоремой 12.12 вычислить нулевые относительные гомологии.

Задача 139. Для всякого непустого пространства X имеют место естественные изоморфизмы $\tilde{H}_q(X) \cong H_q(X, x_0)$, где x_0 — произвольная точка X .

Граница относительного цикла является абсолютным (т.е. обыкновенным) циклом пространства A ; сопоставление $\alpha \mapsto \partial_q \alpha$ определяет при каждом q отображение

$$\partial_* : H_q(X, A) \rightarrow H_{q-1}(A).$$

Чтобы убедиться, что это действительно корректно заданное отображение гомологий, заметим, что если α — относительная граница, то есть α — такая цепь X , граница которой лежит в A , причем имеется такая цепь β в A , что $\alpha - \beta = \partial\gamma$, то

$$\partial_q \alpha = \partial \partial \gamma + \partial \beta = \partial \beta,$$

то есть $\partial_q \alpha$ — абсолютная граница в A .

Теорема 12.13. *Отображение ∂_* включается в точную последовательность*

$$(8) \quad \dots \rightarrow H_q(A) \xrightarrow{i_*} H_q(X) \xrightarrow{j_*} H_q(X, A) \xrightarrow{\partial_*} H_{q-1}(A) \rightarrow \dots,$$

гомоморфизмы $i_* : H_q(A) \rightarrow H_q(X)$ индуцируются включением $i : A \rightarrow X$, а гомоморфизмы $j_* : H_q(X) \rightarrow H_q(X, A)$ индуцируются проекциями

$$C_q(X) \rightarrow C_q(X)/C_q(A) = C_q(X, A).$$

Определение 12.14. Последовательность (8) называется *точной гомологической последовательностью пары*. Очевидно, что она ведет себя естественно по отношению к отображениям $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ топологических пар, т.е. коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{cccccccc} \dots & \longrightarrow & H_q(A) & \longrightarrow & H_q(X) & \longrightarrow & H_q(X, A) & \longrightarrow & H_{q-1}(A) & \longrightarrow & \dots \\ & & \downarrow f_* & & \downarrow f_* & & \downarrow f_* & & \downarrow f_* & & \\ \dots & \longrightarrow & H_q(B) & \longrightarrow & H_q(Y) & \longrightarrow & H_q(Y, B) & \longrightarrow & H_{q-1}(B) & \longrightarrow & \dots \end{array}$$

Доказательство теоремы 12.13. Проверим точность в члене $H_q(X, A)$ (остальное — в качестве упражнения).

Докажем, что $\text{Im } j_* \subset \text{Ker } \partial_*$. Пусть $\{\alpha\} \in H_q(X)$, $\alpha \in C_q(X)$, тогда $\partial_q \alpha = 0$ и

$$\partial_q j_* \alpha = \partial_q j(\alpha) = \partial_q(\alpha + C_q(A)) = \partial_q(C_q(A)) = B_q(A) = 0 \in H_q(A).$$

Докажем, что $\text{Im } j_* \supset \text{Ker } \partial_*$. Пусть $\{\alpha\} \in \text{Ker } \partial_*$. Тогда $\alpha = \beta + C_q(A)$, $\beta \in C_q(X)$, $\partial_q(\beta) \in \partial C_q(A)$ (а не просто $C_{q-1}(A)$ как было бы в отсутствие требования $\partial_*\{\alpha\} = 0$). Таким образом, $\partial_q(\beta) = \partial_q(\gamma)$, где $\gamma \in C_q(A)$. Значит, $\beta - \gamma \in Z_q(X)$. При этом $j_*(\beta - \gamma) = j_*(\beta)$, так что $j_*\{\beta - \gamma\} = \alpha$. \square

Задача 140. Проверить точность в остальных членах.

Задача 141. Установить естественный изоморфизм $H_q(X) \cong H_q(X, \emptyset)$ и коммутативность диаграммы

$$\begin{array}{ccc} H_q(X) & \xrightarrow{\cong} & H_q(X, \emptyset) \\ & \searrow j_* & \swarrow k_* \\ & & H_q(X, A) \end{array},$$

где $k : (X, \emptyset) \hookrightarrow (X, A)$ — естественное включение.

Задача 142. Построить гомологическую последовательность тройки (X, A, B)

$$\dots \rightarrow H_q(A, B) \rightarrow H_q(X, B) \rightarrow H_q(X, A) \rightarrow H_{q-1}(A, B) \rightarrow \dots$$

и установить ее свойства, в частности, вывести из нее гомотопическую инвариантность относительных гомологий.

Теорема 12.15. Пусть (X, A) — топологическая пара.

- (1) Если (X, A) — пара Борсука, например, клеточная пара, то при любом q отображение

$$p_* : H_q(X, A) \rightarrow H_q(X/A, a) = \tilde{H}_q(X/A),$$

где $p : X \rightarrow X/A$ — естественная проекция и $a = p(A)$, является изоморфизмом.

- (2) В общем случае включение $X \rightarrow X \cup CA$, где $X \cup CA$ получается из X присоединением конуса CA над A , индуцирует изоморфизм

$$H_q(X, A) \cong H_q(X \cup CA, CA) = H_q(X \cup CA, v) = \tilde{H}_q(X \cup CA),$$

где через v обозначена вершина конуса CA , а предпоследнее равенство является следствием гомотопической инвариантности относительных гомологий (см. задачу 142) и стягиваемости конуса CA .

Для доказательства теоремы нам понадобятся некоторые вспомогательные конструкции и определения.

Барицентрическое подразделение q -мерного симплекса состоит в том, что этот симплекс разбивается на $(q + 1)!$ более мелких q -мерных симплексов. Вершины новых симплексов — это центры тяжести граней исходного симплекса всех размерностей (в том числе — его самого). Множество $\{x_0, x_1, \dots, x_q\}$ этих центров является множеством вершин некоторого симплекса барицентрического подразделения, если соответствующие грани $\Delta_0, \dots, \Delta_q$ можно составить в цепочку последовательно вложенных

друг в друга. Второй способ описания барицентрического подразделения по индукции: барицентрическое подразделение нульмерного симплекса совпадает с ним самим (базис индукции). Для q -мерного сначала подвергаются барицентрическому подразделению все его $(q-1)$ -мерные грани, а потом над всеми построенными симплексами строятся конусы с вершиной в центре этого симплекса. Третий способ: симплекс Δ — это совокупность точек вида $\sum_i t_i v_i$, где v_i — вершины, $t_i \geq 0$, $\sum_i t_i = 1$; симплексы барицентрического подразделения отвечают перестановкам $\tau = (i(0), \dots, i(q)) \in S_q$ чисел $0, \dots, q$ и состоят из точек $\sum_i t_i v_i$ с $t_{i(0)} \leq t_{i(1)} \leq \dots \leq t_{i(q)}$.

Барицентрическое подразделение βf сингулярного симплекса $f : T^q \rightarrow X$ определяется как сингулярная цепь

$$\sum_{\tau \in S_q} (-1)^\tau f_\tau,$$

где суммирование распространяется на все перестановки τ множества вершин симплекса T^q , а f_τ обозначает сужение отображения f на q -мерный симплекс барицентрического подразделения, отвечающий перестановке τ и отождествляемый с T^q путем сопоставления вершине симплекса барицентрического подразделения, являющейся центром некоторой i -мерной грани симплекса T^q , переходит при отождествлении в i -ю вершину симплекса T^q .

Задача 143. Гомеоморфизм, при помощи которого производится указанное отождествление, сохраняет или обращает ориентацию в зависимости от четности перестановки τ .

Продолжим β на цепи по линейности.

Лемма 12.16. $\beta\partial = \partial\beta$; таким образом, β индуцирует отображение $\beta_* : H_q(X) \rightarrow H_q(X)$.

Доказательство. Достаточно проверить на симплексе. В силу задачи 143 внутренние грани входят с противоположными знаками и сокращаются. \square

Задача 144. Проверить детали доказательства.

Лемма 12.17. Отображение β_* тождественно: $\beta_* = \text{Id}_{H_q(X)}$. Более того, существует цепная гомотопия D , связывающая цепное отображение β с тождественным отображением и такая, что образы сингулярных симплексов, входящих в цепь Df , содержатся в образе сингулярного симплекса f .

Доказательство. Построим специальную триангуляцию цилиндра $T^q \times I$. При $q = 0$ — это отрезок, далее 2 индуктивно следующим образом. Триангулируем дно $T^q \times 0$ цилиндра $T^q \times I$ естественным образом (с одним q -мерным симплексом), а стенки $T_i^{q-1} \times I$ — в соответствии с уже построенной триангуляцией $T^{q-1} \times I$ (важно, что эта триангуляция симметрична: она выдерживает аффинные автоморфизмы симплекса T^{q-1} , как угодно переставляющие его вершины). После этого триангулируем весь цилиндр, разбив его на конусы, основаниями которых служат симплексы построенной триангуляции дна и стенок, а вершина находится в центре верхнего основания $T^q \times 1$. Теперь для сингулярного симплекса $f : T^q \rightarrow X$ определим $Df \in C_{q+1}(X)$ как сумму с коэффициентами ± 1 сужений сквозного отображения

$$T^q \times I \xrightarrow{\text{проекция}} T^q \xrightarrow{f} X$$

на $(q + 1)$ -мерные симплексы построенной триангуляции цилиндра $T^q \times I$. Возникающие отображения

$$D : C_q(X) \rightarrow C_{q+1}(X), \quad D \sum_i k_i f_i = \sum_i k_i Df_i$$

составляют гомотопию, связывающую β с тождественным отображением. Эта гомотопия удовлетворяет требованиям леммы. Детали доказательства, в том числе и точное описание выбора знаков, осуществляется как в предыдущей теореме и оставляется в качестве упражнения. \square

Задача 145. Разобрать детали доказательства.

Лемма 12.18. Пусть $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}$ — конечное открытое покрытие пространства X . Обозначим через $C_q^{\mathcal{U}}(X)$ подгруппу группы q -мерных сингулярных цепей пространства X , порожденную такими сингулярными симплексами $f : T^q \rightarrow X$, что $f(T^q) \subset U_\alpha$ при некотором α . Очевидно, $\partial(C_q^{\mathcal{U}}(X)) \subset C_{q-1}^{\mathcal{U}}(X)$, так что $\{C_q^{\mathcal{U}}(X), \partial_q\}$ — подкомплекс комплекса $\{C_q(X), \partial_q\}$. Тогда включение комплекса $\{C_q^{\mathcal{U}}(X), \partial_q\}$ в комплекс $\{C_q(X), \partial_q\}$ индуцирует изоморфизм гомологий.

Доказательство. Мы должны доказать, что (а) всякий цикл из $C_q(X)$ гомологичен циклу из $C_q^{\mathcal{U}}(X)$ и что (б) если цикл, лежащий в $C_q^{\mathcal{U}}(X)$, является границей некоторой цепи из $C_{q+1}(X)$, то он является границей цепи из $C_{q+1}^{\mathcal{U}}(X)$. Оба факта очевидным образом выводятся из следующих трех утверждений:

- (1) для любой q -мерной цепи c цепь $\beta^n c$ с достаточно большим n содержится в $C_q^{\mathcal{U}}(X)$ (очевидно);
- (2) циклы c и $\beta^n c$ гомологичны при любом n (лемма 12.17);
- (3) если c — цикл из $C_q^{\mathcal{U}}(X)$, то разность $c - \beta^n c$ является границей цепи из $C_{q+1}^{\mathcal{U}}(X)$ (вторая часть леммы 12.17). \square

Доказательство теоремы 12.15. Первая часть теоремы является следствием второй части, ввиду гомотопической инвариантности гомологий и того факта, что для любой пары Борсука (X, A) проекция $X \cup CA \rightarrow (X \cup CA)/CA = X/A$ является гомотопической эквивалентностью.

Рассмотрим покрытие \mathcal{U} пространства $X \cup CA$, составленное из открытой части $C_0A = (X \cup CA) \setminus X$ конуса CA и множества $X \cup \bar{C}A$, где $\bar{C}A$ — нижняя половина конуса CA . Из относительного варианта леммы 12.18, который является следствием абсолютного варианта и леммы о пяти гомоморфизмах, вытекает, что гомологии пары $(X \cup CA, CA)$ можно вычислять при помощи цепей

$$C_q^{\mathcal{U}}(X \cup CA, CA) = C_q^{\mathcal{U}}(X \cup CA)/C_q^{\mathcal{U}}(CA)$$

(покрытие конуса CA , индуцированное покрытием \mathcal{U} , мы снова обозначаем через \mathcal{U}). Но, очевидно,

$$C_q^{\mathcal{U}}(X \cup CA)/C_q^{\mathcal{U}}(CA) = C_q(X \cup \bar{C}A)/C_q(\bar{C}A) = C_q(X \cup \bar{C}A, \bar{C}A),$$

откуда

$$H_q(X \cup CA, CA) = H_q(X \cup \bar{C}A, \bar{C}A) = H_q(X, A)$$

— последнее равенство вытекает из гомотопической инвариантности гомологий. \square

Задача 146. Пусть \mathcal{S} — некоторое множество сингулярных симплексов пространства X , включающее вместе с каждым сингулярным симплексом все его грани. Для произвольного сингулярного симплекса $f : T^q \rightarrow X$ его *исправлением* называется пара, составленная из гомотопии $f_t : T^q \rightarrow X$ и триангуляции τ стандартного симплекса T^q , таких, что $f_0 = f$ и сужение отображения f_1 на любой симплекс триангуляции τ принадлежит \mathcal{S} . Очевидно, исправление сингулярного симплекса индуцирует исправление всех его граней. Множество \mathcal{S} называется *достаточным*, если выполняется следующее условие. Пусть f — сингулярный симплекс, для всех граней которого заданы исправления, согласованные в их пересечениях (т.е. в гранях граней); тогда существует исправление сингулярного симплекса f , согласованное с заданными исправлениями граней. Докажите, что если множество \mathcal{S} достаточно, то подкомплекс сингулярного цепного комплекса пространства X , порожденный симплексами из \mathcal{S} , имеет такие же гомологии, как весь комплекс (точнее, включение подкомплекса в комплекс индуцирует изоморфизм в гомологиях). Неформально говоря, гомологии пространства X можно вычислять, пользуясь только сингулярными симплексами из \mathcal{S} .

Задача 147. Если \mathcal{U} — открытое покрытие пространства X , то сингулярные симплексы, заключенные в элементы покрытия, составляют достаточное множество.

Задача 148. Если X — область евклидова пространства (или произвольное гладкое многообразие), то гладкие сингулярные симплексы составляют достаточное множество.

Задача 149. Пусть X — область евклидова пространства. Докажите, что достаточное множество составляют аффинные сингулярные симплексы (аффинные отображения стандартных симплексов в X).

Задача 150. Пусть X — триангулированное подмножество евклидова пространства, или полиэдр. Рассмотрим множество \mathcal{S} сингулярных симплексов, симплициально отображающих стандартные симплексы на симплексы триангуляции (симплициальное отображение евклидова симплекса на евклидов симплекс есть, по определению, аффинное отображение, переводящее вершины в вершины). Докажите, что множество \mathcal{S} достаточно.

Часть 2. Весенний семестр

13. ВЫЧИСЛЕНИЕ ГОМОЛОГИЙ КЛЕТОЧНЫХ ПРОСТРАНСТВ

13.1. Гомологии сфер. Изоморфизм надстройки.

Теорема 13.1. Если $n > 0$, то

$$H_i(S^n) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{при } i = 0, n, \\ 0 & \text{при } i \neq 0, n. \end{cases}$$

При $n = 0$: $H_0(S^0) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$, $H_i(S^0) = 0$ при $i > 0$.

Иными словами, в приведенных гомологиях при всех $n \geq 0$

$$\tilde{H}_i(S^n) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{при } i = n, \\ 0 & \text{при } i \neq n. \end{cases}$$

Доказательство. Рассмотрим точную последовательность тройки (D^n, S^{n-1}, pt) и отождествим гомологии относительно точки с приведенными гомологиями, а также применим результаты предыдущего параграфа:

$$\begin{array}{ccccccc} \tilde{H}_i(D^n) & \rightarrow & H_i(D^n, S^{n-1}) & \rightarrow & \tilde{H}_{i-1}(S^{n-1}) & \rightarrow & \tilde{H}_{i-1}(D^n). \\ \parallel & & \parallel & & \parallel & & \\ 0 & & \tilde{H}_i(S^n) & & 0 & & \end{array}$$

Получаем, что $\tilde{H}_i(S^n) = \tilde{H}_{i-1}S^{n-1}$ (этот изоморфизм будет обобщен в следующей теореме). Таким образом, вычисление свелось к известным гомологиям S^0 . \square

Теорема 13.2 (изоморфизм надстройки). *Для любого топологического пространства X и любого i*

$$\tilde{H}_i(\Sigma X) = \tilde{H}_{i-1}(X),$$

где Σ — надстройка.

Доказательство. Рассмотрим приведенную гомологическую последовательность пары (CX, X) , где CX — конус над пространством X , а X отождествляется с его основанием (это — всегда пара Борсука):

$$\begin{array}{ccccccc} \tilde{H}_i(CX) & \rightarrow & H_i(CX, X) & \rightarrow & \tilde{H}_{i-1}(X) & \rightarrow & \tilde{H}_{i-1}(CX). \\ \parallel & & \parallel & & \parallel & & \\ 0 & & \tilde{H}_i(CX/X) & & 0 & & \end{array}$$

Осталось заметить, что $CX/X = \Sigma X$. \square

Задача 151. Теорема 13.2 уточняется следующим образом. Пусть $f : T^{i-1} \rightarrow X$ — сингулярный симплекс пространства X . Сквозное отображение

$$T^i = CT^{i-1} \xrightarrow{Cf} CX \xrightarrow{\text{проекция}} \Sigma X$$

представляет собой сингулярный симплекс пространства ΣX , обозначаемый через Σf . Докажите, что отображения

$$\Sigma : C_{i-1}(X) \rightarrow C_i(\Sigma X), \quad \sum_i k_i f_i \mapsto \sum_i k_i (\Sigma f_i),$$

перестановочны с ∂ и определяют изоморфизм $H_{i-1}(X) \rightarrow H_i(\Sigma X)$, совпадающий с изоморфизмом, построенным в доказательстве теоремы 13.2. Этот изоморфизм называется изоморфизмом надстройки и обозначается снова через Σ .

Задача 152. Пользуясь предыдущим упражнением, постройте сингулярные циклы, представляющие гомологии сфер.

Задача 153. Докажите, что гомеоморфизм $T^i \rightarrow D^i$ является относительным сингулярным циклом пары (D^i, S^{i-1}) , задающим образующую группы $H_i(D^i, S^{i-1}) = \mathbb{Z}$.

Задача 154. Постройте относительный вариант изоморфизма Σ и докажите естественность изоморфизма Σ по отношению к отображениям ∂ и f_* .

13.2. Гомологии букетов.

Теорема 13.3. Если (X_α, x_α) , $\alpha \in A$, — пространства с отмеченными точками, являющиеся парами Борсука, то при любом i

$$\tilde{H}_i(\vee_{\alpha \in A} X_\alpha) = \bigoplus_{\alpha \in A} \tilde{H}_i(X_\alpha),$$

где \vee — букет.

Доказательство. Букет — факторпространство несвязной суммы по объединению отмеченных точек. \square

Следствие 13.4. Пусть A — произвольное множество, S_α^n ($\alpha \in A$) — копии стандартной n -мерной сферы. Тогда

$$\tilde{H}_i(\vee_{\alpha \in A} S_\alpha^n) = \begin{cases} \bigoplus_{\alpha \in A} \mathbb{Z}_{(\alpha)} & \text{при } i = n, \\ 0 & \text{при } i \neq n. \end{cases}$$

($\bigoplus_{\alpha \in A} \mathbb{Z}_{(\alpha)}$ — свободная абелева группа, порожденная множеством A).

Замечание 13.5. С другой стороны, эта теорема вытекает из теоремы 13.2, поскольку букет $\vee_{\alpha \in A} S_\alpha^n$ гомотопически эквивалентен надстройке $\Sigma(\vee_{\alpha \in A} S_\alpha^{n-1})$ (даже гомеоморфен этой надстройке, если надстройку понимать в модифицированном смысле, учитывающем отмеченную точку; для такой надстройки справедлив аналог теоремы 13.2), а для букета нульмерных сфер (базиса индукции) утверждение верно.

13.3. Отображения букетов сфер. Напомним, что непрерывное отображение сферы в себя $S^n \rightarrow S^n$ имеет степень — целое число, характеризующее его гомотопический класс (алгебраическое число прообразов). Непрерывное отображение

$$g : \vee_{\alpha \in A} S_\alpha^n \rightarrow \vee_{\beta \in B} S_\beta^n$$

имеет целую “матрицу” степеней $\|d_{\alpha\beta}\|$, $\alpha \in A$, $\beta \in B$, где число $d_{\alpha\beta}$ — степень отображения

$$S^n \xrightarrow{i_\alpha} \vee_{\alpha \in A} S_\alpha^n \xrightarrow{g} \vee_{\beta \in B} S_\beta^n \xrightarrow{p_\beta} S^n,$$

где i_α — тождественное отображение сферы S^n на S_α^n , а p_β — отображение, тождественно отображающее сферу S_β^n на S^n и отображающее остальные сферы букета в точку.

Задача 155. Характеризуют ли степени $d_{\alpha\beta}$ гомотопический класс отображения g ?

Теорема 13.6. Матрица отображения

$$g_* : \begin{array}{ccc} H_n(\vee_{\alpha \in A} S_\alpha^n) & \rightarrow & H_n(\vee_{\beta \in B} S_\beta^n) \\ \parallel & & \parallel \\ \bigoplus_{\alpha} \mathbb{Z}_{(\alpha)} & & \bigoplus_{\beta} \mathbb{Z}_{(\beta)} \end{array}$$

совпадает с $\|d_{\alpha\beta}\|$. В частности, отображение

$$f_* : \begin{array}{ccc} H_n(S^n) & \rightarrow & H_n(S^n) \\ \parallel & & \parallel \\ \mathbb{Z} & & \mathbb{Z} \end{array}$$

индуцируемое отображением $f : S^n \rightarrow S^n$ степени d , есть умножение на d .

Доказательство. Надстройка $\Sigma f : S^{n+1} \rightarrow S^{n+1}$ над отображением $f : S^n \rightarrow S^n$ степени d тоже имеет степень d . Поэтому, ввиду естественности гомологических гомоморфизмов по отношению к Σ , доказательство утверждения теоремы при некотором n влечет за собой его доказательство при всех больших n . С другой стороны, при $n = 0$ утверждение очевидно. Таким образом, теорема доказана для отображений, являющихся надстройками над отображениями S^0 , в том числе i_α и p_β . Так что i_α и p_β индуцируют, соответственно, вложение и проекцию

$$\mathbb{Z} = \mathbb{Z}_{(\alpha)} \subset \bigoplus_\alpha \mathbb{Z}_{(\alpha)}, \quad \bigoplus_\beta \mathbb{Z}_{(\beta)} \rightarrow \mathbb{Z}_{(\beta)} = \mathbb{Z}.$$

Следовательно, утверждение теоремы достаточно проверить для всех композиций $p_\beta \circ g \circ i_\alpha$, т.е. доказать его для отображений $S^n \rightarrow S^n$. В качестве (представителя) отображения $S^n \rightarrow S^n$ степени d можно выбрать композицию двух отображений: отображения f_1 на букет d сфер (так что каждая точка, кроме отмеченной, имеет ровно один прообраз) и отображения f_2 указанного букета на сферу (так что каждая сфера букета отображается тождественно). Композиция отображения $f_1 : S^n \rightarrow S^n \vee \dots \vee S^n$ с любым отображением $p_\beta : S^n \vee \dots \vee S^n \rightarrow S^n$ гомотопна тождественному отображению и индуцирует в n -мерных гомологиях отображение $\text{Id} : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$; поэтому

$$f_{1*} : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}, \quad f_{1*}(1) = (1, \dots, 1).$$

Далее, композиция любого отображения $i_\alpha : S^n \rightarrow S^n \vee \dots \vee S^n$ с $f_2 : S^n \vee \dots \vee S^n \rightarrow S^n$ тоже гомотопна тождественному отображению, и потому

$$f_{2*} : \mathbb{Z} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, \quad f_{2*}(a_1, \dots, a_d) = a_1 + \dots + a_d.$$

Следовательно,

$$f_*(1) = f_{2*} \circ f_{1*}(1) = f_{2*}(1, \dots, 1) = d.$$

Теорема доказана. \square

13.4. Клеточный комплекс. Пусть X — клеточное пространство, $\text{sk}_n X = X^n$, ($n = 0, 1, 2, \dots$) — его остовы.

Лемма 13.7. *Группа $H_i(X^q, X^{q-1})$ равна 0 при $i \neq q$ и является свободной абелевой группой, порожденной множеством q -мерных клеток пространства X , при $i = q$.*

Доказательство. $H_i(X^q, X^{q-1}) = \tilde{H}_i(X^q/X^{q-1}) = \tilde{H}_i(\vee S^q)$. \square

Группа $C_q(X) := H_q(X^q, X^{q-1})$ называется группой q -мерных клеточных цепей пространства X . Клеточный дифференциал $\partial = \partial_q : C_q(X) \rightarrow C_{q-1}(X)$ определяется как гомоморфизм

$$\begin{array}{ccc} \partial_q : H_q(X^q, X^{q-1}) & \rightarrow & H_{q-1}(X^{q-1}, X^{q-2}) \\ \parallel & & \parallel \\ C_q(X) & & C_{q-1}(X) \end{array}$$

из гомологической последовательности тройки (X^q, X^{q-1}, X^{q-2}) . По определению $\partial \circ \partial = 0$ и получаем клеточный комплекс

$$\dots \xrightarrow{\partial} C_q(X) \xrightarrow{\partial} \dots \xrightarrow{\partial} C_1(X) \xrightarrow{\partial} C_0(X) \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z},$$

где $\varepsilon : C_0(X) = H_0(X^0) \rightarrow \mathbb{Z}$ определяется, как для сингулярных цепей.

Изоморфизм между группой $C_q(X)$ и указанной свободной абелевой группой зависит от выбора гомеоморфизма $X^q/X^{q-1} \approx \vee S^q$ (разные гомеоморфизмы не гомотопны). Этот гомеоморфизм канонически строится, если для q -мерных клеток σ_i

фиксированы характеристические отображения $f_i : D^q \rightarrow X$: отображение f_i определяет гомеоморфизм

$$\bar{f}_i : S^q = D^q/D^{q-1} \rightarrow \bar{\sigma}_i/\partial\sigma_i \subset X^q/X^{q-1}.$$

Предполагать, что характеристические отображения фиксированы, неудобно: обычно мы знаем только, что они существуют. На самом деле фиксировать нужно не характеристические отображения, а ориентации клеток (в предположении, что они занумерованы). Мы скажем, что два характеристических отображения, $f_i : D^q \rightarrow X$ и $f'_i : D^q \rightarrow X$, определяют одну и ту же ориентацию клетки σ_i , если сквозной гомеоморфизм

$$S^q \xrightarrow{\bar{f}_i} \bar{\sigma}_i/\partial\sigma_i \xrightarrow{(\bar{f}'_i)^{-1}} S^q$$

имеет степень 1 (гомотопен тождественному); другая возможность состоит в том, что этот гомеоморфизм имеет степень -1, и в этом случае говорят, что f_i и f'_i определяют разные ориентации. В этом смысле каждая клетка имеет две ориентации, и выбор ориентаций у всех q -мерных клеток доставляет определенный изоморфизм между группой $\mathcal{C}_q(X)$ и группой линейных комбинаций $\sum k_i\sigma_i$. (Удобно считать, что в этой записи σ_i — ориентированные клетки и перемена ориентации у клетки σ_i равносильна перемене знака $\sigma_i \rightarrow -\sigma_i$. В случае $q = 0$ характеристическое отображение единственно, и никакого произвола в выборе изоморфизма нет.

Рассмотрим дифференциал $\partial : \mathcal{C}_q(X) \rightarrow \mathcal{C}_{q-1}(X)$. Пусть σ и τ — соответственно q -мерная и $(q-1)$ -мерная клетки пространства X , а $f : D^q \rightarrow X$ и $g : D^{q-1} \rightarrow X$ — характеристические отображения. Рассмотрим композицию

$$\begin{aligned} S^{q-1} \xrightarrow{f|_{S^{q-1}}} X^{q-1} &\xrightarrow{\text{проекция}} X^{q-1}/(X^{q-2} \cup (\text{все } (q-1)\text{-мерные клетки, кроме } \tau)) = \\ &= \bar{\tau}/\partial\tau \xrightarrow{\bar{g}^{-1}} S^{q-1}. \end{aligned}$$

Степень этого отображения — целое число — называется *коэффициентом инцидентности между σ и τ* и обозначается через $[\sigma : \tau]$.

Задача 156. Число $[\sigma : \tau]$ зависит только от ориентаций клеток σ и τ , при перемене любой из этих ориентаций число $[\sigma : \tau]$ меняет знак.

Заметим, что если σ и τ не пересекаются, то, очевидно, $[\sigma : \tau] = 0$. Поэтому при данном σ коэффициент $[\sigma : \tau]$ может быть отличен от нуля лишь для конечного числа τ .

Теорема 13.8. $\partial(\sum_i k_i\sigma_i) = \sum_i k_i(\sum_j [\sigma_i : \tau_j]\tau_j)$, где $\{\sigma_i\}$ — некоторые q -мерные, а $\{\tau_j\}$ — все $(q-1)$ -мерные клетки пространства X .

Доказательство. Мы должны показать, что τ входит в $\partial\sigma$ с коэффициентом $[\sigma; \tau]$. Рассмотрим отображение $(D^q, S^{q-1}, \emptyset) \rightarrow (X^q, X^{q-1}, X^{q-2})$, определяемое характеристическим отображением $f : D^q \rightarrow X$ клетки σ . Возникает диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z} = H_q(D^q, S^{q-1}) & \xrightarrow{\partial_*} & \tilde{H}_{q-1}(S^{q-1}) = \mathbb{Z} \\ \downarrow \alpha & & \downarrow \beta \\ \tilde{H}_q(X^q/X^{q-1}) & \xrightarrow{\partial_*} & H_q(X^q, X^{q-1}) \xrightarrow{\partial_*} H_{q-1}(X^{q-1}, X^{q-2}) \xrightarrow{\partial_*} \tilde{H}_{q-1}(X^{q-1}/X^{q-2}) \\ & \parallel & \parallel \\ & \mathcal{C}_q(X) & \xrightarrow{\partial} \mathcal{C}_{q-1}(X) \end{array}$$

(α и β — гомоморфизмы, индуцируемые f). Ясно, что $\alpha(1) = \sigma \in \mathcal{C}_q(X)$, и потому $\partial\sigma = \beta(\partial_*(1)) = \beta(1)$. Но в силу теоремы об отображении букетов образ элемента $1 \in \tilde{H}_{q-1}(S^{q-1})$ при сквозном отображении

$$\begin{aligned} \tilde{H}_{q-1}(S^{q-1}) &\xrightarrow{\beta} H_{q-1}(X^{q-1}, X^{q-2}) = \tilde{H}_{q-1}(X^{q-1}/X^{q-2}) = \\ &= \tilde{H}_{q-1}(\vee_j S_{(j)}^{q-1}) = \bigoplus_j \tilde{H}_{q-1}(S_{(j)}^{q-1}) \end{aligned}$$

в слагаемом $\tilde{H}_{q-1}(S_j^{q-1}) = \mathbb{Z}$, отвечающем клетке τ , есть в точности степень соответствующего отображения $S^{q-1} \rightarrow S^{q-1}$, т.е. $[\sigma; \tau]$. \square

13.5. Гомологии клеточного комплекса. Обозначим временно гомологии клеточного комплекса через $\mathcal{H}_q(X)$.

Теорема 13.9. *Гомологии клеточного комплекса клеточного пространства X канонически изоморфны сингулярным гомологиями пространства X .*

Доказательство. 1: $\mathcal{H}_q(X) \cong H_q(X^{q+1}, X^{q-2})$ (остовы с отрицательными номерами считаются пустыми). Рассмотрим диаграмму

$$\begin{array}{ccccccc} \mathcal{C}_{q+1}(X) & & H_q(X^{q-1}, X^{q-2}) & \xlongequal{\quad} & 0 & & \\ \parallel & & \downarrow & & & & \\ H_{q+1}(X^{q+1}, X^q) & \xrightarrow{\partial_*} & H_q(X^q, X^{q-2}) & \xrightarrow{\alpha} & H_q(X^{q+1}, X^{q-2}) & \longrightarrow & H_q(X^{q+1}, X^q) \\ & \searrow \partial_{q+1} & \downarrow \beta & & & & \parallel \\ & & H_q(X^q, X^{q-1}) & \xlongequal{\quad} & \mathcal{C}_q(X) & & 0 \\ & & \downarrow \partial_q & & & & \\ & & H_{q-1}(X^{q-1}, X^{q-2}) & \xlongequal{\quad} & \mathcal{C}_{q-1}(X), & & \end{array}$$

в которой строка есть отрезок точной гомологической последовательности тройки (X^{q+1}, X^q, X^{q-2}) , а столбец — отрезок гомологической последовательности тройки (X^q, X^{q-1}, X^{q-2}) (равенства нулю вытекают из леммы 13.7). Из точности последовательностей и тривиальности групп $H_q(X^{q-1}, X^{q-2})$, $H_q(X^{q+1}, X^q)$, следует, что β — мономорфизм, а α — эпиморфизм. Следовательно,

$$\begin{aligned} H_q(X^{q+1}, X^{q-2}) &= H_q(X^q, X^{q-2}) / \text{Ker } \alpha = H_q(X^q, X^{q-2}) / \text{Im } \partial_* = \\ &= \beta H_q(X^q, X^{q-2}) / \beta(\text{Im } \partial_*) = \text{Im } \beta / (\text{Im } (\beta \circ \partial_*)). \end{aligned}$$

В силу коммутативности диаграммы $\beta \circ \partial_* = \partial_{q+1}$, а в силу точности вертикальной последовательности $\text{Im } \beta = \text{Ker } \partial_q$. Таким образом, последняя факторгруппа равна $\text{Ker } \partial_q / \text{Im } \partial_{q+1}$, что и требуется. В случае $q = 0$ ситуация даже проще:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & \mathcal{C}_1(X) & & 0 & & & \\
 & \parallel & & \downarrow & & & \\
 H_1(X^1, X^0) & \xrightarrow{\partial_*} & H_0(X^0) & \xrightarrow{\alpha} & H_0(X^1) & \longrightarrow & H_0(X^1, X^0) \\
 & \searrow \partial_1 & \downarrow \beta & & & & \parallel \\
 & & H_0(X^0) = \mathcal{C}_0(X) & & & & 0 \\
 & & \downarrow \partial_0 & & & & \\
 & & 0 & & & &
 \end{array}$$

2: $H_q(X^{q+1}, X^{q-2}) = H_q(X^{q+1})$. Точные гомологические последовательности троек (X^{q+1}, X^i, X^{i-1}) , $i = q-2, q-3, \dots, 1, 0$,

$$0 = H_q(X^i, X^{i-1}) \rightarrow H_q(X^{q+1}, X^{i-1}) \xrightarrow{\cong} H_q(X^{q+1}, X^i) \rightarrow H_{q-1}(X^i, X^{i-1}) = 0,$$

дают:

$$H_q(X^{q+1}, X^{q-2}) \cong H_q(X^{q+1}, X^{q-3}) \cong \dots \cong H_q(X^{q+1}, X^0) \cong H_q(X^{q+1}).$$

3: $H_q(X^{q+1}) \cong H_q(X)$. Гомологические последовательности пар (X^i, X^{i-1}) при $i = q+2, q+3, \dots$

$$0 = H_{q+1}(X^i, X^{i-1}) \rightarrow H_q(X^{i-1}) \xrightarrow{\cong} H_q(X^i) \rightarrow H_q(X^i, X^{i-1}) = 0$$

дают: $H_q(X^{q+1}) \cong H_q(X^{q+2}) \cong \dots$. Если $\dim X < \infty$, то все доказано. Если X бесконечномерно, то требуется дополнительное замечание: поскольку стандартный симплекс компактен, то объединение образов всех симплексов цепи — компактное подмножество в X . По задаче 82 оно содержится в конечном подкомплексе. Поэтому вопрос для конкретной цепи решается на конечном шаге. \square

Следствие 13.10. Если число q -мерных клеток клеточного пространства X равно n , то группа $H_q(X)$ порождается не более, чем n образующими; в частности, $b_q(X^q) \leq n$, где b_q обозначает q -е число Бетти. Например, если у X вовсе нет q -мерных клеток, то $H_q(X) = 0$; в частности, если $\dim X = m$, то $H_q(X) = 0$ при $q > m$.

Далее было объяснено, что такое классический комплекс и как считать гомологии проективных пространств (электронный вариант второй части лекции временно отсутствует).

14. ГОМОЛОГИИ И ГОМОТОПИИ

Поскольку сферойды — тоже циклы, гомотопные сферойды — гомологичные циклы, то имеется естественное отображение гомотопических групп в гомологии, называемое гомоморфизмом Гуревича.

14.1. Гомологии и слабые гомотопические эквивалентности.

Лемма 14.1. Пусть X — топологическое пространство и $\alpha \in H_q(X)$. Тогда существуют такие клеточное пространство Y , класс гомологий $\beta \in H_q(Y)$ и непрерывное отображение $f : Y \rightarrow X$, что $f_*(\beta) = \alpha$.

Доказательство. Пусть $\sum_{i=1}^N k_i f_i$ — сингулярный цикл, представляющий класс α . Рассмотрим сумму N копий стандартного симплекса: $T = \sqcup_{i=1}^N T_i^q$. Произведем в T следующее отождествление. Пусть Γ_1 и Γ_2 — грани одной размерности $r \leq q$ симплексов $T_{i_1}^q$ и $T_{i_2}^q$; вершины граней Γ_1 и Γ_2 упорядочены (порядок наследуется от вершин симплексов $T_{i_1}^q$ и $T_{i_2}^q$), и это порождает канонический аффинный гомеоморфизм $\Gamma_1 \approx \Gamma_2$. Мы отождествляем (поточечно) $\Gamma_1 \subset T_{i_1}^q \subset T$ с $\Gamma_1 \subset T_{i_2}^q \subset T$, если $f_{i_1}|_{\Gamma_1} \equiv f_{i_2}|_{\Gamma_2}$. При отождествлении из T получается клеточное пространство (так как если отображения совпадают на открытой части симплекса, то и на всем симплексе), которое мы принимаем за Y . Отображения $f_i : T_i^q \rightarrow X$ корректно определяют непрерывное отображение $f : Y \rightarrow X$. Обозначим через F_i сквозное отображение

$$T^q = T_i^q \xrightarrow{\text{вложение}} T \xrightarrow{\text{проекция}} Y.$$

Ясно, что $\sum_i k_i F_i$ — сингулярный цикл пространства Y , и что отображение f переводит F_i в f_i и $\sum_i k_i F_i$ — в $\sum_i k_i f_i$. Таким образом, если $\beta \in H_q(Y)$ — гомологический класс цикла $\sum_i k_i F_i$, то $f_*(\beta) = \alpha$. \square

Относительный вариант:

Лемма 14.2. Пусть (X, A) — топологическая пара, причем A замкнуто, и $\alpha \in H_q(X, A)$. Тогда существуют такие клеточная пара (Y, B) , класс гомологий $\beta \in H_q(Y, B)$ и непрерывное отображение $f : (Y, B) \rightarrow (X, A)$, что $f_*(\beta) = \alpha$.

Доказательство. Пусть $\sum_{i=1}^N k_i f_i$ — относительный сингулярный цикл, представляющий класс α . Рассмотрим сумму N копий стандартного симплекса: $T = \sqcup_{i=1}^N T_i^q$. Произведем в T следующее отождествление. Пусть Γ_1 и Γ_2 — грани одной размерности $r \leq q$ симплексов $T_{i_1}^q$ и $T_{i_2}^q$; вершины граней Γ_1 и Γ_2 упорядочены (порядок наследуется от вершин симплексов $T_{i_1}^q$ и $T_{i_2}^q$), и это порождает канонический аффинный гомеоморфизм $\Gamma_1 \approx \Gamma_2$. Мы отождествляем (поточечно) $\Gamma_1 \subset T_{i_1}^q \subset T$ с $\Gamma_1 \subset T_{i_2}^q \subset T$, если $f_{i_1}|_{\Gamma_1} \equiv f_{i_2}|_{\Gamma_2}$. При отождествлении из T получается клеточное пространство (так как если отображения совпадают на открытой части симплекса, то и на всем симплексе), которое мы принимаем за Y . Отображения $f_i : T_i^q \rightarrow X$ корректно определяют непрерывное отображение $f : Y \rightarrow X$. Обозначим через F_i сквозное отображение

$$T^q = T_i^q \xrightarrow{\text{вложение}} T \xrightarrow{\text{проекция}} Y.$$

В качестве B мы берем объединение клеток, отображающихся в A при f . В силу замкнутости A это — подкомплекс. Ясно, что $\sum_i k_i F_i$ — относительный сингулярный цикл пространства Y , и что если $\beta \in H_q(Y, B)$ — гомологический класс цикла $\sum_i k_i F_i$, то $f_*(\beta) = \alpha$. \square

Теорема 14.3. Если $f : X_1 \rightarrow X_2$ — слабая гомотопическая эквивалентность, то $f_* : H_q(X_1) \rightarrow H_q(X_2)$ — изоморфизм при всех q .

Это означает, в силу теоремы 11.17, что если отображение $f : X_1 \rightarrow X_2$ индуцирует изоморфизм в гомотопических группах, то оно индуцирует изоморфизм и в гомологических группах.

Доказательство. Напомним, что отображение $f : X_1 \rightarrow X_2$ называется слабой гомотопической эквивалентностью, если для любого клеточного пространства Y отображение $f_* : \pi(Y, X_1) \rightarrow \pi(Y, X_2)$ является взаимно однозначным соответствием.

Эпиморфность отображения $f_* : H_q(X_1) \rightarrow H_q(X_2)$ следует из леммы: если $\alpha \in H_q(X_2)$, то найдется клеточное пространство Y , гомологический класс $\beta \in H_q(Y)$ и отображение $g : Y \rightarrow X_2$, такие, что $g_*(\beta) = \alpha$. Далее, так как f — слабая гомотопическая эквивалентность, существует такое отображение $h : Y \rightarrow X_1$, что $f \circ h \sim g$. Полагая $\gamma = g_*(\beta) \in H_q(X_1)$, имеем: $f_*(\gamma) = (f \circ h)_*(\beta) = g_*(\beta) = \alpha$.

В доказательстве мономорфности используется относительный вариант леммы. Ввиду гомотопической инвариантности гомологий можно считать, что f — вложение, т.е. что (X_2, X_1) — топологическая пара, причем X_1 замкнуто (при необходимости можно заменить X_2 цилиндром отображения f , а f — вложением пространства X_1 в цилиндр в качестве верхнего основания). Если $\alpha \in H_q(X_1)$ и $f_*(\alpha) = 0$, то существует $\beta \in H_{q+1}(X_2, X_1)$ с $\partial_*(\beta) = \alpha$ (точность последовательности пары). В силу относительной леммы существует клеточная пара (Y, B) , гомологический класс $\gamma \in H_{q+1}(Y, B)$ и отображение $g : (Y, B) \rightarrow (X_2, X_1)$, такие, что $g_*(\gamma) = \beta$. Наконец, так как f — слабая гомотопическая эквивалентность, то существует отображение $h : Y \rightarrow X_1$, такое, что $h|_B = g|_B$ (см. теорему 11.17). Получаем:

$$\alpha = \partial_*(\beta) = \partial_* \circ g_*(\gamma) = (g|_B)_* \circ \partial_*(\gamma) h_* \circ j_* \circ \partial_*(\gamma) = 0,$$

где j — включение B в Y , а $j_* \circ \partial_* = 0$ в силу точности гомологической последовательности пары (Y, B) . \square

Задача 157. Покажите, что пространства S^2 и $\mathbb{C}P^\infty \times S^3$ имеют одинаковые гомотопические группы, но разные гомологические группы. То же для пространств $S^m \times \mathbb{R}P^n$ и $S^n \times \mathbb{R}P^m$ с $m \neq n$, $m \neq 1$, $n \neq 1$.

Задача 158. Покажите, что пространства $S^1 \vee S^1 \vee S^2$ и $S^1 \times S^1$ имеют одинаковые гомологические группы, но разные гомотопические группы.

Задача 159. Покажите, что хопфовское отображение $S^3 \rightarrow S^2$ индуцирует тривиальный гомоморфизм в приведенных гомологиях, но индуцирует нетривиальный гомоморфизм в гомотопических группах.

Задача 160. Покажите, что проекция $S^1 \times S^1 \rightarrow (S^1 \times S^1)/(S^1 \vee S^1) = S^2$ индуцирует тривиальный гомоморфизм в гомотопических группах, но индуцирует нетривиальный гомоморфизм в гомологиях (в том числе в приведенных).

14.2. Теорема Гуревича. Пусть X — топологическое пространство с отмеченной точкой x_0 . Обозначим через s_n каноническую образующую группы $H_n(S^n) = \mathbb{Z}$, $n = 1, 2, \dots$. Для любого $\varphi \in \pi_n(X, x_0)$ положим

$$h(\varphi) = f_*(s_n),$$

где $f : S^n \rightarrow X$ — произвольный сфероид класса φ . Очевидно, что $h(\varphi)$ не зависит от выбора f . Ясно также, что сопоставление $\varphi \mapsto h(\varphi)$ определяет гомоморфизм

$$h : \pi_n(X, x_0) \rightarrow H_n(X);$$

этот гомоморфизм называется *гомоморфизмом Гуревича*; он естествен по отношению к непрерывным отображениям пунктированных пространств.

Задача 161. Докажите, что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \pi_n(X, x_0) & \xrightarrow{s\#} & \pi_n(X, x_0) \\ & \searrow h & \swarrow h \\ & H_n(X) & \end{array}$$

коммутативна для любого пути s , соединяющего точки x_0 и x_1 .

Теорема 14.4 (Гуревич). Пусть

$$\pi_0(X, x_0) = \pi_1(X, x_1) = \cdots = \pi_{n-1}(X, x_0) = 0, \quad n \geq 2.$$

Тогда $H_1(X) = \cdots = H_{n-1}(X) = 0$ и $h : \pi_n(X, x_0) \rightarrow H_n(X, x_0)$ является изоморфизмом.

Доказательство. Согласно теореме 11.20 существует клеточное пространство, слабо гомотопически эквивалентное X ; поскольку гомотопии и гомологии слабо гомотопически инвариантны, мы можем считать, что само X было клеточным. Далее, как было показано в теореме 6.19, пространство X гомотопически эквивалентно клеточному пространству с единственной вершиной и без клеток размерностей $1, 2, \dots, n-1$. Уже из этого видно, что $H_1(X) = \cdots = H_{n-1}(X) = 0$ (см. следствие 13.10), а $H_n(X) = \mathcal{C}_n(X)/\text{Im } \partial_{n+1}$ не отличается от $\pi_n(X)$ в силу теоремы 11.14. \square

Следствие 14.5 (обратная теорема Гуревича). Если пространство X связно и односвязно, а $H_2(X) = \cdots = H_{n-1}(X) = 0$, то $\pi_2(X) = \cdots = \pi_{n-1}(X) = 0$ и $h : \pi_n(X) \rightarrow H_n(X)$ является изоморфизмом.

Следствие 14.6. Односвязное клеточное пространство с тривиальными гомологиями размерностей ≥ 2 стягиваемо.

Доказательство. По обратной теореме Гуревича X имеет тривиальные гомотопические группы, а значит, по теореме Уайтхеда 11.18, стягиваемо. \square

Задача 162. Односвязное клеточное пространство, имеющее такие же гомологии, как сфера, гомотопически эквивалентно сфере (примените теорему Уайтхеда к сфероидам $S^n \rightarrow X$, представляющему образующую группы $\pi_n(X) = \mathbb{Z}$). То же верно для букетов сфер.

Задача 163. Композиция

$$S^1 \times S^1 \times S^1 \xrightarrow{\text{проекция}} (S^1 \times S^1 \times S^1)/\text{sk}_2(S^1 \times S^1 \times S^1) = S^3 \xrightarrow{\text{Хопф}} S^2$$

индуцирует тривиальное отображение как в гомотопических, так и в гомологических группах, но не гомотопно постоянному отображению.

Задача 164. То же для отображения

$$S^{2n-2} \times S^3 \xrightarrow{\text{проекция}} (S^{2n-2} \times S^3)/(S^{2n-2} \vee S^3) = S^{2n+1} \xrightarrow{\text{Хопф}} \mathbb{C}P^n.$$

14.3. Случай $n = 1$.

Теорема 14.7 (Пуанкаре). Для любого связного пространства X гомоморфизм Гуревича $h : \pi_1(X) \rightarrow H_1(X)$ является эпиморфизмом, ядром которого служит коммутант $[\pi_1(X), \pi_1(X)]$ группы $\pi_1(X)$. Таким образом,

$$H_1(X) \cong \pi_1(X)/[\pi_1(X), \pi_1(X)],$$

где коммутант $[G, G]$ группы G — ее подгруппа, порожденная всевозможными коммутаторами $[g_1, g_2] = g_1 g_2 g_1^{-1} g_2^{-1}$, $g_1, g_2 \in G$. Группа $G/[G, G]$ получается из G коммутированием, т.е. наложением дополнительных соотношений: все образующие коммутируют между собой.

Доказательство. Достаточно сопоставить процедуры вычисления фундаментальной группы и одномерной гомологической группы, как было сделано на заключительном этапе теоремы Гуревича. \square

Задача 165. Покажите, что петля $f : S^1 \rightarrow X$ тогда и только тогда определяет элемент ядра отображения $h : \pi_1(X) \rightarrow H_1(X)$ ("гомологична нулю"), когда она продолжается до непрерывного отображения диска с ручками в X , ограниченно-го окружностью S^1 ; более того, минимальное число этих ручек равно минимальному числу коммутаторов, произведение которых равно представляемому f элементу группы $\pi_1(X)$.

14.4. Относительный вариант теоремы Гуревича. Определим относительный гомоморфизм Гуревича $h : \pi_n(X, A) \rightarrow H_n(X, A)$ аналогично абсолютному: если $f : (D^n, S^{n-1})$ — относительный сфероид, представляющий класс $\varphi \in \pi_n(X, A)$, то $h(\varphi) \in H_n(X, A)$ определяется как образ канонической образующей группы $H_n(D^n, S^{n-1}) = \mathbb{Z}$ при гомоморфизме $f_* : H_n(D^n, S^{n-1}) \rightarrow H_n(X, A)$.

Теорема 14.8. Пусть (X, A) — топологическая пара, причем пространства X и A связны и односвязны и $\pi_2(X, A) = 0$.

(1) Предположим, что

$$\pi_3(X, A) = \cdots = \pi_{n-1}(X, A) = 0, \quad n \geq 3.$$

Тогда

$$H_1(X, A) = H_2(X, A) = \cdots = H_{n-1}(X, A) = 0$$

и $h : \pi_n(X, A) \rightarrow H_n(X, A)$ является изоморфизмом.

(2) Предположим, что

$$H_3(X, A) = \cdots = H_{n-1}(X, A) = 0.$$

Тогда

$$\pi_3(X, A) = \cdots = \pi_{n-1}(X, A) = 0$$

и $h : \pi_n(X, A) \rightarrow H_n(X, A)$ является изоморфизмом.

Доказательство. Модифицируем абсолютный случай. Во-первых, нужно построить клеточную аппроксимацию пары (X, A) . Для этого мы строим по отдельности клеточные аппроксимации пространств X и A : (Y, f) и (B, g) ; затем мы находим отображение $h : B \rightarrow Y$, делающее коммутативной диаграмму

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{h} & Y \\ g \downarrow & & \downarrow f \\ A & \xrightarrow{\text{включение}} & X \end{array}$$

(существование h очевидным образом выводится из свойств клеточной аппроксимации). После этого h превращается во вложение при помощи перехода к цилиндру отображения, и мы получаем клеточную пару (Y, B) , гомотопические и гомологические группы которой не отличаются от соответствующих групп пары (X, A) (это следует из слабой гомотопической инвариантности гомотопий и гомологий и леммы о пяти гомоморфизмах, примененной к гомотопическим и гомологическим последовательностям пар (X, A) и (Y, B)). Далее используется теорема о том, что m -связная клеточная пара гомотопически эквивалентна клеточной паре (Y', B') , у которой $B' \supset \text{sk}_m(Y')$ (упражнение 18 к § 5), и клеточное описание первой нетривиальной гомотопической группы клеточной пары (упражнение 2 к § 11). \square

Теорема 14.9 (Уайтхеда). Пусть $f : X \rightarrow Y$ — непрерывное отображение односвязных топологических пространств, индуцирующее эпиморфизм $\pi_2(X) \rightarrow \pi_2(Y)$.

(1) Если гомоморфизм

$$f_* : \pi_q(X) \rightarrow \pi_q(Y)$$

является изоморфизмом при $q < n$ и эпиморфизмом при $q = n$, то то же верно для

$$f_* : H_q(X) \rightarrow H_q(Y).$$

(2) Если гомоморфизм

$$f_* : H_q(X) \rightarrow H_q(Y)$$

является изоморфизмом при $q < n$ и эпиморфизмом при $q = n$, то то же верно для

$$f_* : \pi_q(X) \rightarrow \pi_q(Y).$$

Доказательство. Можно считать, что f — вложение, т.е. что (Y, X) — пара. Точность гомотопической последовательности этой пары показывает, что условие “ $f_* : \pi_q(X) \rightarrow \pi_q(Y)$ есть изоморфизм при $q < n$ и эпиморфизм при $q = n$ ” равносильно условию “ $\pi_q(Y, X) = 0$ при $q < n$ ”; аналогичное верно для гомологий. Таким образом, теорема Уайтхеда является прямым следствием относительной теоремы Гуревича. \square

Следствие 14.10. Если отображение f односвязного топологического пространства X в односвязное топологическое пространство Y индуцирует эпиморфизм $\pi_2(X) \rightarrow \pi_2(Y)$ и изоморфизм $H_q(X) \cong H_q(Y)$ при всех q , то f — слабая гомотопическая эквивалентность.

15. ТЕОРИЯ ПРЕПЯТСТВИЙ

Пусть X — клеточное пространство, а Y — гомотопически простое (например, односвязное) пространство. Напомним, что пространство называется n -простым, если изоморфизм, связывающий гомотопические группы, базированные в разных точках, не зависит от выбора пути. Пространство, n -простое для любого $n \geq 1$ называется *простым*.

Задача 166. 1-простота = коммутативность фундаментальной группы.

Рассмотрим задачу продолжения непрерывного отображения n -остова $f : X^n \rightarrow Y$ до непрерывного отображения остова $X^{n+1} \rightarrow Y$. Пусть $e \subset X$ — клетка размерности $n+1$, а $h : D^{n+1} \rightarrow X$ — соответствующее характеристическое отображение, так что $h(S^n) \subset X^n$. Возникает отображение

$$f_e = f \circ h : S^n \rightarrow Y.$$

Очевидным образом, f продолжается на $X^n \cup e$ тогда и только тогда, когда f_e продолжается до $D^{n+1} \rightarrow Y$, т.е. f_e гомотопно нулю, т.е. f_e представляет $\varphi_e = 0 \in \pi_n(Y)$ (Y гомотопически просто). Возможность продолжения на остов равносильно возможности продолжению на каждую клетку, т.е. равенству нулю всех φ_e .

Определение 15.1. Возникающая клеточная коцепь $e \mapsto \varphi_e$ пространства X с коэффициентами в $\pi_n(Y)$ обозначается через c_f и называется *препятствием к продолжению f на X^{n+1}* , $c_f \in C^{n+1}(X; \pi_n(Y))$.

Теорема 15.2. Эта коцепь является коциклом: $\delta c_f = 0$.

Доказательство. Напомним, что относительная теорема Гуревича 14.8 говорит, что при $q > 2$ и $\pi_1(X) = 0$ относительный гомоморфизм Гуревича

$$h : \pi_q(X^q, X^{q-1}) \rightarrow H_q(X^q, X^{q-1})$$

является изоморфизмом. Рассмотрим коммутативную диаграмму:

$$\begin{array}{ccc}
 C_{n+2}(X) \cong H_{n+2}(X^{n+2}, X^{n+1}) & \xrightarrow{h^{-1}} & \pi_{n+2}(X^{n+2}, X^{n+1}) \\
 \downarrow \partial & & \downarrow \partial \\
 C_{n+1}(X) \cong H_{n+1}(X^{n+1}, X^n) & \xrightarrow{h^{-1}} & \pi_{n+1}(X^{n+1}, X^n) \\
 & \searrow c_f & \downarrow \partial \\
 & & \pi_n(X^n) \\
 & & \downarrow f_* \\
 & & \pi_n(Y).
 \end{array}$$

Средняя часть правого столбца — кусок точной гомотопической последовательности пары (X^{n+1}, X^n) , так что композиция этих двух гомоморфизмов равна нулю, откуда $\delta c_f = c_f \circ \partial = 0$.

Случай $n = 1$ (т.е. $q = 2$) разбирается отдельно (=упражнение). Случай неодносвязного X (что равносильно неодносвязности любого старшего остова) сводится к разобранному случаю следующим образом. Рассмотрим универсальное накрытие $p : \tilde{X} \rightarrow X$. Объявим клетками в \tilde{X} прообразы клеток X при p . Поскольку p — локальный гомеоморфизм, то \tilde{X} становится клеточным пространством, а p — клеточным отображением. Индуцированное отображение $p^* : C^*(X, \pi_n(Y)) \rightarrow C^*(\tilde{X}, \pi_n(Y))$, очевидно, является мономорфизмом. С другой стороны, используя доказанный (односвязный) случай, имеем

$$p^* \delta c_f = \delta p^* c_f = \delta c_{f \circ p} = 0.$$

В силу мономорфности p^* получаем $\delta c_f = 0$. \square

Задача 167. Разобрать случай $n = 1$ в предыдущем доказательстве.

Определение 15.3. Обозначим $C_f := [c_f] \in H^{n+1}(X, \pi_n(Y))$ и также будем называть *препятствием*.

Определение 15.4. Пусть $f, g : X^n \rightarrow Y$ — два отображения, совпадающие на X^{n-1} . Пусть $e \subset X$ — произвольная n -мерная клетка, а $h : D^n \rightarrow X$ — ее характеристическое отображение, так что $h(S^{n-1}) \subset X^{n-1}$ и поэтому

$$(f \circ h)|_{S^{n-1}} = (g \circ h)|_{S^{n-1}}.$$

В силу этой согласованности можем определить $k_e : S^n \rightarrow Y$, равное $f \circ h$ на верхней полусфере и $g \circ h$ — на нижней. Определим *различающую коцепь* $d_{f,g} \in C^n(X; \pi_n(Y))$ значениями

$$d_{f,g}(e) := [k_e] \in \pi_n(Y).$$

Ясно, что $d_{f,g} = 0$ тогда и только тогда, когда f соединяется с g гомотопией, неподвижной на X^{n-1} .

Если f и g были заданы на всем X и совпадали на X^{n-1} , то $d_{f,g} = 0$ тогда и только тогда, когда существует гомотопия f , совмещающая f с g на X^n и неподвижная на X^{n-1} (по теореме Борсука о продолжении гомотопии).

Лемма 15.5. Для любого отображения $f : X^n \rightarrow Y$ и любой коцепи $d \in C^n(X; \pi_n(Y))$ существует такое отображение $g : X^n \rightarrow Y$, совпадающее с f на X^{n-1} , что $d_{f,g} = d$. \blacksquare

Доказательство. Рассмотрим произвольную n -мерную клетку e в X . Выделим около ее центра маленький шарик и заменим f на нем на такое отображение, чтобы два отображения шарика — старое и новое — составили класс сфероида $d(e)$ (как в определении $d_{f,g}$). Прделаем это для каждой n -клетки. \square

Лемма 15.6. $\delta d_{f,g} = c_g - c_f$.

Доказательство. Пусть f и g отличаются на одной n -мерной клетке e (общий случай является суммой таких). Мы должны для любой $n + 1$ -мерной клетки σ доказать, что

$$c_g(\sigma) - c_f(\sigma) = [\sigma : e] d_{f,g}(e).$$

Пусть $h : D^{n+1} \rightarrow X$ — характеристическое отображение σ . Прогомотопировав, если нужно, можем считать, что $h^{-1}(e)$ состоит из некоторого количества шаров, каждый из которых отображается гомеоморфно на e , причем сумма ориентаций равна $[\sigma :$

$e]$. Но сфероид, представляющий $c_g(\sigma)$, получается из сфероида, представляющего $c_f(\sigma)$, прибавлением сфероидов $\pm d_{f,g}(e)$, алгебраическое число которых равно $[\sigma : e]$. Это и есть требуемая формула. \square

Теорема 15.7. *Условие $C_f = 0$ равносильно тому, что отображение $f : X^n \rightarrow Y$ можно продолжить на X^{n+1} , предварительно изменив его на X^n , но не меняя на X^{n-1} .*

Доказательство. Если $C_f = 0$, то $c_f = \delta d$ для некоторого d и в силу леммы 15.5 существует отображение $g : X^n \rightarrow Y$, совпадающее с f на X^{n-1} , причем $d_{f,g} = -d$. Тогда $c_g = c_f + \delta d_{f,g} = 0$ и g продолжается на X^{n+1} . Обратно, если существует отображение $g : X^n \rightarrow Y$, продолжающееся на X^{n+1} и совпадающее с f на X^{n-1} , то $c_g = 0$, $c_f = c_f - c_g = -\delta d_{f,g}$ и $C_f = 0$. \square

Лемма 15.8. (1) $d_{f,g} + d_{g,h} = d_{f,h}$;
(2) $d_{g,f} = -d_{f,g}$.

Доказательство. Сразу следует из представления умножения в гомотопических группах на уровне сфероидов. \square

16. КОГОМОЛОГИИ КЛЕТОЧНЫХ ПРОСТРАНСТВ: СВЯЗЬ С $K(\pi, n)$

Пусть π — абелева группа. Пространство $K(\pi, n)$ строится следующим образом: берем букет n -мерных сфер, соответствующих некоторой системе образующих π , далее приклеиваем клетки по соотношениям, потом заклеиваем возникающие циклы и т.д. (на самом деле, это модель, но считаем, что именно оно и есть $K(\pi, n)$). Определим отображение в π , сопоставляя клетке из букета ту образующую (элемент π), по которой она определялась. Получим коцепь $c \in C^n(K(\pi, n); \pi)$.

Предложение 16.1. *Коцепь c является коциклом.*

Доказательство. Нам надо вычислить δc , т.е. значение $(\delta c)(\sigma)$ на каждой клетке σ размерности $n + 1$. Эти клетки по конструкции пространства отвечают соотношениям в группе π . Пусть g_i — выбранные образующие π , e_i — соответствующие n -мерные клетки, так что $c(e_i) = g_i$. Пусть $n + 1$ -мерная клетка σ отвечает соотношению $\sum k_i g_i = 0$. Тогда $[\sigma : e_i] = k_i$ и

$$(\delta c)(\sigma) = c(d\sigma) = \sum [\sigma : e_i] c(e_i) = \sum k_i g_i = 0.$$

\square

Определение 16.2. Когомологический класс $F_\pi = [c] \in H^n(K(\pi, n); \pi)$ этого коцикла называется *фундаментальным когомологическим классом $K(\pi, n)$* .

Пусть X — топологическое пространство а $f : X \rightarrow K(\pi, n)$ — некоторое непрерывное отображение. Рассмотрим $f^* F_\pi \in H^n(X; \pi)$, зависящий только от гомотопического класса отображения f , так что возникает отображение

$$(9) \quad \pi(X, K(\pi, n)) \rightarrow H^n(X; \pi), \quad [f] \mapsto f^* F_\pi.$$

Теорема 16.3. *Если X — клеточное пространство, то (9) — взаимно однозначное соответствие.*

Доказательство. Докажем эпиморфность. Пусть $\alpha \in H^n(X; \pi)$ — некоторый элемент, а $a \in C^n(X; \pi)$ — представляющий его коцикл. Определим отображение $f : X \rightarrow K(\pi, n)$ следующим образом. На остове X^{n-1} зададим f как отображение в точку. Тогда на любой ориентированной n -мерной клетке e отображение f должно быть некоторым сфероидом пространства $K(\pi, n)$. Мы потребуем, чтобы этот сфероид принадлежал классу $a(e) \in \pi = \pi_n(K(\pi, n))$. Это корректное определение f на X^n . Покажем, что f можно продолжить на X^{n+1} . Очевидно, что по определению, коцепь a будет различающей между f и постоянным отображением $const$, переводящим пространство в точку. Поэтому в силу леммы 15.6

$$0 = \delta a = \delta d_{const, f} = c_f - c_{const} = c_f,$$

так как $c_{const} = 0$, поскольку $const$ продолжаемо. Значит, f продолжается на X^{n+1} . Продолжение на дальнейшие остовы возможно, поскольку препятствия тривиальны, так как $C^{n+1+k}(X; \pi_{n+k}(K(\pi, n))) = 0$, поскольку $\pi_{n+k}(K(\pi, n)) = 0$ ($k = 1, 2, \dots$). Получаем $f : X \rightarrow K(\pi, n)$. Поскольку условие $f^*F_\pi = \alpha$ зависит только от n -остова, (а там оно выполнено по построению), то оно верно и для продолженного отображения.

Покажем мономорфность, т.е. что если $f^*F_\pi = g^*F_\pi$, то $f \sim g$. Будем по индукции совмещать f и g по остовам. Различающие коцепи лежат в нулевых группах вплоть до $C^n(X; \pi_n(K(\pi, n))) = C^n(X; \pi)$, т.е. тогда, когда f и g уже совмещены на X^{n-1} . Как показано в первой части доказательства,

$$f^*F_\pi = D_{const, f} := [d_{const, f}], \quad g^*F_\pi = D_{const, g} := [d_{const, g}].$$

По лемме 15.8

$$D_{f, g} = D_{f, const} + D_{const, g} = D_{const, g} - D_{const, f} = g^*F_\pi - f^*F_\pi = 0.$$

Поэтому f совмещается с g на X^n гомотопией, неподвижной на X^{n-2} (см. замечание перед леммой 15.5). Для старших остовов препятствия снова тривиальны. Для бесконечномерного (локально конечного) комплекса рассматриваем гомотопии на разбиении отрезка на интервалы, неподвижные в окрестности концов интервалов. \square

17. ДВЕ ТЕОРЕМЫ ХОПФА

Мы сейчас опишем другое применение теории препятствий (и результатов предыдущего параграфа).

Теорема 17.1. *Для любого n -мерного клеточного пространства X имеет место взаимно однозначное соответствие*

$$H^n(X; \mathbb{Z}) \cong \pi(X, S^n), \quad [f] \leftrightarrow f^*(s),$$

где s — каноническая образующая группы $H^n(S^n; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$.

Доказательство. Заметим, что $K(\mathbb{Z}, n)$ получается из S^n приклеиванием клеток размерности $\geq n + 2$, поскольку \mathbb{Z} имеет одну образующую и не имеет соотношений. Поэтому $\pi(X, K(\mathbb{Z}, n)) = \pi(X, S^n)$ по теореме о клеточной аппроксимации (любое отображение $X \rightarrow K(\mathbb{Z}, n)$ гомотопно отображению, образ которого лежит в n -ом остове, а гомотопия между двумя такими отображениями может быть сдвинута на $(n + 1)$ -остов, который совпадает с n -остовом). \square

Теорема 17.2. Пусть n -мерное клеточное пространство X содержит сферу S^{n-1} . Для того, чтобы эта сфера была ретрактом пространства X , необходимо и достаточно, чтобы гомоморфизм $H^{n-1}(X; \mathbb{Z}) \rightarrow H^{n-1}(S^{n-1}; \mathbb{Z})$, индуцированный включением, был эпиморфизмом.

Доказательство. Необходимость очевидна: если $r : X \rightarrow S^{n-1}$ — ретракция, то композиция

$$H^{n-1}(S^{n-1}; \mathbb{Z}) \xrightarrow{r^*} H^{n-1}(X; \mathbb{Z}) \xrightarrow{j^*} H^{n-1}(S^{n-1}; \mathbb{Z})$$

(где $j : S^{n-1} \hookrightarrow X$ — включение) тождественна. Поэтому j^* — эпиморфизм.

Обратно, пусть j^* — эпиморфизм. Выберем такой $\alpha \in H^{n-1}(X; \mathbb{Z})$, что $j^*(\alpha) = 1 \in H^{n-1}(S^{n-1}; \mathbb{Z})$ (точнее, одной из двух образующих). Пусть $a \in C^{n-1}(X, \mathbb{Z})$ — представляющий α коцикл. Построим отображение $q : X \rightarrow S^{n-1}$ следующим образом. Клетки размерности $\leq n-2$ отображим в точку. Тогда на $(n-1)$ -мерной клетке e отображение q должно быть сфероидом. Потребуем, чтобы этот сфероид принадлежал классу $a(e) \in \mathbb{Z} = \pi_{n-1}(S^{n-1})$, что равносильно тому, что q^* переводит $1 \in \mathbb{Z} = C^{n-1}(S^{n-1}; \mathbb{Z})$ в a . При этом коцепь a является различающей между уже построенной частью отображения q и отображением в точку (поскольку предыдущий остов q отображал в точку). Имеем

$$0 = \delta a = \delta d_{q, const} = c_q - c_{const} = c_q.$$

Поэтому q может быть продолжено на $X = X^n$. Композиция

$$S^{n-1} \xrightarrow{j} X \xrightarrow{q} S^{n-1}$$

индуцирует тождественное отображение в когомологиях:

$$(q \circ j)^*(1) = j^*(q^*(1)) = j^*(\alpha) = 1,$$

и поэтому гомотопна тождественному (степень отображения). Эту гомотопию можно продолжить до гомотопии q и в результате получится отображение $r : X \rightarrow S^{n-1}$, тождественное на S^{n-1} , т.е. ретракция. \square

18. КОГОМОЛОГИЧЕСКИЕ ОПЕРАЦИИ

Определение 18.1. Пусть заданы два натуральных числа n и q и две абелевы группы Π и G . Говорят, что задана *когомологическая операция φ типа (n, q, Π, G)* , если для любого клеточного пространства X определено отображение когомологий $\varphi_x : H^n(X; \Pi) \rightarrow H^q(X; G)$, причем для любого непрерывного отображения $f : X \rightarrow Y$ коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} H^n(X; \Pi) & \xrightarrow{\varphi_x} & H^q(X; G) \\ f^* \uparrow & & \uparrow f^* \\ H^n(Y; \Pi) & \xrightarrow{\varphi_y} & H^q(Y; G) \end{array}$$

(естественность). Так как $H^q(X; G)$ — абелева группа, то множество всех операций типа (n, q, Π, G) образует абелеву группу (относительно “поточечного” сложения), обозначаемую $O(n, q, \Pi, G)$.

Теорема 18.2. Имеет место изоморфизм $O(n, q, \Pi, G) \cong H^q(K(\Pi, n); G)$.

Доказательство. Как мы показали, элемент $e := F_{\Pi} \in H^n(K(\Pi, n), \Pi)$ задает изоморфизм $\pi(X, K(\Pi, n)) \cong H^n(X; \Pi)$ по формуле $[f : X \rightarrow K(\Pi, n)] \mapsto f^*(e)$.

Когомологическая операция $\varphi \in O(n, q, \Pi, G)$ определяет

$$\varphi_{K(\Pi, n)} : H^n(K(\Pi, n), \Pi) \rightarrow H^q(K(\Pi, n), G),$$

и тем самым, элемент $\varphi_{K(\Pi, n)}(e) = \varphi(e) \in H^q(K(\Pi, n), G)$. Поскольку сложение операций определено “поточечно”, то $\varphi \mapsto \varphi(e)$ — гомоморфизм. Докажем, что это — изоморфизм.

Проверим мономорфность. Пусть φ — любая операция с $\varphi(e) = 0$, X — произвольное клеточное пространство и $\alpha \in H^n(X, \Pi)$. Надо показать, что $\varphi(\alpha) = 0$. По упомянутому в начале доказательства утверждению, имеется такое отображение $f : X \rightarrow K(\Pi, n)$, что $f^*(e) = \alpha$. Откуда, в силу естественности φ получаем

$$\varphi(\alpha) = \varphi f^*(e) = f^* \varphi(e) = f^*(0) = 0.$$

Проверим эпиморфность. Пусть x — любой элемент из $H^q(K(\Pi, n); G)$. Положим $\varphi(e) = x$ и попытаемся продолжить до когомологической операции. Пусть X — произвольное клеточное пространство. Хотим определить $\varphi(\gamma)$ для любого $\gamma \in H^n(X; \Pi)$. По упомянутому в начале доказательства утверждению, имеется такое отображение $f_{\gamma} : X \rightarrow K(\Pi, n)$, что $f_{\gamma}^*(e) = \gamma$. Положим $\varphi(\gamma) := f_{\gamma}^*(x) \in H^q(X; G)$. Поскольку значение не меняется при гомотопии, то φ корректно определено. Осталось проверить естественность. Пусть $g : X \rightarrow Y$ — непрерывное отображение и $\gamma = g^* \gamma'$, $\gamma' \in H^n(Y; \Pi)$. Надо показать, что $\varphi(\gamma) = g^* \varphi(\gamma')$. В силу естественности изоморфизма $\pi(X, K(\Pi, n)) \cong H^n(X; \Pi)$ имеем $f_{\gamma} = f_{\gamma'} \circ g$, поскольку $f_{\gamma}^*(e) = \gamma = g^* \gamma' = (f_{\gamma'} \circ g)^*(e)$. Значит,

$$\varphi(\gamma) = f_{\gamma}^*(x) = (f_{\gamma'} \circ g)^*(x) = g^* f_{\gamma'}^*(x) = g^* \varphi(\gamma').$$

□

Следствие 18.3. *Нетривиальная когомологическая операция не понижает размерность, т.е. если $0 \neq \varphi \in O(n, q, \Pi, G)$, то $q \geq n$.*

Доказательство. Это сразу следует из предыдущей теоремы и того, что когомологии $H^q(K(\Pi, n); G) = 0$ при $q < n$ (просто нет клеток таких размерностей). □

Задача 168. Пусть $\Pi = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} =: \mathbb{Z}_3$ — кольцо из 3 элементов. Проверить, что возведение в квадрат есть отображение $\varphi : H^n(X; \Pi) \rightarrow H^{2n}(X; \Pi)$, задающее элемент $O(n, 2n, \Pi, \Pi)$, не являющийся гомоморфизмом.

Задача 169. Пусть Π — конечная группа. Используя тот факт, что в этом случае $H^q(K(\Pi, n); \mathbb{Q}) = 0$ для $q > 0$, доказать, что не существует нетривиальных когомологических операций из когомологий с конечными коэффициентами в когомологии с рациональными коэффициентами.

Напомним, что из спектральной последовательности расслоения был выведен следующий факт:

$$H^*(K(\mathbb{Z}, n), \mathbb{Q}) = \begin{cases} \Lambda_{\mathbb{Q}}(x), & \dim x = n, \quad \text{при нечетном } n; \\ \mathbb{Q}[x], & \dim x = n, \quad \text{при четном } n. \end{cases}$$

Т.о. при нечетном n рациональные когомологии у $K(\mathbb{Z}, n)$ такие же, как у S^n , т.е. при $q > 0$ нетривиальная группа — $H^n(K(\mathbb{Z}, n), \mathbb{Q}) \cong \mathbb{Q}$ с образующей, являющейся образом e при отображении $H^n(K(\mathbb{Z}, n), \mathbb{Z}) \rightarrow H^n(K(\mathbb{Z}, n), \mathbb{Q})$, индуцированным

вложением коэффициентов. Поэтому всякая операция из нечетномерных целочисленных когомологий в рациональные когомологии сохраняет размерность и относит каждому элементу $\alpha \in H^n(X; \mathbb{Z})$ элемент $\lambda\alpha_{\mathbb{Q}} \in H^n(X; \mathbb{Q})$, где λ — фиксированное для данной операции рациональное число.

Если n четно, то $H^*(K(\mathbb{Z}, n), \mathbb{Q}) = \mathbb{Q}[e_{\mathbb{Q}}]$. Поэтому всякая операция из четномерных целочисленных когомологий в рациональные когомологии относит каждому элементу $\alpha \in H^n(X; \mathbb{Z})$ элемент $\lambda\alpha_{\mathbb{Q}}^k \in H^{kn}(X; \mathbb{Q})$, где λ и k — фиксированные для данной операции рациональное и целое числа.

Задача 170. Доделать детали в этих вычислениях.

Пространство $K(\mathbb{Z}, n)$ не имеет $(n+1)$ -мерных клеток, и потому $H^{n+1}(K(\mathbb{Z}, n); G) = 0$ при любой группе G . Следовательно, не существует когомологических операций, действующих из целочисленных когомологий, и повышающих размерность на 1.

Пространство $K(\mathbb{Z}_p, n)$, где p — простое, имеет при любых p и n ровно одну $(n+1)$ -мерную клетку. Поэтому $H^{n+1}(K(\mathbb{Z}_p, n); \mathbb{Z}_p) = 0$ или $= \mathbb{Z}_p$. Т.о. с точностью до множителя имеется не более одной когомологической операции типа $(n, n+1, \mathbb{Z}_p, \mathbb{Z}_p)$. Но мы можем предъявить нетривиальную операцию: гомоморфизм Бокштейна $\beta = \frac{1}{p}\delta$. Нетривиальность проверяется на $S^n \cup_{\varphi} D^{n+1}$, где $\varphi : S^n \rightarrow S^n$ — отображение степени p , т.е. на $(n+1)$ -остове $K(\mathbb{Z}_p, n)$. Таким образом, $O(n, n+1, \mathbb{Z}_p, \mathbb{Z}_p) = \mathbb{Z}_p$, всякая операция указанного типа пропорциональна гомоморфизму Бокштейна.

Определение 18.4. *Стабильной когомологической операцией* из когомологий с коэффициентами в Π в когомологии с коэффициентами в G , повышающей размерность на q , называется система когомологических операций $\varphi_n \in O(n, n+q, \Pi, G)$, определенных для каждого $n = 1, 2, \dots$, причем для всех X и n диаграмма

$$\begin{array}{ccc} H^n(X; \Pi) & \xrightarrow{\Sigma} & H^{n+1}(\Sigma X; \Pi) \\ \downarrow \varphi_n & & \downarrow \varphi_{n+1} \\ H^{n+q}(X; G) & \xrightarrow{\Sigma} & H^{n+q+1}(\Sigma X; G) \end{array}$$

коммутативна, где Σ — изоморфизм надстройки.

Пример 18.5. Гомоморфизм Бокштейна — стабильная операция (проверить!).

Теорема 18.6. *Любая стабильная когомологическая операция φ согласована с когомологической последовательностью любой клеточной пары (X, Y) , т.е. коммутативна диаграмма:*

$$\begin{array}{ccccccc} \dots \rightarrow H^n(X; \Pi) & \xrightarrow{i^*} & H^n(Y; \Pi) & \xrightarrow{\delta^*} & H^{n+1}(X/Y; \Pi) & \xrightarrow{j^*} & H^{n+1}(X; \Pi) \rightarrow \dots \\ \downarrow \varphi_n & & \downarrow \varphi_n & & \downarrow \varphi_{n+1} & & \downarrow \varphi_{n+1} \\ \dots \rightarrow H^{n+q}(X; G) & \xrightarrow{i^*} & H^{n+q}(Y; G) & \xrightarrow{\delta^*} & H^{n+q+1}(X/Y; G) & \xrightarrow{j^*} & H^{n+q+1}(X; G) \rightarrow \dots \end{array}$$

Доказательство. Поскольку i^* и j^* индуцированы отображениями пространств $i : Y \hookrightarrow X$ и $j : X \rightarrow X/Y$, соответственно, то в силу свойства естественности операций соответствующие квадраты коммутативны. Таким образом, остается проверить коммутативность среднего квадрата (содержащего δ). Так как (X, Y) — пара Борсука, то $X/Y \sim (X \cup CY)/CY \sim X \cup CY$. Рассмотрим отображение $f : X \cup CY \rightarrow \Sigma Y$,

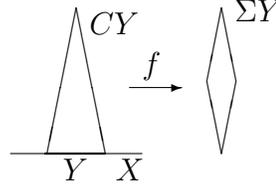


Рис. 1

точнее, $X \cup CY \rightarrow (X \cup CY)/X = \Sigma Y$ (см. рис. 1). Включим индуцированный им гомоморфизм в диаграмму

$$\begin{array}{ccc} H^n(Y; \Pi) & \xrightarrow{\delta^*} & H^{n+1}(X, Y; \Pi) \\ \downarrow \Sigma & & \downarrow \cong \\ H^{n+1}(\Sigma Y; \Pi) & \xrightarrow{f^*} & H^{n+1}(X \cup CY; \Pi). \end{array}$$

Покажем, что диаграмма антикоммутативна, т.е. $f^*\Sigma = -\delta$. Возьмем $\zeta \in H^n(Y; \Pi)$ и выберем представляющий его клеточный коцикл z . Рассмотрим коцепь $\bar{z} \in C^n(X; \Pi)$, принимающую на клетках Y те же значения, что и z , а на клетках $X - Y$ — нулевые значения (“продолжим нулем”). Коцепь $\delta\bar{z}$ является относительным коциклом пары (X, Y) и представляет в $H^{n+1}(X, Y; \Pi)$ элемент $\delta^*\zeta$. Продолжим коцепь $\delta\bar{z}$ нулем на клетки CY и получим коцепь $w \in C^{n+1}(X \cup CY; \Pi)$. Она является коциклом, представляющим образ ζ при композиции верхней и правой стрелок нашей диаграммы. Для описания композиции двух других стрелок вспомним, что клетки ΣY — надстройки над клетками Y , а коцепь Σz определяется как $\Sigma z(\Sigma\sigma) = z(\sigma)$. Наконец, коцепь $f^*\Sigma z \in C^{n+1}(X \cup CY; \Pi)$, представляющая класс $f^*\Sigma z$, принимает нулевые значения на всех клетках из $X \subset X \cup CY$, а на клетке из CY , лежащей над некоторой $\sigma \subset Y$, принимает значение, равное $z(\sigma)$. Рассмотрим теперь коцепь $u \in C^n(X \cup CY; \Pi)$, совпадающую на клетках $Y \subset X \cup CY$ с z и принимающую на клетках из дополнения $(X \cup CY) - Y$ нулевые значения. Тогда $\delta u = w + f^*\Sigma z$. Действительно, на клетках из Y левая часть принимает то же значение, что и δz , w — тоже, а $f^*\Sigma z$ — нулевое. На остальных клетках из X левая часть принимает нулевое значение, равно как и оба слагаемых в правой части. На клетке τ из CY , лежащей над клеткой σ из Y , левая часть принимает значение $\delta u(\tau) = u(\sigma) = z(\sigma)$, w принимает нулевое значение, а $f^*\Sigma z$ — значение $z(\sigma)$. Переходя к когомологиям, получаем $0 = \delta^*\zeta + f^*\Sigma\zeta$ и антикоммутативность диаграммы доказана.

Учитывая естественность и стабильность φ , отсюда получаем

$$\varphi_{n+1}\delta^* = -\varphi_{n+1}f^*\Sigma = -f^*\varphi_{n+1}\Sigma = -f^*\Sigma\varphi_n = \delta^*\varphi_n.$$

□

Перейдем к аналогу теоремы 18.2 для стабильных операций. Пусть $e \in H^n(K(\Pi, n); \Pi)$ — фундаментальный класс. Тогда $\Sigma e \in H^{n+1}(\Sigma K(\Pi, n); \Pi) \cong \pi(\Sigma K(\Pi, n), K(\Pi, n+1))$ и, таким образом, задает $f_n : \Sigma K(\Pi, n) \rightarrow K(\Pi, n+1)$. Вспоминая, как устроен изоморфизм, получаем, что $f_n^*(e') = \Sigma(e)$, где $e' \in H^{n+1}(K(\Pi, n+1); \Pi)$ — фундаментальный класс.

Задача 171. Проверить, что указанное f_n можно определить следующим образом: отождествив $K(\Pi, n) = \Omega K(\Pi, n+1)$, определим $f_n : \Sigma K(\Pi, n) = \Sigma \Omega K(\Pi, n+1) \rightarrow K(\Pi, n+1)$ формулой $f_n(\gamma, t) = \gamma(t)$, где γ — петля $[0, 1] \rightarrow K(\Pi, n+1)$.

Пусть φ — стабильная операция. Применим ее к фундаментальному классу: $\varphi(e) \in H^{n+q}(K(\Pi, n); G)$. В силу стабильности $\varphi(\Sigma e) = \Sigma\varphi(e) \in H^{n+q+1}(\Sigma K(\Pi, n); G)$. Так как $f_n^*(e') = \Sigma(e)$, то элемент $\varphi(e') \in H^{n+q+1}(K(\Pi, n+1); G)$ при отображении f_n^* перейдет в $\varphi(\Sigma e)$:

$$f_n^*\varphi(e') = \varphi f_n^*(e') = \varphi(\Sigma e).$$

Рассмотрим

$$\Sigma^{-1} \circ f_n^* : H^{n+q+1}(K(\Pi, n+1); G) \rightarrow H^{n+q+1}(\Sigma K(\Pi, n); G) \cong H^{n+q}(K(\Pi, n); G).$$

Объединим эти отображения в последовательность

$$\begin{aligned} \dots \rightarrow H^{n+q}(K(\Pi, n); G) \rightarrow H^{n+q-1}(K(\Pi, n-1); G) \rightarrow \dots \\ \dots \rightarrow H^{q+2}(K(\Pi, 2); G) \rightarrow H^{q+1}(K(\Pi, 1); G). \end{aligned}$$

Как мы знаем из теоремы 18.2 (точнее, ее доказательства) каждая когомологическая операция $\varphi_n \in O(n, n+q, \Pi, G)$ однозначно задается выбором произвольного элемента $z_n = \varphi_n(e_n) \in H^{q+n}(K(\Pi, n); G)$ (используем индексы как в стабильной операции), где $e_n \in H^n(K(\Pi, n); \Pi)$. Если же $\{\varphi_n\}$ не просто последовательность операций, а стабильная операция, то элементы z_n не произвольны, а связаны соотношениями

$$(10) \quad z_n = \Sigma^{-1} \circ f_n^*(z_{n+1}).$$

Действительно, используя и новые обозначения, и старые ($e = e_n$, $e' = e_{n+1}$, $\varphi = \varphi_n$ или φ_{n+1} в зависимости от ситуации), имеем

$$(11) \quad \Sigma^{-1} f_n^*(z_{n+1}) = \Sigma^{-1} f_n^*(\varphi_{n+1} e_{n+1}) = \Sigma^{-1} f_n^* \varphi(e') = \Sigma^{-1} \varphi(\Sigma(e)) = \varphi(e) = \varphi_n(e_n) = z_n.$$

Соотношения (10) показывают, что стабильной операции соответствует элемент обратного предела групп $H^{q+n}(K(\Pi, n); G)$ и гомоморфизмов $\Sigma^{-1} \circ f_n^*$. Докажем обратное, т.е. что любой элемент указанного обратного предела задает стабильную операцию. Для этого надо доказать, что условия (10) влекут условие стабильности, т.е. коммутирования с Σ :

$$\begin{array}{ccc} H^n(X; \Pi) & \xrightarrow{\Sigma} & H^{n+1}(\Sigma X; \Pi) \\ \downarrow \varphi_n & & \downarrow \varphi_{n+1} \\ H^{n+q}(X; G) & \xrightarrow{\Sigma} & H^{n+q+1}(\Sigma X; G) \end{array}$$

В силу (10) (переписав (11) в другом порядке) получаем $\Sigma^{-1} \varphi_{n+1}(\Sigma(e_n)) = \varphi_n(e_n)$, т.е. условие коммутирования выполнено на элементе, определяющем φ_n . Заметим, что $\Sigma^{-1} \varphi_{n+1} \Sigma$ является когомологической операцией, т.е. ведет себя естественно по отношению к отображениям пространств. Действительно, в силу естественности Σ

$$\Sigma^{-1} \varphi_{n+1} \Sigma g^* = \Sigma^{-1} (\varphi_{n+1} \Sigma g^* \Sigma^{-1}) \Sigma = \Sigma^{-1} (\varphi_{n+1} g^*) \Sigma = \Sigma^{-1} (g^* \varphi_{n+1}) \Sigma = g^* \Sigma^{-1} \varphi_{n+1} \Sigma.$$

Поскольку значения двух когомологических операций φ_n и $\Sigma^{-1} \varphi_{n+1} \Sigma$ совпадают на e_n , то операции равны. Мы доказали следующую теорему.

Теорема 18.7. *Группа $O^s(q, \Pi, n)$ стабильных когомологических операций, повышающих размерность на q , изоморфна обратному пределу групп $H^{q+n}(K(\Pi, n); G)$ и гомоморфизмов $\Sigma^{-1} \circ f_n^*$.*

Ясно, что если известен элемент $z_s \in H^{q+s}(K(\Pi, s); G)$, то определены и все z_k для $k < s$:

$$z_k = (\Sigma^{-1} f_k^*)(\Sigma^{-1} f_{k+1}^*) \cdots (\Sigma^{-1} f_{s-2}^*)(\Sigma^{-1} f_{s-1}^*) z_s.$$

Поэтому действие стабильной операции на младших когомологиях определяется одним элементом $z_N \in H^{N+q}(K(\Pi, N); G)$ для достаточно большого N .

С другой стороны, пространство $K(\Pi, n)$ является $(n-1)$ -связным. Поэтому гомоморфизм $f_{n+1}^* : H^{n+q+1}(K(\Pi, N+1); G) \rightarrow H^{n+q}(\Sigma K(\Pi, N); G)$ является изоморфизмом при $n > q$. Действительно, согласно задаче 171, отображение f_{n+1} фактически совпадает с $\Sigma \Omega K(\Pi, n+2) \rightarrow K(\Pi, n+2)$, которое дает изоморфизм когомологий в указанных размерностях.

Задача 172. Вспомнить, почему это так. Для $(n-1)$ -связного пространства X пространство ΣX — n -связно, а $\Sigma \Omega X$ — $(n-1)$ -связно. Рассмотрим точную когомологическую последовательность расслоения пространства путей LX над пространством

19. СПЕКТРАЛЬНАЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ, СВЯЗАННАЯ С ФИЛЬТРАЦИЕЙ

Определение 19.1. Пусть в топологическом пространстве X задана *фильтрация*, т.е. последовательность вложенных друг в друга подпространств

$$\emptyset = X_{-1} \subset X_0 \subset X_1 \subset \dots \subset X_{k-1} \subset X_k = X,$$

индуцирующая вложения групп сингулярных цепей:

$$0 = C_q(X_{-1}) \subset C_q(X_0) \subset \dots \subset C_q(X_k) = C_q(X).$$

Говорим, что цепь $\alpha \in C_q(X)$ имеет *фильтрацию* i , если $\alpha \in C_q(X_i)$, но $\alpha \notin C_q(X_{i-1})$. Таким образом, $C_q(X_i)$ содержит все элементы фильтрации $\leq i$.

Можно рассматривать и бесконечные фильтрации, требуя, что пересечение пусто, а объединение — все пространство, и, аналогично, для групп.

Переобозначим

$$E_{i,q-i}^0 = C_q(X_i, X_{i-1}) = C_q(X_i)/C_q(X_{i-1}),$$

а граничный оператор $\partial_q : C_q(X_i, X_{i-1}) \rightarrow C_{q-1}(X_i, X_{i-1})$ через

$$d_{i,q-i}^0 : E_{i,q-i}^0 \rightarrow E_{i,q-1-i}^0$$

так что $d_{i,q-1-i}^0 \circ d_{i,q-i}^0 = 0$.

Гомологии полученного комплекса — $H_q(X_i, X_{i-1})$. Обозначим эти группы через $E_{i,q-i}^1$. Мы сейчас определим $E_{*,*}^r$, $r = 0, 1, 2, \dots$ и некоторые дифференциалы так, чтобы для следующего r группы получались как гомологии относительно этого дифференциала.

Определение 19.2. Определим $Z_{i,q-i}^r \subset E_{i,q-i}^0 = C_q(X_i)/C_q(X_{i-1})$ как подгруппу, состоящую ровно из тех α , у которых имеется представитель $a \in C_q(X_i)$ (прообраз при факторизации), граница которого имеет фильтрацию по крайней мере на r единиц меньше: $\partial a \in C_{q-1}(X_{i-r})$. Иными словами,

$$Z_{i,q-i}^r = [C_q(X_i) \cap \partial^{-1} C_{q-1}(X_{i-r})] / [C_q(X_{i-1}) \cap \partial^{-1} C_{q-1}(X_{i-r})].$$

В частности, $Z_{i,q-i}^0 = E_{i,q-i}^0$, поскольку всегда $\partial(C_q(X_i)) \subset C_{q-1}(X_i)$.

При $r = 1$ цепь $\alpha \in Z_{i,q-i}^1$, если существует такое $a \in \alpha$, что $\partial a \in C_{q-1}(X_{i-1})$, т.е. α — относительный цикл из $C_q(X_i, X_{i-1})$. Значит, $Z_{i,q-i}^1 = Z_q(X_i, X_{i-1})$. Заметим, что в этом случае в качестве a можно выбрать любого представителя.

Очевидно, что с ростом r группа $Z_{i,q-i}^r$ уменьшается и при достаточно большом r превращается в $Z_q(X_i)/Z_q(X_{i-1})$ (поскольку для достаточно больших r : $C_{q-1}(X_{i-r}) = 0$). Так что

$$E_{i,q-i}^0 = Z_{i,q-i}^0 \supset Z_{i,q-i}^1 \supset \dots \supset Z_{i,q-i}^N = Z_q(X_i)/Z_q(X_{i-1}) = Z_{i,q-i}^{N+1} = \dots = Z_{i,q-i}^\infty.$$

Определение 19.3. Определим $B_{i,q-i}^r \subset E_{i,q-i}^0 = C_q(X_i)/C_q(X_{i-1})$ как подгруппу, состоящую ровно из тех α , у которых имеется такой представитель $a \in C_q(X_i)$ (образ при факторизации), что $a = \partial b$, для некоторого $b \in C_{q+1}(X_{i+r-1})$. Иными словами,

$$B_{i,q-i}^r = [C_q(X_i) \cap \partial C_{q+1}(X_{i+r-1})] / [C_q(X_{i-1}) \cap \partial C_{q+1}(X_{i+r-1})].$$

В частности, $\alpha \in E_{i,q-i}^0 = C_q(X_i)/C_q(X_{i-1})$ принадлежит $B_{i,q-i}^0$, если существует такой представитель $a \in C_q(X_i)$, что $a = \partial b$, $b \in C_{q+1}(X_{i-1})$. Тогда $a \in C_q(X_{i-1})$ и $\alpha = 0$. Значит, $B_{i,q-i}^0 = 0$.

При $r = 1$ цепь $\alpha \in B_{i,q-i}^1$, если существует такое $a \in \alpha$, что $a = \partial b$, $b \in C_{q+1}(X_i)$. Значит, группа $B_{i,q-i}^1$ — это подгруппа относительных границ в $C_q(X_i, X_{i-1})$, т.е. $B_{i,q-i}^1 = B_q(X_i, X_{i-1})$.

С ростом r группа $B_{i,q-i}^r$ увеличивается и при достаточно большом r превращается в $[B_q(X) \cap C_q(X_i)] / [B_q(X) \cap C_q(X_{i-1})]$ (поскольку для достаточно больших r : $C_{q-1}(X_{i+r-1}) = C_{q-1}(X)$). Так что, замечая, что для любых r и s имеем $B_{i,q-i}^r \subset Z_{i,q-i}^s$ (поскольку $\partial^2 = 0$), можем записать:

$$\begin{aligned} 0 &= B_{i,q-i}^0 \subset B_{i,q-i}^1 = B_q(X_i, X_{i-1}) \subset \dots \subset B_{i,q-i}^M = [B_q(X) \cap C_q(X_i)] / [B_q(X) \cap C_q(X_{i-1})] = \\ &= B_{i,q-i}^{M+1} = \dots = B_{i,q-i}^\infty \subset Z_{i,q-i}^\infty = \dots = Z_{i,q-i}^{N+1} = Z_{i,q-i}^N = Z_q(X_i)/Z_q(X_{i-1}) \subset \\ &\subset \dots \subset Z_{i,q-i}^1 = Z_q(X_i, X_{i-1}) \subset Z_{i,q-i}^0 = E_{i,q-i}^0 = C_q(X_i, X_{i-1}) \end{aligned}$$

Определение 19.4. Определим

$$\begin{aligned} E_{i,q-i}^r &= Z_{i,q-i}^r / B_{i,q-i}^r = [C_q(X_i) \cap \partial^{-1} C_{q-1}(X_{i-r})] / \\ &/ \left[[C_q(X_i) \cap \partial C_{q+1}(X_{i+r-1})] + [C_q(X_{i-1}) \cap \partial^{-1} C_{q-1}(X_{i-r})] \right]. \end{aligned}$$

Из наших вычислений первых и нулевых членов получаем:

$$\begin{aligned} E_{i,q-i}^0 &= Z_{i,q-i}^0 / B_{i,q-i}^0 = C_q(X_i, X_{i-1}), \\ E_{i,q-i}^1 &= Z_{i,q-i}^1 / B_{i,q-i}^1 = Z_q(X_i, X_{i-1}) / B_q(X_i, X_{i-1}) = H_q(X_i, X_{i-1}). \end{aligned}$$

Так что все согласовано с начальными определениями E^0 и E^1 .

Очевидно, что с ростом r группа $E_{i,q-i}^r$ уменьшается и на некотором шаге наступает стабилизация:

$$E_{i,q-i}^\infty = Z_q(X_i) / \left[[B_q(X) \cap C_q(X_i)] + Z_q(X_{i-1}) \right].$$

В случае конечной фильтрации (который мы рассматриваем), беря максимум, можно считать, что стабилизация наступает сразу для всех i, q .

Определение 19.5. Определим дифференциал $d_{i,q-i}^r : E_{i,q-i}^r \rightarrow E_{i-r,q+r-i-1}^r$ следующим образом. Пусть $\alpha \in E_{i,q-i}^r = Z_{i,q-i}^r/B_{i,q-i}^r$, а $\alpha' \in Z_{i,q-i}^r \subset C_q(X_i)/C_q(X_{i-1})$ — его представитель, являющийся классом такого элемента $a \in C_q(X_i)$, что $b = \partial a$ имеет фильтрацию $\leq i-r$. Тогда смежный класс β' цепи b в группе $C_{q-1}(X_{i-r})/C_{q-1}(X_{i-r-1})$ и определяет в группе $E_{i-r,q+r-i-1}^r$ некоторый элемент β , который мы и примем за $d_{i,q-i}^r(\alpha)$.

Это определение корректно (проверьте!) и, поскольку фактически $d_{i,q-i}^r$ задается ∂ , то он является гомоморфизмом и $d_{i-r,q+r-i-1}^r \circ d_{i,q-i}^r = 0$.

Прямо из определений следует, что $d_{i,q-i}^0 : E_{i,q-i}^0 \rightarrow E_{i-r,q+r-i-1}^0$ совпадает с $\partial : C_q(X_i, X_{i-1}) \rightarrow C_{q-1}(X_i, X_{i-1})$, а $d_{i,q-i}^1 : E_{i,q-i}^1 \rightarrow E_{i-r,q+r-i-1}^1$ — с $\partial_* : H_q(X_i, X_{i-1}) \rightarrow H_{q-1}(X_{i-1}, X_{i-2})$.

Определение 19.6. Система групп $E^r = \bigoplus_{i,q} E_{i,q-i}^r$ и гомоморфизмов $d^r = \bigoplus_{i,q} d_{i,q-i}^r$ называется *спектральной последовательностью, связанной с фильтрацией X_i* .

Замечание 19.7. На самом деле, рассмотренная ситуация является более общей: для построения спектральной последовательности достаточно иметь цепной комплекс

$$\dots \xrightarrow{\partial_{i+1}} C_i \xrightarrow{\partial_i} C_{i-1} \xrightarrow{\partial_{i-1}} \dots$$

и фильтрации его членов

$$0 = C_{i,-1} \subset C_{i,0} \subset \dots \subset C_{i,k} = C_i,$$

удовлетворяющие условию $\partial_i(C_{i,s}) \subset C_{i-1,s}$.

Теорема 19.8. *Группа гомологий E^r по отношению к дифференциалу d^r есть E^{r+1} :*

$$E_{i,q-i}^{r+1} = \text{Ker } d_{i,q-i}^r / \text{Im } d_{i+r,q-i-r+1}^r.$$

Доказательство. Пусть (см. определение 19.5) $d_{i,q-i}^r(\alpha) = 0$. Тогда $\beta' \in B_{i-r,q-i+r-1}^r$, и существует такой представитель $c \in \beta'$, что \square

Зафиксируем теперь некоторое q , а i будем менять, и рассмотрим компоненты члена на E^∞ с постоянной суммой индексов, равной q , т.е. $E_{i,q-i}^\infty = Z_{i,q-i}^\infty/B_{i,q-i}^\infty$. Обозначим через ${}_{(i)}H_q(X)$ образ естественного гомоморфизма $H_q(X_i) \rightarrow H_q(X)$, индуцированного включением $X_i \hookrightarrow X$. Возникает групповая фильтрация

$$(12) \quad 0 = {}_{(-1)}H_q(X) \subset {}_{(0)}H_q(X) \subset \dots \subset {}_{(k)}H_q(X) = H_q(X).$$

Предложение 19.9. $E_{i,q-i}^\infty = {}_{(i)}H_q(X)/{}_{(i-1)}H_q(X)$.

Доказательство. По определениям и вычислениям там же:

$$\begin{aligned} Z_{i,q-i}^\infty &= Z_q(X_i)/Z_q(X_{i-1}), \\ B_{i,q-i}^\infty &= (B_q(X) \cap C_q(X_i))/(B_q(X) \cap C_q(X_{i-1})), \\ {}_{(i)}H_q(X) &= Z_q(X_i)/(B_q(X) \cap C_q(X_i)), \\ {}_{(i-1)}H_q(X) &= Z_q(X_{i-1})/(B_q(X) \cap C_q(X_{i-1})). \end{aligned}$$

Теперь требуемое равенство $Z_{i,q-i}^\infty/B_{i,q-i}^\infty = {}_{(i)}H_q(X)/{}_{(i-1)}H_q(X)$ вытекает из следующего общего факта. Если A, B, C и D — подгруппы некоторой абелевой группы, то $(A/B)/(C/D) = (A/C)/(B/D)$. \square

Объединим доказанные факты в теорему:

Теорема 19.10 (Лере). *Если пространство X профильтровано подпространствами X_i , $\emptyset = X_{-1} \subset X_0 \subset \dots \subset X_{k-1} \subset X_k = X$, то существуют группы $E_{p,q}^r$, определенные при $r \geq 0$ и всех p и q , причем $E_{p,q}^r = 0$ при $p < 0$ и $p > k$, и гомоморфизмы*

$$d_{p,q}^r : E_{p,q}^r \rightarrow E_{p-r,q+r-1}^r,$$

причем

- (1) $d_{p-r,q+r-1}^r \circ d_{p,q}^r = 0$;
- (2) $E_{p,q}^{r+1} = \text{Ker } d_{p,q}^r / \text{Im } d_{p+r,q-r+1}^r$;
- (3) $E_{p,q}^0 = C_{p+q}(X_p, X_{p-1})$;
- (4) $d_{p,q}^0$ совпадает с граничным оператором $\partial : C_{p+q}(X_p, X_{p-1}) \rightarrow C_{p+q-1}(X_p, X_{p-1})$;
- (5) $E_{p,q}^1 = H_{p+q}(X_p, X_{p-1})$;
- (6) $d_{p,q}^1$ совпадает с гомоморфизмом $\partial_* : H_{p+q}(X_p, X_{p-1}) \rightarrow H_{p+q-1}(X_{p-1}, X_{p-2})$ из гомологической последовательности тройки (X_p, X_{p-1}, X_{p-2}) ;
- (7) $E_{p,q}^\infty = \frac{\text{Im}(H_{p+q}(X_p) \rightarrow H_{p+q}(X))}{\text{Im}(H_{p+q}(X_{p-1}) \rightarrow H_{p+q}(X))} =: \frac{{}_{(p)}H_{p+q}(X)}{{}_{(p-1)}H_{p+q}(X)}$.

Заметим, что по последнему утверждению теоремы Лере при любом m в группе $H_m(X)$ имеется подгруппа ${}_{(0)}H_m(X) = E_{0,m}^\infty$, в факторгруппе $H_m(X)/E_{0,m}^\infty$ имеется подгруппа $E_{1,m-1}^\infty$, и так далее. Наконец, факторгруппа

$$(\dots ((H_m(X)/E_{0,m}^\infty)/E_{1,m-1}^\infty)/E_{2,m-2}^\infty \dots)/E_{k-1,m-k+1}^\infty$$

совпадает с $E_{k,m-k}^\infty$. Отсюда получаем, что прямая сумма $\bigoplus_{p+q=m} E_{p,q}^\infty$ присоединена к группе $H_m(X)$ относительно фильтрации $\{(i)H_m(X)\}$, т.е. является суммой факторов $\{(i)H_m(X)\}/\{(i-1)H_m(X)\}$.

Теорема 19.11 (Лере для когомологий). *Если пространство X профильтровано подпространствами X_i , $\emptyset = X_{-1} \subset X_0 \subset \dots \subset X_{k-1} \subset X_k = X$, то существуют группы $E_r^{p,q}$, определенные при $r \geq 0$ и всех p и q , причем $E_r^{p,q} = 0$ при $p < 0$ и $p > k$, и гомоморфизмы*

$$d_r^{p,q} : E_r^{p,q} \rightarrow E_r^{p+r,q-r+1},$$

причем

- (1) $d_r^{p+r,q-r+1} \circ d_r^{p,q} = 0$;
- (2) $E_{r+1}^{p,q} = \text{Ker } d_r^{p,q} / \text{Im } d_r^{p-r,q+r-1}$;
- (3) $E_0^{p,q} = C^{p+q}(X_p, X_{p-1})$;
- (4) $d_0^{p,q}$ совпадает с кограничным оператором $\delta : C^{p+q}(X_p, X_{p-1}) \rightarrow C^{p+q+1}(X_p, X_{p-1})$;
- (5) $E_1^{p,q} = H^{p+q}(X_p, X_{p-1})$;
- (6) $d_1^{p,q}$ совпадает с гомоморфизмом $\delta_* : H^{p+q}(X_p, X_{p-1}) \rightarrow H^{p+q+1}(X_{p+1}, X_p)$ из гомологической последовательности тройки (X_{p+1}, X_p, X_{p-1}) ;
- (7) $E_\infty^{p,q} = \frac{\text{Ker}(H_{p+q}(X) \rightarrow H_{p+q}(X_{p-1}))}{\text{Ker}(H_{p+q}(X) \rightarrow H_{p+q}(X_p))} =: \frac{{}_{(p-1)}H^{p+q}(X)}{{}_{(p)}H^{p+q}(X)}$.

20. СПЕКТРАЛЬНАЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ РАССЛОЕНИЯ

Пусть $\xi = (E, B, F, p)$ — локально-тривиальное расслоение над связной конечной клеточной базой B . Рассмотрим в E фильтрацию $\{E(i) := p^{-1}(B^i)\}$ прообразами остовов базы

$$\emptyset = E^{-1} \subset E(0) \subset E(1) \subset \dots \subset E(k) = E, \quad k = \dim B,$$

и соответствующую спектральную последовательность. К сожалению, традиционные обозначения требуют использовать E и для тотального пространства и для членов спектральной последовательности.

20.1. Случай гомологически простого расслоения. Пусть x_0, x_1 — точки базы, а s — соединяющий их путь. Если слой расслоения клеточный, то по теореме о накрывающей гомотопии найдем (с точностью до гомотопии) отображение (гомотопическую эквивалентность) слоев $t_s : p^{-1}(x_0) \rightarrow p^{-1}(x_1)$. Точнее, сначала накроем путь путем, а потом применим относительную теорему о накрывающей гомотопии. Замена s на гомотопный не меняет гомотопического класса $[t_s]$. Таким образом, $[s]$ определяет для каждого q изоморфизм $H_q(p^{-1}(x_0)) \rightarrow H_q(p^{-1}(x_1))$. В случае не клеточного F для любого клеточного Z по $[s]$ строится отображение $\pi(Z, p^{-1}(x_0)) \rightarrow \pi(Z, p^{-1}(x_1))$ и этого достаточно.

Определение 20.1. Если построенный гомоморфизм не зависит от класса $[s]$, т.е. определяется только точками x_0 и x_1 , то расслоение называется *гомологически простым*.

Замечание 20.2. 1) Расслоение с односвязной базой гомологически просто.
2) Простое (в смысле гомотопических групп) расслоение гомологически просто.
3) Можно рассматривать другие группы коэффициентов (ослаблять).

Теорема 20.3. Если расслоение ξ гомологически просто, то для гомологической спектральной последовательности с коэффициентами в G имеем:

$$\begin{aligned} E_{p,q}^1 &= C_p(B; H_q(F; G)), \\ d_{p,q}^1 &= \partial : C_p(B; H_q(F; G)) \rightarrow C_{p-1}(B; H_q(F; G)), \\ E_{p,q}^2 &= H_p(B; H_q(F; G)). \end{aligned}$$

Аналогично — для когомологий.

Доказательство. ?????????????????????? □

Замечание 20.4. Рассуждения переносятся на случай расслоений Серра.

Посмотрим, как это выражается (в простейшем случае) графически. Имеем $E_{p,q}^2 = 0$, если $p < 0$ или $q < 0$. В нулевой строке стоят группы

$$E_{p,0}^2 = H_p(B; H_0(F)) = H_p(B)$$

(если F связно), т.е. гомологии базы. В нулевом столбце стоят группы

$$E_{0,q}^2 = H_0(B; H_q(F)) = H_q(F),$$

т.е. гомологии слоя. Если гомологии базы или гомологии слоя не имеют кручения, то, по формуле универсальных коэффициентов

$$E_{p,q}^2 = H_p(B; H_q(F)) = H_p(B) \otimes H_q(F) = E_{p,0}^2 \otimes E_{q,0}^2.$$

В общем случае это равенство имеет место с точностью до кручения.

\vdots		\vdots	
$H_q(F)$	\dots	$H_p(B) \otimes H_q(F)$	\dots
$H_{q-1}(F)$		\vdots	
\vdots		\vdots	
$H_1(F)$		\vdots	
\mathbb{Z}	$H_1(B) \dots H_{p-1}(B)$	$H_p(B)$	\dots

20.2. Локальные системы коэффициентов и случай непростого расслоения.

Определение 20.5. Над топологическим пространством X задана *локальная система групп*, если каждой точке поставлена в соответствие группа G_x , и каждому пути s в X с началом x и концом y поставлен в соответствие изоморфизм $\tau_s : G_x \cong G_y$, зависящий только от гомотопического класса s . При этом требуется согласованность с композицией путей, т.е. $\tau_{s's''} = \tau_{s'}\tau_{s''}$.

Пример 20.6. $G_x := \pi_n(X, x)$, $\tau_s = s_*$.

Пример 20.7. X — база расслоения $p : Y \rightarrow X$ (локально-тривиального или в смысле Серра), $G_x = H_q(p^{-1}(x))$, $\tau_s = t_s$ (теперь уже зависящий от $[s]$). Обозначим эту систему $\{H_q(p^{-1}(x))\}$.

Если рассматривать только петли с началом и концом в фиксированной точке x_0 , то соответствие $[s] \mapsto \tau_s$ задает действие (представление) группы $\pi_1(X, x_0)$ групповыми автоморфизмами на группе G_{x_0} .

Задача 173. Докажите, что если над X заданы две локальные системы $\{G_x, \tau_s\}$ и $\{G'_x, \tau'_s\}$, причем для любого x_0 определены изоморфизмы $f_{x_0} : G_{x_0} \rightarrow G'_{x_0}$, согласованные с только что определенными действиями $\pi_1(X, x_0)$, т.е. для любого $[s] \in \pi_1(X, x_0)$ коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} G_{x_0} & \xrightarrow{f_{x_0}} & G'_{x_0} \\ \tau_s \downarrow & & \downarrow \tau'_s \\ G_{x_0} & \xrightarrow{f_{x_0}} & G'_{x_0} \end{array}$$

то эти две системы изоморфны (в очевидном смысле).

Задача 174. Докажите, что любая группа G с произвольным действием $\pi_1(X, x_0)$ может служить группой G_{x_0} некоторой локальной системы (с соответствующим действием).

Перейдем к определению соответствующих гомологий. Пусть $\mathcal{G} = \{G_x, \tau_s\}$ — локальная система абелевых групп над X . Пусть c_q — центр стандартного q -мерного симплекса T^q , а $s_{q,i}$ — прямолинейный путь в T^q , соединяющий c_q с центром i -й $(q-1)$ -мерной грани. Под q -мерной *сингулярной цепью пространства X с коэффициентами в \mathcal{G}* понимается конечная формальная линейная комбинация $\sum g_j f_j$, где

$f_j : T^q \rightarrow X$ — сингулярные симплексы, $g_j \in G_{f_j(c_q)}$. Группа таких цепей обозначается через $C_q(X; \mathcal{G})$. *Граничный оператор* определяется как

$$\partial : C_q(X; \mathcal{G}) \rightarrow C_{q-1}(X; \mathcal{G}), \quad \partial(gf) := \sum_{i=0}^q (-1)^i \tau_{f \circ s_{q,i}}(g) \Gamma_i f.$$

Получающиеся *гомологии* обозначаются через $H_q(X; \mathcal{G})$. Аналогично (через функционалы на цепях) определяются *когомологии* $H^q(X; \mathcal{G})$.

Задача 175. Пусть $x_0 \in X$ — произвольная точка. Покажите, что

$$H^0(X; \mathcal{G}) \cong \{g \in G_{x_0} \mid \tau_s(g) = g \text{ для любого } [s] \in \pi_1(X, x_0)\},$$

а $H_0(X; \mathcal{G})$ изоморфно факторгруппе G_{x_0} по подгруппе, порожденной всеми элементами вида $\tau_s(g) - g$, $g \in G_{x_0}$, $[s] \in \pi_1(X, x_0)$.

В случае клеточного X эти гомологии и когомологии можно вычислять по клеткам. *Клеточная цепь* размерности q — это формальная сумма $\sum g_j \sigma_j$, где σ_j — клетка размерности q , $g_j \in G_{x_j}$, $x_j \in \sigma_j$ — некоторая фиксированная точка. Ввиду стягиваемости клетки, в следующих конструкциях от выбора x_j ничего не будет зависеть, так что будем обозначать $G_{\sigma_j} := G_{x_j}$. *Граничный оператор*:

$$\partial(g\sigma) := \sum_{\substack{\dim \omega = q-1 \\ \omega \cap \bar{\sigma} \neq \emptyset}} \eta_{\sigma, \omega}(g) \omega,$$

где оператор $\eta_{\sigma, \omega} : G_\sigma \rightarrow G_\omega$ для ориентированных инцидентных клеток σ и ω определяется следующим образом. Выберем для σ характеристическое отображение $h : D^q \rightarrow X$, представляющее выбранную ориентацию клетки σ , причем в ω имеется такой шарик U с центром y , что его прообраз $h^{-1}(U) \subset S^{q-1}$ распадается в несвязное объединение $\sqcup U_k$, причем каждое U_k отображается на U гомеоморфно с сохранением или обращением ориентации. Введем соответствующие индексы $\varepsilon_k = \pm 1$. Пусть c — центр D^q , $c_k := U_k \cap h^{-1}(y)$, а s_k — прямолинейный путь в D^q соединяющий c с c_k . Теперь определим гомоморфизм

$$\eta_{\sigma, \omega} : G_\sigma = G_{h(c)} \rightarrow G_\omega = G_y, \quad g \mapsto \sum_k \varepsilon_k \tau_{h \circ s_k}(g).$$

Задача 176. Докажите, что получим то же самое (по аналогии со случаем обычных (ко)гомологий).

Теорема 20.8. *Для спектральной последовательности расслоения*

$$E_{p,q}^2 = H_p(B; \{H_q(p^{-1}(x))\})$$

(см. пример 20.7). Аналогично для когомологий и гомологий с коэффициентами.

20.3. Гомологии пространства петель.

Теорема 20.9. Пусть X — $(n-1)$ -связное пространство с отмеченной точкой, т.е. $\pi_0(X) = \pi_1(X) = \dots = \pi_{n-1}(X) = 0$. Тогда

$$H_r(X) \cong H_{r-1}(\Omega X), \quad r \leq 2n-2.$$

Аналогично для гомологий с любыми коэффициентами и когомологий.

Доказательство. Ограничимся клеточным X . В общем случае надо воспользоваться теоремой о клеточной аппроксимации.

Рассмотрим спектральную последовательность расслоения $EX \rightarrow X$ со слоем ΩX , где EX — пространство путей, начинающихся в отмеченной точке, ΩX — пространство петель. Поскольку EX стягиваемо, то в E^∞ все тривиально, кроме $E_{0,0}^\infty = \mathbb{Z}$ (мы пользуемся тут общей теоремой о спектральной последовательности, построенной по фильтрации). В силу теоремы Гуревича $H_1(X) = \dots = H_{n-1}(X) = 0$. Поэтому $E_{p,q}^2 = 0$ при $p = 1, \dots, n-1$, поскольку можем воспользоваться формулой универсальных коэффициентов (заметим, что расслоение простое, поскольку база X односвязна). Т.е. в E^2 столбцы с 1-го по $(n-1)$ -й — нулевые. В нулевом столбце имеем $E_{0,q}^2 = H_q(\Omega X) = 0$ при $q = 1, \dots, n-2$. Действительно, все уходящие дифференциалы бьют в нулевые группы (в левой полуплоскости), а входящие — приходят из нулевых групп (при младших r по полученному условию обнуления столбцов, а при старших — так как они приходят из нижней полуплоскости). Таким образом, эти члены E^2 не изменятся до E^∞ , а там они нулевые. Снова применяя формулу универсальных коэффициентов, а точнее более простое равенство $H_p(X, H_q(\Omega X)) = 0$, если $H_q(\Omega X) = 0$, получаем, что строки с номерами $1, \dots, n-2$ — нулевые. Таким образом, ненулевыми в E^2 могут быть только позиции, заштрихованные на Рис. 2. В угловой клетке стоит $E_{n,n-1}^2$. Единственный порядок нетривиального дифферен-

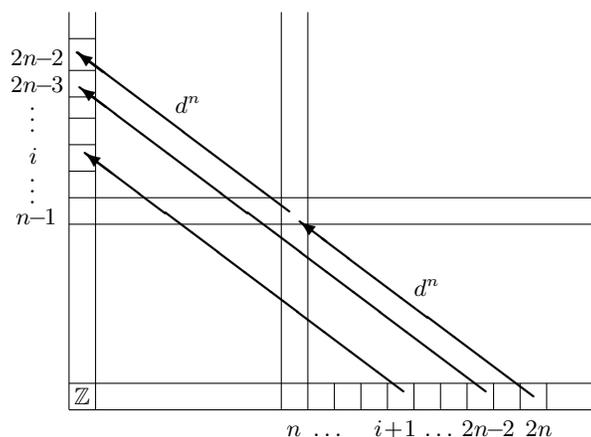


Рис. 2

циала, выходящего из этой клетки — n , и попадает он в $(2n-2)$ -ю клетку нулевого столбца, а входящего — также только n , и приходит он из $(2n)$ -й клетки нулевой строки. А клетки, стоящие в нулевом столбце ниже, а в нулевой строке — левее указанных клеток, могут быть связаны дифференциалами только попарно между собой, так как все остальные бьют в нули (или приходят из нулей). Точнее, единственный нетривиальный дифференциал, приходящий в $(r-1)$ -ю клетку нулевого столбца, имеет порядок r и приходит из r -й клетки нулевой строки. Чтобы в E^∞ иметь нуль,

этот дифференциал должен быть изоморфизмом:

$$\begin{array}{ccc} d_{r,0}^r : E_{r,0}^r & \xrightarrow{\cong} & E_{0,r-1}^r \\ \parallel & & \parallel \\ E_{r,0}^2 & & E_{0,r-1}^2 \\ \parallel & & \parallel \\ H_r(X) & & H_{r-1}(\Omega X). \end{array}$$

□

20.4. Трансгрессия. Для гомологической и когомологической спектральных последовательностей расслоения (E, B, F, p) рассмотрим соответствующие дифференциалы

$$d_{m,0}^m : E_{m,0}^m \longrightarrow E_{0,m-1}^m, \quad d_m^{0,m-1} : E_m^{0,m-1} \longrightarrow E_m^{m,0}.$$

Из конструкции спектральной последовательности (с учетом нулевых дифференциалов и вида E^2 (E_2)) получаем, что эти дифференциалы имеют вид

$$\begin{array}{ccc} E_{m,0}^m & \xrightarrow{d_{m,0}^m} & E_{0,m-1}^m \\ \downarrow & & \parallel \\ H_m(B; G) & & H_{m-1}(F; G)/(\dots) \\ \text{(подгруппа)} & & \text{(факторгруппа)} \end{array}, \quad \begin{array}{ccc} E_m^{0,m-1} & \xrightarrow{d_m^{0,m-1}} & E_m^{m,0} \\ \downarrow & & \parallel \\ H^{m-1}(F; G) & & H^m(B; G)/(\dots) \\ \text{(подгруппа)} & & \text{(факторгруппа)} \end{array},$$

т.е. являются *частичными многозначными гомоморфизмами* групп, которые мы будем обозначать

$$H_m(B; G) \dashrightarrow H_{m-1}(F; G), \quad H^{m-1}(F; G) \dashrightarrow H^m(B; G),$$

и называть, соответственно *гомологической* и *когомологической трансгрессией*.

Теорема 20.10. *Гомологическая и когомологическая трансгрессия совпадают, соответственно, со сквозными гомоморфизмами*

$$\begin{aligned} H_m(B; G) &= H_m(B, b_0; G) \xrightarrow{(p_*)^{-1}} H_m(E, F; G) \xrightarrow{\partial_*} H_{m-1}(F; G), \\ H^{m-1}(F; G) &\xrightarrow{\delta^*} H^m(E, F; G) \xrightarrow{(p_*)^{-1}} H^m(B, b_0; G) = H^m(B; G). \end{aligned}$$

Доказательство. Проведем для гомологий при $G = \mathbb{Z}$. Можем считать, что B имеет единственную нульмерную клетку. Дифференциал $d_{m,0}^m$ может быть описан следующим образом. Группа $E_{m,0}^m = Z_{m,0}^m$ состоит из цепей $c \in C_m(p^{-1}(B^m)) \subset C_m(E)$, граница которых принадлежит $C_{m-1}(p^{-1}(B^0)) = C_{m-1}(F)$, т.е. из относительных циклов $c \in Z_m(p^{-1}(B^m), F)$, рассматриваемых по модулю цепей из $C_m(p^{-1}(B^{m-1}))$.

.....

□

20.5. Последовательность Серра.

20.6. Мультипликативная структура.

21. КВАДРАТЫ СТИНРОДА

.....

Положим

$$\text{Sq}^{n-1}(e_n) = f = \tau(e_{n-1}^2) \in H^{2n-1}(K(\mathbb{Z}_2, n), \mathbb{Z}_2).$$

Таким образом, для всех $n > 1$ определены $\text{Sq}^{n-1}(e_n)$, в частности,

$$\text{Sq}^{n-2}(e_{n-1}) \in H^{2n-3}(K(\mathbb{Z}_2, n-1), \mathbb{Z}_2) = E_2^{0,2n-3},$$

т.е. мы перешли от когомологий базы к когомологиям слоя. Этот элемент трансгрессивен и под действием трансгрессии $\tau = d_{2n-2}$ переходит в нетривиальный элемент в $E_2^{2n-2,0} = H^{2n-2}(K(\mathbb{Z}_2, n), \mathbb{Z}_2)$. Этот элемент объявляется значением $\text{Sq}^{n-2}(e_n)$. И так далее.

Таким образом, для всех $n > k > 0$ определен ненулевой элемент $\text{Sq}^{n-k}(e_n) \in H^{2n-k}(K(\mathbb{Z}_2, n), \mathbb{Z}_2)$. Для того, чтобы эта система операций определяла стабильную операцию, необходимо проверить для всех n выполнение $f_n^*(\text{Sq}^k e_n) = \text{Sq}^k e_{n-1}$ (см. доказательство теоремы 18.7). Возможны три случая.

1. Если $k \geq n + 1$, то обе части равны нулю.
2. Пусть $k \leq n - 1$. Гомоморфизм

$$f_n^* : H^*(K(\mathbb{Z}_2, n), \mathbb{Z}_2) \rightarrow H^*(K(\mathbb{Z}_2, n-1), \mathbb{Z}_2),$$

по определению, является композицией отображения, индуцированного отображением $\Sigma K(\mathbb{Z}_2, n-1) = \Sigma \Omega K(\mathbb{Z}_2, n) \rightarrow K(\mathbb{Z}_2, n)$, и изоморфизма надстройки. Как мы показали в пункте 20.5, этот гомоморфизм обратен трансгрессии расслоения $* \xrightarrow{K(\mathbb{Z}_2, n-1)} K(\mathbb{Z}_2, n)$. Так как по построению $\tau(\text{Sq}^k e_{n-1}) = \text{Sq}^k e_n$ при $k \leq n - 1$, то $f_n^*(\text{Sq}^k e_n) = \text{Sq}^k e_{n-1}$.

3. Если $k = n$, то $\text{Sq}^k e_{n-1} = 0$, и надо проверить, что $f_k^*(\text{Sq}^k e_k) = f_k^*(e_k^2) = 0$. Как мы уже упоминали, f_k^* разлагается в композицию

$$H^*(K(\mathbb{Z}_2, k); \mathbb{Z}_2) \rightarrow H^*(\Sigma K(\mathbb{Z}_2, k-1); \mathbb{Z}_2) \rightarrow H^*(\Sigma K(\mathbb{Z}_2, k-1); \mathbb{Z}_2),$$

причем первый гомоморфизм индуцирован отображением пространств (вида $\Sigma \Omega Y \rightarrow Y$), поэтому он мультипликативен. Поскольку при нем e_k переходит в Σe_{k-1} , то e_k^2 — в $(\Sigma e_{k-1})^2 = 0$ по лемме 21.1.

Осталось положить $\text{Sq}^0 e_n = e_n$ для всех n . Существование квадратов Стинрода, удовлетворяющих условиям (1) доказано. На самом деле, доказана и единственность: обращая рассуждения, например, в случае 2), получаем, что значения должны определяться через трансгрессию, т.е. только таким способом, как мы сделали.

Лемма 21.1. *В любой надстройке когомологическое умножение тривиально, т.е. если $\alpha \in H^p(\Sigma X; A)$, $\beta \in H^q(\Sigma X; A)$, $p > 0$, $q > 0$, A — произвольное кольцо, то $\alpha\beta = 0$.*

Доказательство. Диагональное отображение $\Sigma X \rightarrow \Sigma X \times \Sigma X$ гомотопно композиции $\Sigma X \rightarrow \Sigma X \vee \Sigma X \rightarrow \Sigma X \times \Sigma X$. Покажем это на примере $X = \text{двоеточие}$, ΣX — окружность, $\Sigma X \times \Sigma X$ — тор. На рис. 3 (развертка тора в квадрат) диагональная окружность изображена линией. Общий случай оставляется в качестве упражнения.

Теперь, если p_1 — проекция декартова квадрата на первый сомножитель, а p_2 — на второй, то $p_1^* \alpha$ тривиально при ограничении на вторую компоненту букета, а $p_2^* \beta$ — на первую. \square

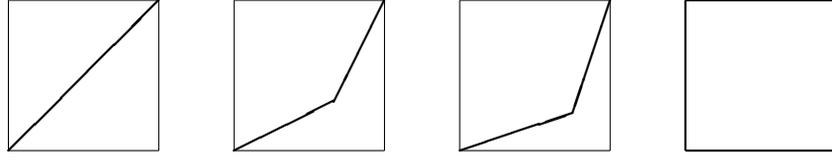


Рис. 3

Доказательство формулы Картана. Пусть X и Y — произвольные клеточные пространства, $x \in H^*(X; \mathbb{Z}_2)$, $y \in H^*(Y; \mathbb{Z}_2)$. Поскольку когомологические операции естественны, то вместо формулы Картана достаточно доказать формулу

$$\text{Sq}^i(x \times y) = \sum_{p+q=i} \text{Sq}^p(x) \times \text{Sq}^q(y).$$

Достаточно проверить для однородных элементов $x \in H^m(X; \mathbb{Z}_2)$, $y \in H^n(Y; \mathbb{Z}_2)$. Для них существуют такие отображения $f : X \rightarrow K(\mathbb{Z}_2, m)$, $g : Y \rightarrow K(\mathbb{Z}_2, n)$, что $f^*(e_m) = x$ и $g^*(e_n) = y$. Задача свелась к доказательству соотношения

$$\text{Sq}^i(e_m \times e_n) = \sum_{p+q=i} \text{Sq}^p(e_m) \times \text{Sq}^q(e_n).$$

Если $i > m + n$, то и слева, и справа стоят нули. Если $i = m + n$, то слева стоит

$$\text{Sq}^{m+n}(e_m \times e_n) = (e_m \times e_n)^2 = e_m^2 \times e_n^2 = \text{Sq}^m(e_m) \times \text{Sq}^n(e_n).$$

Справа из суммы $\sum_{p+q=m+n}$ остается только одно слагаемое при $p = m$, $q = n$, т.е. $\text{Sq}^m(e_m) \times \text{Sq}^n(e_n)$ (в остальных хотя бы один сомножитель — нулевой).

В случае $i < m + n$ будем доказывать по индукции. Предположим, что формула верна для $i = m + n - (s - 1)$, где $s \geq 1$, и докажем для $i = m + n - s$. Таким образом, база индукции ($s = 1$) установлена в предыдущем пункте.

Напомним, что тензорное произведение пространств определялось как $X \otimes Y = X \times Y / X \vee Y$. При этом $S^1 \otimes X = \Sigma X$. Тензорное произведение ассоциативно. Так что $(S^1 \otimes X) \otimes Y = S^1 \otimes (X \otimes Y)$ и $(\Sigma X) \otimes Y = \Sigma(X \otimes Y)$. Наконец, $H^*(X \otimes Y) = H^*(X \times Y) / J$, где J — подгруппа, порожденная элементами вида $(x \times 1) + (1 \times y)$, $x \in H^*(X)$, $y \in H^*(Y)$.

Обозначим для краткости $K_n := K(\mathbb{Z}_2, n)$ и рассмотрим отображения:

$$\begin{array}{ccc}
 (\Sigma K_{m-1}) \otimes K_n & = & \Sigma(K_{m-1} \otimes K_n) \\
 \swarrow f_{m-1} \otimes \text{Id}_{K_n} & & \\
 K_m \otimes K_n & & \\
 \swarrow \text{Id}_{K_m} \otimes f_{n-1} & & \\
 K_m \otimes (\Sigma K_{n-1}) & = & \Sigma(K_m \otimes K_{n-1}).
 \end{array}$$

В когомологиях:

$$\begin{array}{ccc}
 & & H^r(\Sigma(K_{m-1} \otimes K_n); \mathbb{Z}_2) \\
 & \nearrow^{(f_{m-1} \otimes \text{Id}_{K_n})^*} & \\
 H^r(K_m \otimes K_n; \mathbb{Z}_2) & & \\
 & \searrow_{(\text{Id}_{K_m} \otimes f_{n-1})^*} & \\
 & & H^r(\Sigma(K_m \otimes K_{n-1}); \mathbb{Z}_2)
 \end{array}$$

или

$$\begin{array}{ccc}
 & & H^{r-1}(K_{m-1} \otimes K_n; \mathbb{Z}_2) \\
 & \nearrow^{\Sigma^{-1}(f_{m-1} \otimes \text{Id}_{K_n})^*} & \\
 H^r(K_m \otimes K_n; \mathbb{Z}_2) & & \\
 & \searrow_{\Sigma^{-1}(\text{Id}_{K_m} \otimes f_{n-1})^*} & \\
 & & H^{r-1}(K_m \otimes K_{n-1}; \mathbb{Z}_2).
 \end{array}$$

Очевидно, что при гомоморфизмах $\Sigma^{-1}(f_{m-1} \otimes \text{Id}_{K_n})^*$ и $\Sigma^{-1}(\text{Id}_{K_m} \otimes f_{n-1})^*$ элемент $e_m \times e_n$ переходит в элементы $e_{m-1} \times e_n$ и $e_m \times e_{n-1}$, соответственно. Как уже не раз обсуждалось, гомоморфизм

$$f_{m-1}^* : H^q(K_m; \mathbb{Z}_2) \rightarrow H^q(\Sigma K_{m-1}; \mathbb{Z}_2) = H^{q-1}(K_{m-1}; \mathbb{Z}_2)$$

обратен к трансгрессии в спектральной последовательности расслоения Серра для $K_m = K(\mathbb{Z}_2, m)$ и является изоморфизмом при $0 < q < 2m$.

Рассмотрим в

$$H^r(K_m \otimes K_n; \mathbb{Z}_2) = H^r(K_m \times K_n; \mathbb{Z}_2) / J = \left(\bigoplus_{p+q=r} H^p(K_m; \mathbb{Z}_2) \otimes H^q(K_n; \mathbb{Z}_2) \right) / J$$

(формула Кюннета для поля) пересечение ядер

$$T := [\text{Ker } \Sigma^{-1}(f_{m-1} \otimes \text{Id}_{K_n})^*] \cap [\text{Ker } \Sigma^{-1}(\text{Id}_{K_m} \otimes f_{n-1})^*].$$

Пусть

$$\rho = \left[\sum_i \alpha_i \times \beta_i \right] \in T \subset H^r(K_m \otimes K_n; \mathbb{Z}_2).$$

Тогда $\sum_i (f_{m-1}^* \alpha_i) \times \beta_i = 0$ и $\sum_i \alpha_i \times (f_{n-1}^* \beta_i) = 0$ (так как надстройка — изоморфизм), откуда $f_{m-1}^* \alpha_i = 0$ (соответственно, $f_{n-1}^* \beta_i = 0$) для всех i , поскольку все β_i (соответственно, α_i) независимы (даже имеют разную размерность). В силу замечания об изоморфности f_{m-1}^* при $0 < q < 2m$, получаем, что $\deg \alpha_i = 0$ или $\deg \alpha_i \geq 2m$, а $\deg \beta_i = 0$ или $\deg \beta_i \geq 2n$. Можем считать, что $\sum_i \alpha_i \times \beta_i \notin J$, так что среди α_i и β_i нет равных 1, т.е. исключаем случай $\deg = 0$. Итак, пересечение ядер не содержит нетривиальных элементов степени, меньшей чем $2(m+n)$.

Для доказательства формулы Картана предположим что класс элемента

$$\rho = \text{Sq}^{m+n-s}(e_m \times e_n) - \sum_{p+q=m+n-s} \text{Sq}^p(e_m) \times \text{Sq}^q(e_n)$$

отличен от нуля в $H^{2(m+n)-s}(K_m \otimes K_n; \mathbb{Z}_2)$. Учитывая стабильность (коммутирование с надстройкой), имеем

$$\begin{aligned}
 \Sigma^{-1}(f_{m-1} \otimes \text{Id}_{K_n})^* \rho &= \text{Sq}^{m+n-s}(\Sigma^{-1} f_{m-1}^* e_m \times e_n) - \\
 &\quad - \sum_{p+q=m+n-s} \text{Sq}^p(\Sigma^{-1} f_{m-1}^* e_m) \times \text{Sq}^q(e_n) = \\
 (13) \qquad \qquad \qquad &= \text{Sq}^{m+n-s}(e_{m-1} \times e_n) - \sum_{p+q=m+n-s} \text{Sq}^p(e_{m-1}) \times \text{Sq}^q(e_n) = 0
 \end{aligned}$$

по предположению индукции. Аналогично, $\Sigma^{-1}(\text{Id}_{K_m} \otimes f_{n-1})^* \rho = 0$. Так как $\deg \rho = 2(m+n) - s < 2(m+n)$, то $[\rho] = 0$. Осталось проверить, что $\rho = 0$ (а не просто лежит в J). Для этого достаточно проверить, что ограничения ρ на первый и на второй сомножитель тривиальны. Заметим, что оно такое же (для первого), как у ρ с заменой e_n на e_{n-1} . Обозначим его ρ' . Но тогда $\rho' = 0$ по предположению индукции (формулы аналогичны (13)), а значит, и ограничение. Аналогично для второго сомножителя. \square

22. СООТНОШЕНИЯ АДЕМА

Параграф 29 Фоменко и Фукса или глава 3 Мошера и Тангоры.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Мищенко А. С., Фоменко А. Т. Курс дифференциальной геометрии и топологии. — М.: Факториал Пресс, 2000.
- [2] Постников М. М. Лекции по алгебраической топологии. Основы теории гомотопий. — М.: Наука, 1984.
- [3] Постников М. М. Лекции по алгебраической топологии. Теория гомотопий клеточных пространств. — М.: Наука, 1985.
- [4] Рохлин В. А., Фукс Д. Б. Начальный курс топологии. Геометрические главы. — М.: Наука, 1977.
- [5] Свитцер Р. М. Алгебраическая топология – гомотопии и гомологии. — М.: Наука, 1985.
- [6] Спеньер Э. Алгебраическая топология. — М.: Мир, 1971.
- [7] Фоменко А. Т., Фукс Д. Б. Курс гомотопической топологии. — М.: Наука, 1989.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- букет пространств 13
- гомотопическая эквивалентность 14
- гомотопический класс 13
- гомотопия 13
- деформационный ретракт 15
- джойн пространств 11
- комплекс групп 10
- конус пространства 11
 - вершина 11
 - образующие 11
- конус отображения 11
- надстройка 11
 - вершина 11
 - образующие 11
- петля 12
- приклеивание по отображению 11
- путей пространство 12
- ретракт 15
- ретракция 15
- смеш-произведение пространств 13
- строгий деформационный ретракт 15
- стягиваемое пространство 15
- тензорное произведение пространств 13
- точная последовательность 10, 35
- фактортопология 10
- фундаментальная группа 20
- цилиндр пространства 11
 - основания 11
 - образующие 11
- цилиндр отображения 11
- число листьев 29
- H -пространство 16
- H' -пространство 17