

## Лекция 10 (23.11.2020)

### 5.2. АФ-алгебры.

**Определение 5.6.** Назовем  $C^*$ -алгебру *АФ-алгеброй* (аппроксимативно конечномерной), если она является замыканием объединения возрастающей по вложению последовательности своих конечномерных  $C^*$ -подалгебр.

**Задача 47.** Доказать, что матричная алгебра  $M_n$  является простой при любом  $n$  (это не следует из леммы 4.34, из которой можно вывести, что  $M_n$  является простой при некотором  $n$ ). *Указание:* для любого идеала  $I \neq \{0\}$  рассмотрим матрицу из него с  $a_{ij} \neq 0$ . Путем умножения слева и справа на матрицы с 1 на одном месте и нулями на остальных, получите матрицу из  $I$  с единственным ненулевым элементом  $a_{ij}$ . Умножая на матрицы перестановок, получите аналогичные матрицы со всеми возможными  $i, j$ . Их линейные комбинации дают всю алгебру  $M_n$ .

**Задача 48.** Вывести из задачи 47 и леммы 4.34, что образ матричной алгебры  $M_n$  при  $*$ -гомоморфизме — либо нулевая алгебра, либо алгебра, изоморфная  $M_n$ .

**Задача 49.** Доказать следующий почти очевидный факт: пусть  $p$  и  $q$  — проекторы одинакового ранга в  $M_n$ . Тогда существует такая унитарная матрица  $u$ , что  $q = u^* p u$ .

**Лемма 5.7.** Пусть  $\varphi : M_n \rightarrow M_k$  — ненулевой  $*$ -гомоморфизм, так что  $p := \varphi(1_n)$  — самосопряженный проектор, где  $1_n$  — единица  $M_n$ . Тогда  $\text{rk}(p) = \text{Trace}(p)$  делится на  $n = \text{rk}(1_n) = \text{Trace}(1_n)$ .

*Доказательство.* Рассмотрим одномерный ортогональный (самосопряженный) проектор  $e \in M_n$ . Тогда  $\varphi(e)$  — самосопряженный проектор в  $M_k$ . Его ранг не зависит от выбора  $e$ , поскольку любой другой  $e'$  равен  $u^* e u$  (по задаче 49), где  $u$  — унитарный, так что

$$\begin{aligned} \text{Trace}(\varphi(e')) &= \text{Trace}(\varphi(u^* e u)) = \text{Trace}(\varphi(u^*) \varphi(e) \varphi(u)) = \\ &= \text{Trace}(\varphi(u) \varphi(u^*) \varphi(e)) = \text{Trace}(\varphi(u u^* e)) = \text{Trace}(\varphi(e)). \end{aligned}$$

Если бы этот (один для всех) ранг был бы нулевой, то  $\varphi$  был бы нулевым. Значит, он равен  $s \geq 1$ . Рассмотрим теперь ортонормированный базис  $e_1, \dots, e_n$  (например, канонический) в  $\mathbb{C}^n$  и обозначим соответствующие одномерные ортопроекторы через  $[e_i]$ , так что  $[e_j][e_i] = 0$  при  $i \neq j$ . Тогда, поскольку  $\varphi([e_i])\varphi([e_j]) = \varphi([e_i e_j]) = 0$  при  $i \neq j$ , получаем

$$\text{Trace}(p) = \text{rk}(\varphi(1_n)) = \text{rk}(\varphi([e_1] \oplus \dots \oplus [e_n])) = \text{rk}(\varphi([e_1])) + \dots + \text{rk}(\varphi([e_n])) = sn.$$

□

**Определение 5.8.** Отношение  $s := \frac{\text{rk}(p)}{n}$  назовем *кратностью*  $\varphi$ .

Наряду со стандартным левым действием  $M_n$  на  $\mathbb{C}^n$  рассмотрим левое действие  $M_n$  на себе умножением, так что каноническое разложение

$$M_n \cong \underbrace{\mathbb{C}^n \oplus \dots \oplus \mathbb{C}^n}_{n \text{ раз}} = M_n[e_1] \oplus \dots \oplus M_n[e_n]$$

является разложением на простые модули (=неприводимые представления), где  $[e_i] \in M_n$  — ортогональный проектор на базисный вектор  $e_i$  стандартного базиса. По-другому можно записать  $[e_i] = e_i \otimes e_i^*$  (рассматривая матрицы как эндоморфизмы),

где  $e^*$  — эрмитово сопряженный функционал для  $e$ , так что  $[e_i]v = (e_i \otimes e_i^*)v = e_i(e_i, v)$ . Для разных векторов получаем матричную единицу  $e_{ij} = e_i \otimes (e_j)^*$ , так что  $[e_i] = e_{ii}$ .

**Лемма 5.9.** *Любой неприводимый левый модуль  $M$  в  $M_n$  имеет вид  $M_n(g \otimes f^*) = \mathbb{C}^n \otimes f^*$ , где  $g, f$  — единичные (можно взять) векторы.*

*Доказательство.* Для левого действия модуль  $M_n(g \otimes f^*) = \mathbb{C}^n \otimes f^*$  изоморфен  $\mathbb{C}^n$  со стандартным действием, а значит, неприводим. Поэтому, что если  $g \otimes f^* \in M$ , то  $M = M_n(g \otimes f^*)$ . Остается показать, что  $M$  содержит элемент вида  $g \otimes f^*$ . Но это — любой оператор ранга 1. Действительно, если  $a$  — оператор ранга 1, то надо взять в качестве  $f$  единичный вектор, перпендикулярный его ядру, а  $g = a(f)$ . Наконец, если  $M$  — ненулевой, и  $0 \neq b \in M$ , то выберем  $f \neq 0$  из его образа. Тогда  $(f \otimes f^*)b$  — оператор ранга 1 из  $M$ .  $\square$

**Теорема 5.10.** *Пусть  $\varphi$  — (унитальный)  $*$ -автоморфизм  $C^*$ -алгебры  $M_n$ . Тогда он является внутренним:  $\varphi(a) = vav^*$  для любого  $a$ , где  $v \in M_n$  — унитарный.*

*Доказательство.* Заметим, что  $\varphi$  является изоморфизмом  $M_n$  как левого модуля над  $M_n$  со стандартным действием  $a \cdot x$  и его же, как модуля с действием  $a * x = \varphi(a) \cdot x$ , поскольку  $\varphi(a \cdot x) = \varphi(a) \cdot \varphi(x) = a * \varphi(x)$ . Поскольку  $\varphi(M_n) = M_n$ , то инвариантные и неприводимые модули для обоих действий одни и те же (последние описываются леммой 5.9), и  $\varphi(\mathbb{C} \otimes e_i) = \mathbb{C} \otimes h_i$ , причем, поскольку автоморфизм переводит прямую сумму в прямую сумму, то  $h_i$  образуют базис в  $\mathbb{C}^n$  и, таким образом, определен изоморфизм  $u : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ ,  $u : e_i \rightarrow h_i$  (даже считая  $\|h_i\| = 1$ , то определенный однозначно только с точностью до умножения на диагональную матрицу из комплексных чисел, по модулю равных единице). Таким образом,  $\varphi(e_{ij}) = r_{ij} \otimes h_j$ , где  $r_{ij} \in \mathbb{C}^n$  — некоторые элементы. Аналогичное рассуждение с правыми модулями показывает, что  $\varphi(e_{ij}) = g_i \otimes (s_{ij})^*$ , где  $v : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ ,  $v : e_i \rightarrow g_i$  — изоморфизм, а  $s_{ij} \in \mathbb{C}^n$  — некоторые элементы. Из этих двух соотношений получаем, что  $\varphi(e_{ij}) = \lambda_{ij} g_i \otimes (h_j)^*$ , где  $\lambda_{ij}$  — некоторые числа. При этом (см. доказательство леммы 5.7)  $\varphi([e_i]) = \lambda_{ii} g_i \otimes (h_i)^*$  является самосопряженным проектором, так что  $h_i = \mu g_i$  и  $g_i = (\lambda_{ij} \bar{\mu})(g_i \otimes (g_i)^*)(g_i) = (\lambda_{ij} \bar{\mu})g_i$  и  $\lambda_{ij} \bar{\mu} = 1$ . Таким образом, можно считать, что  $h_i = g_i$ ,  $u = v$  и (новые)  $\lambda_{ij}$  удовлетворяют  $\lambda_{ii} = 1$  для любого  $i$ . При этом  $g_i$  образуют ортонормированный базис (см. доказательство леммы 5.7), так что  $u : e_i \mapsto g_i$  является унитарным. Из сохранения равенств  $e_{ij}e_{ji} = e_{ii} = [e_i]$  и  $e_{ij}^* = e_{ji}$  при гомоморфизме  $\varphi$  получаем, что  $\lambda_{ij}\lambda_{ji} = 1$ ,  $\overline{\lambda_{ij}} = \lambda_{ji}$ , так что, в частности,  $\lambda_{ij}$  — комплексные числа, по модулю равные 1.

Рассмотрим матрицу  $\Lambda = \|\lambda_{ij}\|$ . Переходя, если нужно, от векторов  $g_i$  к  $(\lambda_{1i})^{-1}g_i = \overline{\lambda_{1i}}g_i$  при  $i = 2, \dots, n$ , можем считать  $\lambda_{1i} = \lambda_{i1} = 1$  при  $i = 2, \dots, n$ . При этом образ  $\varphi(a)$  матрицы  $a = \|a_{ij}\|$  записывается относительно ортонормированного базиса  $\{g_i\}$  как  $\|\lambda_{ij}a_{ij}\|$ , а если матрица  $a$  была унитарная, то  $\varphi(a)$  тоже должна быть унитарной. Пусть некоторое  $\lambda_{ij} \neq 1$  (что возможно только при  $i \neq j$ ,  $i \neq 1$ ). Беря для этих  $i, j$  унитарную матрицу  $a$  с  $a_{1i} = 1/\sqrt{2}$ ,  $a_{1j} = 1/\sqrt{2}$ ,  $a_{ii} = 1/\sqrt{2}$ ,  $a_{ij} = -1/\sqrt{2}$  (и остальные в этих строках и столбцах, конечно, — нули), получим условие ортогональности этих строк в виде  $0 = (1/\sqrt{2} \cdot 1)(1/\sqrt{2} \cdot 1) + (-1/\sqrt{2} \cdot \lambda_{ij})(1/\sqrt{2} \cdot 1) = (1 - \lambda_{ij})/2$ , так что  $\lambda_{ij} = 1$ . Противоречие.

Итак, для любых  $i, j$  получаем, что  $\varphi(e_i \otimes (e_j)^*) = v(e_i) \otimes (v(e_j))^* = v \cdot (e_i \otimes (e_j)^*) \cdot v^*$ . Поскольку любая матрица является линейной комбинацией таких матричных единиц, то по линейности получаем требуемое равенство  $\varphi(a) = va v^*$ .  $\square$

**Лемма 5.11.** Пусть в условиях леммы 5.7 гомоморфизм  $\varphi$  является унитарным. Тогда  $\varphi$  определяется кратностью с точностью до унитарной эквивалентности (сопряжения) в  $M_k$ .

*Доказательство.* Пусть  $f_i^1, \dots, f_i^c$  — ортонормированный базис в образе проектора  $\varphi(e_i)$ ,  $s = 1, \dots, n$ . Обозначив  $[f_i^j]$  соответствующие одномерные попарно ортогональные проекторы, имеем  $\varphi(e_i) = [f_i^1] + \dots + [f_i^c]$ . Тогда  $\{f_i^j\}$ ,  $i = 1, \dots, n$ ,  $j = 1, \dots, c$ , — ортобазис  $\mathbb{C}^k$ ,  $1_k = \sum_{i,j} [f_i^j]$ . Если  $u \in M_k$  — унитарная матрица, переводящая  $\{f_i^j\}$  в канонический базис  $\mathbb{C}^k$ , причем  $u f_i^j = e_{(i-1)n+j}$ , то

$$(13) \quad [e_{(i-1)n+j}]x = e_{(i-1)n+j}(e_{(i-1)n+j}, x) = u f_i^j(u f_i^j, x) = u f_i^j(f_i^j, u^*x) = u[f_i^j]u^*x$$

для любого  $x \in \mathbb{C}^k$ . Поэтому

$$(14) \quad \varphi([e_i]) = [f_i^1] + \dots + [f_i^c] = \sum_{j=1}^c u^*[e_{(i-1)n+j}]u = u^* \left( \sum_{j=1}^c [e_{(i-1)n+j}] \right) u.$$

Таким образом,

$$(15) \quad u\varphi(a)u^* = \begin{pmatrix} \varphi_1(a) & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \varphi_c(a) \end{pmatrix} \text{ (блочно-диагональная матрица),}$$

где  $\varphi_i : M_n \rightarrow M_n$  — ненулевой гомоморфизм, а значит, изоморфизм ( $i = 1, \dots, c$ ). Поэтому к нему можно применить теорему 5.10 и найти такой унитарный  $v_i \in M_n$ , что  $\varphi_i(a) = v_i^* a v_i$ . Обозначив  $v = v_1 \oplus \dots \oplus v_c$  (унитарный элемент из  $M_k$ ), получаем, что тогда  $v u \varphi(a) u^* v^* = S_c(a)$  для любого  $a \in M_n$ , где  $S_c : M_n \rightarrow M_k$ ,  $k = cn$ , — стандартный гомоморфизм кратности  $c$ :

$$S_c(a) = \begin{pmatrix} a & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & a \end{pmatrix} \text{ (блочно-диагональная матрица с } c \text{ блоками, равными } a),$$

что и требовалось доказать.  $\square$

**Лемма 5.12.** Пусть  $\varphi$  — унитарный  $*$ -гомоморфизм конечномерной  $C^*$ -алгебры  $A = M_{n_1} \oplus \dots \oplus M_{n_k}$  в конечномерную  $C^*$ -алгебру  $B = M_{m_1} \oplus \dots \oplus M_{m_l}$ . Тогда  $\varphi$  задается (с точностью до унитарной эквивалентности в  $B$ ) некоторой  $l \times k$ -матрицей  $C = (c_{ij})$  с неотрицательными элементами, причем  $\sum_{j=1}^k c_{ij} n_j = m_i$ .

*Доказательство.* Пусть  $\epsilon_i : B \rightarrow M_{m_i}$  — канонический эпиморфизм, а  $\sigma_j : M_{n_j} \rightarrow A$  — каноническое вложение,  $i = 1, \dots, l$ ,  $j = 1, \dots, k$ . Тогда  $\epsilon_i \circ \varphi$  — унитарный гомоморфизм  $A$  в  $M_{m_i}$ . Пусть  $c_{ij}$  — кратность  $\varphi_{ij} = \epsilon_i \circ \varphi \circ \sigma_j : M_{n_j} \rightarrow M_{m_i}$  в смысле определения 5.8.

Заметим, что  $\sigma_j(1_{n_j})$  — попарно ортогональные самосопряженные проекторы в  $A$ , в сумме дающие единицу, так что  $p_{ij} := \varphi_{ij}(1_{n_j})$  — попарно ортогональные самосопряженные проекторы в  $M_{m_i}$ , в сумме дающие единицу. Поэтому, как и ранее, их прямая сумма унитарно эквивалентна при помощи  $u_i$  в  $M_{m_i}$  сумме соответствующих диагональных проекторов  $u_i p_{ij} u_i^*$ . Применяя лемму 5.11 к каждому из  $a \mapsto u_i \varphi_{ij}(a) u_i^*$ , получаем, что  $\epsilon_i \circ \varphi$  унитарно эквивалентен (в  $M_{m_i}$ ) гомоморфизму  $\text{id}_{n_1}^{c_{i1}} \oplus \dots \oplus \text{id}_{n_k}^{c_{ik}} = S_{c_{i1}} \oplus \dots \oplus S_{c_{ik}}$ . Сравнение размерностей дает равенство  $\sum_{j=1}^k c_{ij} n_j = m_i$ . Поскольку  $\varphi$  определяется прямой суммой  $\epsilon_i \circ \varphi$ ,  $i = 1, \dots, l$ , то утверждение доказано.  $\square$

**Задача 50.** Предположим, что в предыдущей лемме мы отказались от требования унитарности. Доказать аналог леммы в этом случае. Именно, взять вместо  $B$  подалгебру  $\varphi(A) = p\varphi(A)p$  в  $B$ , где  $p = \varphi(1_A)$ , применить предыдущую лемму к  $\varphi : A \rightarrow \varphi(A)$  и получить утверждение леммы с неравенствами  $\sum_{j=1}^k c_{ij} n_j \leq m_i$  вместо равенств.