Лекция 13 (14.12.2020)
Обсуждение программы и списка задач
Программа:

1. C*-алгебры – определение и примеры.
2. Присоединение единицы к C*-алгебре.
3. Спектр элемента C*-алгебры, его свойства.
4. Коммутативные C*-алгебры. Пространство максимальных идеалов. Преобразование Гельфанда.
5. Теорема Гельфанда о коммутативных C*-алгебрах.
6. Теорема Стоуна-Вейерштрасса.
7. C*-алгебра, порожденная нормальным элементом. Функциональное исчисление для нормальных операторов.
8. Положительные элементы, их свойства.
9. Аппроксимативные единицы, их существование.
10. Идеалы, фактор-алгебры, наследственные подалгебры.
11. Автоматическая непрерывность *-гомоморфизмов.
12. Алгебры фон Неймана. Теорема о бикоммутанте.
13. Топологически неприводимые представления.
14. Положительные функционалы, состояния.
15. ГНС-конструкция.
16. Реализация C*-алгебр как операторных алгебр (теорема Гельфанда-Наймарка).
17. Разложение Жордана.
18. Конечномерные линейные топологические пространства, единственность отделимой топологии.
19. Конечномерные C*-алгебры, их унитальность и структура.
20. Невырожденные представления.
21. Алгебра компактных операторов и ее свойства.
22. AF-алгебры, описание гомоморфизмов конечномерных алгебр, диаграммы Браттели.
23. Алгебры мультипликаторов и централизаторов.
24. Гильбертовы C*-модули и алгебры, с ними связанные.
25. Алгебра Калкина и ее свойства.

Дополнительный список задач (к сформулированным на лекциях)

(1) Пусть A — C^*-алгебра, $a \in A$, $p, q \in A$ — ортогональные проекторы (т.е. самосопряженные идемпотенты, удовлетворяющие $pq = 0$). Показать, что если a положителен и $pap = 0$, то $paq = 0$.

(2) Пусть A — C^*-алгебра, $a \in A$. Обозначим через aAa множество всех элементов вида aba, где $b \in A$, а через $\overline{aAa}$ — замыкание этого множества. C^*-подалгебра $B \subset A$ *наследственна*, если из условий $0 \leq a \leq b$ и $b \in B$ следует, что $a \in B$.
   (a) Проверить, что $\overline{aAa}$ — C^*-подалгебра для любого $a \in A$.
   (b) Пусть $p \in A$ — проектор. Проверить, что pAp замкнуто.
   (c) Показать, что pAp наследственна для любого проектора p.
   (d) Показать, что $\overline{aAa}$ наследственна для любого положительного $a \in A$.

(3) Пусть $X \subset \mathbb{R}$ — множество точек $1, 1/2, 1/3, \ldots$ и 0. Пусть $C(X, M_2)$ — множество всех непрерывных функций на X со значениями в матричной алгебре

M_2. Положим $B_1 = \{f \in C(X, M_2) : f(0)$ диагональна$\}$, $B_2 = \{f \in C(X, M_2) : f(0)$ имеет вид $\left(\begin{smallmatrix} * & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)\}$.

(a) Показать, что $C(X, M_2)$, B_1, B_2 — C^*-алгебры.

(b) Найти все (двухсторонние, замкнутые) идеалы в $C(X)$, $C(X, M_2)$, B_1, B_2.

(4) Пусть A — C^*-алгебра, $J \subset A$ — идеал, $a \in A$ — самосопряженный элемент. Показать, что существует такой $j \in J$, что $\|[a]\| = \|a - j\|$, где $[a] \in A/J$ — класс $a + J$ элемента a. Указание: разложить $a - \|[a]\| \cdot 1 = a_+ - a_-$ с положительными a_+, a_- и показать, что $a_+ \in J$.

(5) Пусть A — C^*-алгебра, $a \in A$ — самосопряженный элемент. Показать, что если спектр $\sigma(a)$ — бесконечное множество, то A бесконечномерна.

(6) Описать ГНС-конструкцию для C^*-алгебры $C[0, 1]$ и для положительного линейного функционала φ

(a) $\varphi(f) = f(0)$,

(b) $\varphi(f) = \frac{1}{2}(f(0) + f(1))$,

(c) $\varphi(f) = \int_0^1 f(x)\,dx$,

где $f \in C[0, 1]$.

(7) Описать ГНС-конструкцию для C^*-алгебры M_n комплексных $n{\times}n$-матриц и для положительного линейного функционала φ

(a) $\varphi(A) = a_{11}$,

(b) $\varphi(A) = \mathrm{tr}(A)$,

где $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n \in M_n$.

(8) Пусть π, σ — представления C^*-алгебры A в гильбертовых пространствах H_π и H_σ, и пусть частичная изометрия $U : H_\pi \to H_\sigma$ удовлетворяет равенству $\sigma(a)U = U\pi(a)$ для любого $a \in A$. Показать, что образ (соотв. ортогональное дополнение к ядру) U является инвариантным подпространством для $\sigma(A)$ (соотв. для $\pi(A)$). (U — частичная изометрия, если U^*U и UU^* являются проекторами)

(9) (a) Пусть $M_n(A)$ — множество всех $n{\times}n$-матриц с коэффициентами из C^*-алгебры A. Показать, что на $M_n(A)$ существует C^*-норма.

(b) Пусть A — C^*-алгебра с нормой $\|\cdot\|$, и пусть $\|\cdot\|'$ — другая норма на A, эквивалентная первой норме. Показать, что если $\|\cdot\|'$ — C^*-норма, то обе нормы совпадают. Вывести из этого единственность C^*-нормы на $M_n(A)$.

(10) Пусть φ — состояние на C^*-алгебре A. Предположим, что для некоторого самосопряженного элемента $a \in A$ выполнено равенство $\varphi(a^2) = \varphi(a)^2$. Показать, что из этого следует, что $\varphi(ab) = \varphi(ba) = \varphi(a)\varphi(b)$ для любого $b \in A$.

(11) Пусть $A = c$ — C^*-алгебра сходящихся последовательностей комплексных чисел, $c = \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} : a_n \in \mathbb{C}; \lim_{n\to\infty} a_n$ существует$\}$. Рассмотрим ее как C^*-подалгебру алгебры $\mathbb{B}(l_2)$ ограниченных операторов гильбертова пространства l_2 суммируемых с квадратом последовательностей. Найти первый и второй коммутант, A' и A'', и (независимо) слабое замыкание A в $\mathbb{B}(l_2)$.

(12) (a) Показать, что слабая топология строго слабее сильной топологии.

(b) Пусть $P \subset \mathbb{B}(H)$ — множество всех (самосопряженных) проекторов в гильбертовом пространстве. Показать, что ограничения слабой и сильной топологии на P совпадают.

(c) Показать, что сильный предел последовательности (самосопряженных) проекторов является проектором.

(13) Пусть $H_n \subset H$ — подпространство гильбертова пространства H, порожденное первыми n векторами ортонормированного базиса. В множестве всех последовательностей $(m_1, m_2, \ldots)$, где $m_k \in \mathbb{B}(H_n) \subset \mathbb{B}(H)$, рассмотрим подмножество A всех таких последовательностей, что

- $\sup_k \|m_k\| < \infty$;
- последовательности $(m_1, m_2, \ldots)$ и $(m_1^*, m_2^*, \ldots)$ являются сходящимися в сильной топологии.

Показать, что A — C^*-алгебра, и что отображение $(m_1, m_2, \ldots) \mapsto$ $s\text{-}\lim_{k\to\infty} m_k \in \mathbb{B}(H)$ является сюръективным $*$-гомоморфизмом $A \to \mathbb{B}(H)$.

(14) Пусть A — коммутативная C^*-алгебра, π — ее неприводимое представление в гильбертовом пространстве H. Показать, что $\dim H = 1$.

(15) Пусть $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ — ортонормированный базис гильбертова пространства H, и пусть операторы a, b задаются равенствами $ae_i = e_{2i}$; $be_i = e_{2i-1}$. Пусть $E = C^*(a,b) \subset \mathbb{B}(H)$ — C^*-алгебра, порожденная a и b.

(a) Проверить ограниченность a и b и доказать равенства $a^*a = b^*b = 1$, $aa^* + bb^* = 1$.

(b) Доказать, что E не изоморфна полной групповой C^*-алгебре $C^*(G)$ ни для какой группы G.

(16) Рассмотрим $C[0,1]$ как C^*-подалгебру в $\mathbb{B}(H)$, где $H = L^2([0,1])$ (непрерывные функции действуют на H умножением).

(a) Проверить, что $C[0,1] \cap \mathbb{K}(H) = 0$;

(b) Пусть φ — линейный функционал на $C[0,1]$, определенный равенством $\varphi(f) = f(0)$, $f \in C[0,1]$. Найти такую слабо сходящуюся к нулю в H последовательность $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ векторов единичной длины, что выполняется $\varphi(f) = \lim_{n\to\infty}\langle fe_n, e_n\rangle$ для любой функции $f \in C[0,1]$.

(17) Операторы a, b в гильбертовом пространстве H называются *компалентными*, если существует такой унитарный оператор $u \in \mathbb{B}(H)$, что $u^*au - b \in \mathbb{K}(H)$. Показать, что самосопряженные операторы a, b компалентны тогда и только тогда, когда совпадают их существенные спектры.

(18) Показать, что любая AF C^*-алгебра без единицы имеет аппроксимативную единицу, состоящую из возрастающей последовательности проекторов.

(19) (a) Показать, что $C[0,1]$ не является AF-алгеброй.

(b) Построить инъективный $*$-гомоморфизм $C[0,1]$ в AF-алгебру $C(K)$ непрерывных функций на Канторовом множестве K. Указание: построить функцию f на K, принимающую все рациональные значения из $[0,1]$ и показать, что $C^*(f)$ изометрично $*$-изоморфна $C(\mathrm{Sp}(f)) = C[0,1]$.

(20) Пусть $A_n = M_{2^n}(\mathbb{C}) \oplus M_{2^n}(\mathbb{C})$, а вложение $\alpha_n : A_n \to A_{n+1}$ задано формулой

$\alpha_n : \left(\begin{smallmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{smallmatrix}\right) \mapsto \left(\begin{array}{cc|cc} a_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & a_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_2 \end{array}\right)$, где $a_1, a_2 \in M_{2^n}(\mathbb{C})$.

(a) Определить диаграмму Браттели для AF-алгебры $A = \overline{\cup_{n=1}^{\infty} A_n}$;

(b) Выяснить, есть ли в A единица.

(21) Найти $M(A)$, где $A = \{f \in C([0,1]; M_2) : f(0)_{11} = f(0)_{12} = f(0)_{21} = 0; f(1) = 0\}$ (здесь M_2 — алгебра двумерных матриц).