Лекция 1 (20.09.2021)

1. C^*-алгебры (основные определения, присоединение единицы, обратимые элементы)

Определение 1.1. *Алгеброй* A (над полем $\mathbb{K}$) называется кольцо, являющееся линейным пространством над $\mathbb{K}$, причем сложение в определении кольца и в определении линейного пространства одно и то же, а умножения связаны соотношением $\lambda(ab) = (\lambda a)b$ для всяких $\lambda \in \mathbb{K}$, $a, b \in A$.

Мы будем рассматривать алгебры только над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$.

Определение 1.2. Алгебра A над $\mathbb{C}$ называется *банаховой алгеброй*, если подлежащее линейное пространство является банаховым пространством и $\|ab\| \leq \|a\|\|b\|$ для любых $a, b \in A$.

Задача 1 (легкая)**.** Покажите, что в этом случае умножение непрерывно (как отображение $A \times A \to A$) .

Определение 1.3. Отображение $* : A \to A$, $a \mapsto a^*$ называется *инволюцией*, если

(1) $(a^*)^* = a$;
(2) $(a + b)^* = a^* + b^*$;
(3) $(\lambda a)^* = \bar{\lambda} a^*$;
(4) $(ab)^* = b^* a^*$;
(5) $\|a^*\| = \|a\|$

для любых $a, b \in A$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Банахова алгебра с инволюцией называется *инволютивной банаховой алгеброй.*

Определение 1.4. Инволютивная банахова алгебра A называется *C^*-алгеброй,* если инволюция удовлетворяет равенству $\|a^*a\| = \|a\|^2$ для всех $a \in A$ (это равенство называется *C^*-свойством*).

Задача 2. Привести пример инволютивной банаховой алгебры, не являющейся C^*-алгеброй.

Задача 3 (легкая)**.** Показать, что свойство (5) определения 1.3 следует из свойств (1 – 4) и C^*-свойства.

Определение 1.5. Элемент $1 \in A$ называется (левой) *единичным*, если $1a = a$ для любого $a \in A$. C^*-алгебра A называется *унитальной* млм *алгеброй с единицей*, если у нее имеется (левый) единичный элемент.

Задача 4. Показать, что левый единичный элемент является и правым, что $1^* = 1$, что единичный элемент единствен и что $\|1\| = 1$. Он называется *единицей алгебры.*

Задача 5. Проверьте, что алгебра $C(X)$, образованная всеми непрерывными комплекснозначными функциями на компактном пространстве X и алгебра $C_0(X)$ всех непрерывных комплекснозначных функций на локально компактном пространстве X, стремящихся к 0 на бесконечности (то есть таких $f : X \to \mathbb{C}$, что для любого $\varepsilon > 0$ существует такой компакт $K \subseteq X$, что $\sup\{|f(x)| \mid x \in K\} < \varepsilon$) являются коммутативными C^*-алгебрами, если в качестве нормы берется супремум-норма: $\|f\| = \sup_{x \in X} |f(x)|$, а в качестве умножения — поточечное умножение. При этом алгебра $C(X)$ имеет единицу.

Задача 6. Проверьте, что алгебра $\mathbb{B}(H)$ всех ограниченных операторов, действующих в гильбертовом пространстве H, является C^*-алгеброй с единицей. Здесь в качестве нормы берется *операторная норма* $\|a\| = \sup_{h\in H,\, \|h\|\le 1} \|a(h)\|$, а умножение — композиция операторов.

Эти примеры C^*-алгебр являются важнейшими, как мы увидим дальше.

1.1. **Унитализация, или присоединение единицы.** Если у инволютивной банаховой алгебры A нет единицы, то можно ее вложить в инволютивную банахову алгебру A следующим образом. Положим $A^+ = A \oplus \mathbb{C}$ как линейное пространство. Определим структуру инволютивной банаховой алгебры на A^+ формулами

$$
\begin{aligned}
(a,\lambda)(b,\mu) &= (ab+\lambda b+\mu a, \lambda\mu),\\
(a,\lambda)^* &= (a^*, \bar\lambda),\\
\|(a,\lambda)\| &= \|a\| + |\lambda|
\end{aligned}
\tag{1}
$$

для любых $(a,\lambda),(b,\mu) \in A\oplus\mathbb{C}$.

Далее считаем, что исходная алгебра A является C^*-алгеброй.

Задача 7. Показать, что эта норма превращает A^+ в инволютивную банахову алгебру, но не C^*-алгебру. (Для проверки полноты воспользуйтесь полнотой подпространства $A \subset A^+$ конечной (единичной) коразмерности.)

Определение 1.6. Подалгебра $I \subseteq A$ называется (двусторонним) *идеалом*, если $aI \subseteq I$ и $Ia \subseteq I$ для любого $a \in A$.

Задача 8. Доказать, что A — идеал в A^+.

Лемма 1.7. *На A^+ имеется норма, которая*

1) *эквивалентна определенной выше;*
2) *на A совпадает с исходной нормой:*
3) *является C^*-нормой.*

Доказательство. Для $b = (b',\lambda) \in A^+$ рассмотрим линейное отображение $L_b : A \to A$ по формуле $L_b(a) = ba$, $a \in A$. Для L_b, таким образом, можно определить операторную норму: $\|L_b\| := \sup_{a\in A,\, \|a\|\le 1} \|L_b(a)\|$. Если $b \in A$, то $\|L_b\| \le \|b\|$. Поскольку $\|L_b(b^*)\| = \|bb^*\| = \|b\|^2$, то $\|L_b\| = \|b\|$. Для всякого $b = (b',\lambda) \in A^+$ положим $\|b\|_{new} = \|L_b\|$. Заметим, что проведенное рассуждение показывает, что $\|.\|_{new}$ удовлетворяет условию 2) из формулировки леммы.

Прежде всего, проверим $\|\cdot\|_{new}$ является нормой, а не только полунормой на линейном пространстве (что очевидно). Пусть $\|b\|_{new} = 0$ для некоторого $b = (b',\lambda) \in A^+$. Это означает, что $(b',\lambda)\cdot(a,0) = (b'a+\lambda a, 0) = (0,0)$ для любого $a \in A$, так что $-\frac{1}{\lambda}b'\cdot a = a$ и $-\frac{1}{\lambda}b'$ является единицей A. Но у A нет единицы. Значит, $\|\cdot\|_{new}$ — норма. Как всякая операторная норма, новая норма — норма на банаховой алгебре, то есть

$$\|bc\|_{new} \le \|b\|_{new}\|c\|_{new} \tag{2}$$

для любых $b, c \in A^+$ (Легкая задача: проверьте это). Пока мы не утверждаем, что инволюция является изометрией.

Эта новая норма эквивалентна определенной ранее норме на A^+, поскольку $A \subset A^+$ является подпространством коразмерности 1. Действительно, по неравенству треугольника, имеем $\|(a,\lambda)\|_{new} \le \|a\| + |\lambda| = \|(a+\lambda)\|$, так что достаточно показать, что найдется такая константа $c > 0$, что $\|(a,\lambda)\|_{new} \ge c\|(a,\lambda)\|$. Предположим противное: существуют такие пары (a_n, λ_n) и числа $c_n > 0$, что $\lim_{n\to\infty} c_n = 0$ и

$$\|(a_n,\lambda_n)\|_{new} \le c_n \|(a_n,\lambda_n)\|.$$

Поскольку ни одно λ_n не равно нулю, мы можем предположить (поделив, при необходимости, обе стороны на $\lambda_n \neq 0$), что $\lambda_n = 1$. Снова применяя неравенство треугольника, получаем

$$\|a_n\| - 1 \le \|(a_n, 1)\|_{new} \le c_n(\|a_n\| + 1),$$

откуда $\|a_n\| \le \frac{1+c_n}{1-c_n}$, и для достаточно больших n имеем $\|a_n\| < 2$. Но тогда для этих n имеем $\|(a_n,1)\|_{new} \le 3c_n$, так что

$$\lim_{n\to\infty} (a_n, 1) = 0. \tag{3}$$

Теперь вспомним, что $A^+/A \cong \mathbb{C}$, а все нормы на $\mathbb{C}$ эквивалентны (более того, они отличаются лишь постоянным множителем). Таким образом, фактор-норма на A^+/A, задаваемая $\|(a,\lambda) + A\|_{new} := \inf_{a\in A} \|(a,\lambda)\|_{new}$ эквивалентна обычной норме на $\mathbb{C}$. Значит, $\inf_{a\in A} \|(a,1)\|_{new} = \alpha > 0$, что противоречит (3).

Теперь нам надо проверить C^*-свойство. По определению, для любого $b \in A^+$ и любого $\epsilon > 0$ найдется такой элемент $a \in A$, что $\|a\| = 1$ и

$$\|L_b(a)\| \ge (1-\epsilon)\|L_b\|, \qquad \text{то есть} \qquad \|ba\|_{new} = \|ba\| \ge (1-\epsilon)\|b\|_{new}.$$

Также имеем

$$\|b^*b\|_{new} \ge \|a^*(b^*b)a\|_{new} = \|a^*(b^*b)a\| = \|(ba)^*(ba)\| = \|ba\|^2 \ge (1-\epsilon)^2\|b\|^2_{new}$$

(где первое неравенство выполнено в силу (2), следующее равенство — в силу того, что A является идеалом в A^+, а дальше применяем C^*-свойство в A). Переходя к пределу при ϵ, стремящемся к нулю, получаем $\|b^*b\|_{new} \geqslant \|b\|^2_{new}$. В частности, $\|b^*\|_{new} \cdot \|b\|_{new} \geqslant \|b^*b\|_{new} \geqslant \|b\|^2_{new}$, так что $\|b^*\|_{new} \geqslant \|b\|_{new}$. Поэтому $\|b\|_{new} = \|(b^*)^*\|_{new} \geqslant \|b^*\|_{new}$. Таким образом, инволюция является изометрией и, по (2), $\|b^*b\|_{new} \leqslant \|b^*\|_{new}\|b\|_{new} = \|b\|^2_{new}$. Значит, это — C^*-норма. □

Определение 1.8. Элемент $a \in A$ называется *самосопряженным*, если $a^* = a$, *унитарным*, если $a^*a = 1$ (тут алгебра A предполагается унитальной), *нормальным*, если $a^*a = aa^*$.

Определение 1.9. В унитальной C^*-алгебре элемент a называется *обратимым*, если существует такой элемент $a' \in A$, что $aa' = a'a = 1$. Элемент a' с таким свойством единствен (проверьте!) и обозначается через a^{-1}. Множество обратимых элементов $G(A)$ является группой.

Задача 9. Проверьте это.

Лемма 1.10. *Если $\|1-a\| < 1$, то a^{-1} существует и равен $a' = \sum_{n=0}^{\infty}(1-a)^n$, причем ряд сходится по норме.*

Доказательство. Сходимость сразу следует из оценки через геометрическую прогрессию. Далее вычисляем: $a'a = aa' = -(1-a)a' + a' = -\sum_{n=1}^{\infty}(1-a)^n + \sum_{n=0}^{\infty}(1-a)^n = 1$. □

Задача 10. Доказать аналогичным образом, что если $a_0 \in A$ обратим и $\|a - a_0\| < \frac{1}{\|a_0^{-1}\|}$, то a тоже обратим, причем $a^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty}[a_0^{-1}(a_0 - a)]^n a_0^{-1}$.

Следствие 1.11. *Подмножество $G(A) \subset A$ является открытым множеством. Взятие обратного элемента $a \mapsto a^{-1}$ является непрерывным отображением $G(A)$ в себя.*

Задача 11. Докажите следствие, используя установленные выше формулы.