Лекция 4 (11.10.2021)

Следствие 3.3 (непрерывное функциональное исчисление)**.** *Пусть a — нормальный элемент C^*-алгебры A с единицей, а f — непрерывная функция на* $\mathrm{Sp}(a)$. *Тогда элемент $f(a) \in A$ определяется как прообраз f при преобразовании Гельфанда: $\Gamma = \Gamma_a : C^*(1, a) \to C(\mathrm{Sp}(a))$, $f(a) := (\Gamma_a)^{-1}(f)$. Если $0 \in \mathrm{Sp}(a)$ и $f(0) = 0$, то $f(a) \in C^*(a)$. Кроме того, $f(\mathrm{Sp}(a)) = \mathrm{Sp}(f(a))$ и если g — непрерывная функция на $f(\mathrm{Sp}(a))$, то $g(f(a)) = (g \circ f)(a)$.*

Доказательство. Всё уже было доказано, кроме последнего утверждения. Рассмотрим сначала многочлен $p(\lambda, \bar{\lambda})$ в качестве $f = f(\lambda)$. Тогда $\Gamma(p(a, a^*))$ — функция $\lambda \mapsto p(\lambda, \bar{\lambda})$, так что $\mathrm{Sp}(p(a, a^*))$ совпадает с множеством значений этой функции, $\{\mu : \mu = p(\lambda, \bar{\lambda}), \lambda \in \mathrm{Sp}(a)\}$. Приближая f многочленами, получаем $f(\mathrm{Sp}(a)) = \mathrm{Sp}(f(a))$ (задача 28).

Аналогично, рассмотрим многочлен $q(\lambda, \bar{\lambda})$ в качестве g. Легко увидеть, что

$$q(f(a)) = \lim_{\alpha}(q(p_\alpha(a)) = \lim_{\alpha}(q \circ p_\alpha)(a) = (q \circ f)(a).$$

Теперь приближаем g многочленами и пользуемся изометричностью обратного преобразования Гельфанда. □

Задача 28. Доказать, что $f(\mathrm{Sp}(a)) = \mathrm{Sp}(f(a))$ в доказательстве выше, приближая f многочленами, и правильно сформулировав, что значит, что образ непрерывен при равномерном приближении, и пользуясь изометричностью преобразования Гельфанда.

Следствие 3.4. *Если a — нормальный элемент, то $\|a\| = r(a)$.*

Доказательство. $\|a\| = \|\hat{a}\| = \sup_{\varphi \in M_A} |\hat{a}(\varphi)| = \sup_{\lambda \in \mathrm{Sp}(a)} |\lambda| = r(a)$. □

3.1. **Положительные элементы.**

Определение 3.5. Самосопряженный элемент a в C^*-алгебре A с единицей называется *положительным,* если $\mathrm{Sp}(a) \subset [0, \infty)$. Если у A нет единицы, то a называется *положительным,* если он положителен в A^+.

Положительность записывается как $a \geqslant 0$. Для двух самосопряженных элементов $a, b \in A$ мы говорим, что $a \geqslant b$, если $a - b \geqslant 0$.

Задача 29. Показать, что если $a \geqslant 0$ и $0 \geqslant a$, то $a = 0$; а также, что $-\|a\|1 \leqslant a \leqslant \|a\|1$ для всякого самосопряженного a.

Теперь рассмотрим другие применения непрерывного функционального исчисления к положительности.

Следствие 3.6. *Пусть $a \in A$ — положительный элемент. Тогда существует единственный положительный квадратный корень b из a, то есть такой $b \geqslant 0$, что $b^2 = a$.*

Доказательство. Функция $f(z) = \sqrt{z}$ определена и непрерывна на $[0, \infty)$, поэтому $b = f(a)$ определен. Он самосопряжен и даже положителен (поскольку f отображает $[0, \infty)$ в себя) и $b^2 = f(a)^2 = a$ (по следствию 3.3). Если c — другой положительный квадратный корень из a, то $c = f(c^2) = f(a) = b$. □

Следствие 3.7. *Пусть $a \in A$ — самосопряженный элемент. Тогда имеются такие положительные элементы $a_+, a_- \in A$, что $a = a_+ - a_-$ и $a_+ a_- = 0$.*

Доказательство. Определим непрерывную функцию $f : \mathbb{R} \to [0, +\infty)$, положив $f(x) = x$ при $x \geq 0$ и $f(x) = 0$ при $x < 0$. Обозначим $g(x) = f(-x)$. Эти функции удовлетворяют $f(x) - g(x) = x$ и $f(x)g(x) = 0$. Остается положить $a_+ = f(a)$, $a_- = g(a)$. □

Следствие 3.8. *Для самосопряженного элемента $a \in A$ следующие условия эквивалентны:*

(i) $a \geqslant 0$;
(ii) $a = b^2$ *для некоторого самосопряженного* b;
(iii) $\|\mu 1 - a\| \leqslant \mu$ *для всякого* $\mu \geqslant \|a\|$;
(iv) $\|\mu 1 - a\| \leqslant \mu$ *для некоторого* $\mu \geqslant \|a\|$.

Доказательство. По доказанному, из (i) следует (ii). Кроме того, из (iii) следует (iv) по очевидным соображениям.

Покажем, что из (ii) следует (iii). По предположению, $a = f(b)$, где $f(x) = x^2$. При этом норма f на $\mathrm{Sp}(b)$ равна $\|a\|$, так что $0 \leqslant \mu - x^2 \leq \mu$ при любом $\mu \geqslant \|a\|$ и $x \in \mathrm{Sp}(b)$. Поскольку $\mu 1 - a = (\mu - f)(b)$, то $\|(\mu - f)(b)\|$ равняется норме $\mu - f$ на $\mathrm{Sp}(b)$, которая не превосходит μ.

Покажем наконец, что из (iv) следует (i). Поскольку для некоторого $\mu \geqslant \|a\|$ выполнено $\|\mu - x\| = \sup_{x \in \mathrm{Sp}(a)} |\mu - x| \leqslant \mu$, то ни одно $x \in \mathrm{Sp}(a)$ не может быть отрицательным. □

Следствие 3.9. *Если a и b положительны, то и $a + b$ положителен.*

Доказательство. Выберем некоторые $\mu \geqslant \|a\|$, $\nu \geqslant \|b\|$. Тогда $\|a + b\| \leqslant \mu + \nu$ и по пункту (iii) следствия 3.8

$$\|(\mu + \nu)1 - (a + b)\| = \|(\mu 1 - a) + (\nu 1 - b)\| \leqslant \|\mu 1 - a\| + \|\nu 1 - b\| \leqslant \mu + \nu.$$

Поэтому по пункту (iv) следствия 3.8, $a + b$ положителен. □

Следующее предложение 3.11 практически очевидно для операторов в гильбертовом пространстве, но весьма нетривиально для элементов C^*-алгебры. Нам понадобится следующий результат о спектрах произведений.

Лемма 3.10. *Если $a, b \in A$, то $\mathrm{Sp}(ab) \cup \{0\} = \mathrm{Sp}(ba) \cup \{0\}$.*

Доказательство. Пусть $0 \neq \lambda \notin \mathrm{Sp}(ab)$. Это значит, что $(ab - \lambda 1) = -\lambda(1 - \lambda^{-1}ab)$ обратим, так что существует такой элемент $u \in A$, что $(1 - \lambda^{-1}ab)u = 1$. Положим $v = 1 + \lambda^{-1}bua$. Тогда

$$(1 - \lambda^{-1}ba)v = (1 - \lambda^{-1}ba)(1 + \lambda^{-1}bua) = 1 - \lambda^{-1}ba + \lambda^{-1}bua - \lambda^{-2}babua =$$

$$= 1 - \lambda^{-1}ba + \lambda^{-1}b(1 - \lambda^{-1}ab)ua = 1 - \lambda^{-1}ba - \lambda^{-1}ba = 1,$$

так что $\lambda \notin \mathrm{Sp}(ba)$. □

Предложение 3.11. *Элемент a^*a положителен при всяком $a \in A$.*

Доказательство. Поскольку a^*a самосопряжен, мы можем расписать $a^*a = b_+ - b_-$ по следствию 3.7. Положим $c := \sqrt{b_-}$, $t := ac$. Заметим, что $f(0) = 0$ для $f(x) = \sqrt{x}$, так что c приближается многочленами от b_- без свободного члена, а значит, $cb_+ = 0$. Имеем:

$$-t^*t = -c(b_+ - b_-)c = b_-^2.$$

Следовательно, $-t^*t$ положителен.

Запишем t в виде $t = x + iy$, где x и y самосопряженные элементы A (то есть $x = (t + t^*)/2$, $y = (t - t^*)/2i$). Тогда $t^*t + tt^* = 2(x^2 + y^2)$ является положительным по следствию 3.9. По тому же следствию, видим, что элемент

$$tt^* = (t^*t + tt^*) - t^*t = (t^*t + tt^*) + b_-^2$$

также положителен, то есть $\mathrm{Sp}(tt^*) \subset [0, \infty)$. По лемме 3.10, $\mathrm{Sp}(t^*t) \subset [0, \infty)$, так что t^*t положителен. Но он и отрицателен, поэтому $t^*t = 0$. Значит, $b_- = 0$, поскольку положительный квадратный корень единствен. $\square$

Следствие 3.12. *Если $b \leqslant c$, то $a^*ba \leqslant a^*ca$ для любого $a \in A$.*

Доказательство. Поскольку $c - b$ положителен, то $c - b = d^2$ для некоторого самосопряженного d; поэтому $a^*(c - b)a = a^*d^2a = (da)^*(da) \geqslant 0$. $\square$

Следствие 3.13. *Если a и b обратимы и $0 \leqslant a \leqslant b$, то $b^{-1} \leqslant a^{-1}$.*

Доказательство. Рассмотрим сначала частный случай $b = 1$. Тогда $\mathrm{Sp}(a) \subseteq [0, 1]$. По теореме об отображении спектра, мы видим, что $\mathrm{Sp}(a^{-1}) \subseteq [1, \infty)$, так что $a^{-1} \geqslant 1$. Перейдем к общему случаю. Поскольку, по следствию 3.12, $b^{-1/2}ab^{-1/2} \leqslant 1$, то $b^{1/2}a^{-1}b^{1/2} \geqslant 1$. Умножая это неравенство на $b^{-1/2}$ с обеих сторон и снова применяя следствие 3.12, получаем $a^{-1} \geqslant b^{-1}$. $\square$

3.2. **Аппроксимативные единицы.** Пусть Λ — направленное множество. Семейство $(u_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ элементов C^*-алгебры A называется *аппроксимативной единицей,* если $\lim_\Lambda \|xu_\lambda - x\| = 0$ для $x \in A$ (и, следовательно, $\lim_\Lambda \|u_\lambda x - x\| = 0$). Если A имеет единицу, то можно взять $u_\lambda = 1$ для любого λ, так что это понятие представляет интерес только для алгебр без единицы. В определение аппроксимативной единицы также включают условия $0 \leqslant u_\lambda \leqslant 1$ and $u_\lambda \leqslant u_\mu$ при всяких $\lambda \leqslant \mu$ из Λ.

Теорема 3.14. *У любой C^*-алгебры имеется аппроксимативная единица.*

Доказательство. Положим $\Lambda = \{a \in A \mid a \geqslant 0; \|a\| < 1\}$. Порядок на Λ задается $\leqslant$. Покажем, что множество элементов Λ, индексированное тавтологическим образом (a имеет индекс a), является аппроксимативной единицей.

Прежде всего, надо проверить, что Λ является направленным множеством, то есть, что для любых двух элементов $a, b \in \Lambda$ найдется такой $c \in \Lambda$, что $a \leqslant c$ и $b \leqslant c$. Пусть $f(t) := \frac{t}{1-t}$ и $g(t) := \frac{t}{1+t}$. При этом функция f определена на $[0, 1)$, функция g — на $[0, \infty)$ и $g(f(t)) = t$. Положим $x := f(a)$, $y := f(a) + f(b)$, $c := g(y)$. Поскольку $0 \leqslant g(t) < 1$, то $c \in \Lambda$. Из неравенства $x \leqslant y$ следует $1 + x \leqslant 1 + y$, так что $(1 + x)^{-1} \geqslant (1 + y)^{-1}$ и

$$a = 1 - (1 + x)^{-1} \leqslant 1 - (1 + y)^{-1} = c.$$

Аналогично получается $b \leqslant c$, и направленность множества Λ проверена.

Теперь проверим, что $\lim_\Lambda \|x-ax\| = 0$ для всякого $x \in A$. Поскольку по следствию 3.7 каждый элемент разлагается в линейную комбинацию четырех положительных

$$(6)\quad x = \frac{x+x^*}{2} + i\frac{x-x^*}{2i} = \left(\frac{x+x^*}{2}\right)_+ - \left(\frac{x+x^*}{2}\right)_- + i\left(\frac{x-x^*}{2i}\right)_+ - i\left(\frac{x-x^*}{2i}\right)_-,$$

то достаточно проверить утверждение для $x \geqslant 0$. Поскольку для $a \in \Lambda$ имеем $0 \leqslant 1-a \leqslant 1$, то по следствию 3.12, $(1-a)^{1/2}(1-a)(1-a)^{1/2} \leqslant (1-a)^{1/2}(1-a)^{1/2} = 1-a$. Поэтому

$$\|(1-a)x\|^2 = \|x^*(1-a)^2x\| \leqslant \|x^*(1-a)x\|,$$

и достаточно проверить, что $\lim_\Lambda \|x(1-a)x\| = 0$ для любого $x \geqslant 0$ из A, причем без ограничения общности можно считать, что $\|x\| = 1$.

Аналогично предыдущему рассуждению, если $a, b \in \Lambda$ и $a \leqslant b$ то $\|x^*(1-b)x\| \leq \|x^*(1-a)x\|$, так что, при $x \geqslant 0$,

$$\sup_{b\in\Lambda,\, b\geqslant a} \|x(1-b)x\| = \|x(1-a)x\|.$$

Поэтому нам нужно показать, что для любого положительного $x \in A$ нормы один и любого $\varepsilon > 0$ найдется такой элемент $a \in \Lambda$, что $\|x^*(1-a)x\| < \varepsilon$. Положим $a_n := g(nx)$, $n \in \mathbb{N}$ (см. начало доказательства). Тогда $\|x(1-a_n)x\| = \|h(x)\|$, где $h(t) := t^2(1-g(nt)) = \frac{t^2}{1+nt}$. Для любого $t \in [0,1]$ выполняется $0 \leqslant h(t) \leqslant \frac{1}{n}$, так что $\|h(x)\| \leqslant \frac{1}{n}$. Следовательно,

$$\sup_{b\in\Lambda,\, b\geqslant a_n} \|x(1-b)x\| = \|x(1-a_n)x\| \leqslant \frac{1}{n}$$

для любого n, поэтому $\lim_{b\in\Lambda} \|x(1-b)x\| = 0$. □

Определение 3.15. Аппроксимативная единица называется *счетной,* если множество Λ счетно.

Следствие 3.16. *У сепарабельной C^*-алгебры имеется счетная аппроксимативная единица.*

Доказательство. Выберем плотную последовательность $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in A. Тогда найдется такой $a_1 \in A$, $0 \leqslant a_1$, $\|a_1\| < 1$, что $\|x_1a_1 - x_1\| \leqslant 1$ (см. доказательство предыдущей теоремы). Предположим по индукции, что мы уже нашли такие $a_2, \dots, a_n$, $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \dots \leqslant a_n$, что для всех $k = 1, 2, \dots, n$ выполнено $\|a_k\| < 1$ и $\|x_ia_k - x_i\| \leqslant \frac{1}{k}$ при $i = 1, 2, \dots, k$. Теперь найдем такой элемент $a_{n+1} \geqslant a_n$ с нормой $\|a_{n+1}\| < 1$, что $\|x_ia_{n+1} - x_i\| \leqslant \frac{1}{n+1}$ при $i = 1, 2, \dots, n+1$. Поскольку последовательность (x_n) плотна в A, то по индукции получаем такую неубывающую последовательность $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ положительных элементов единичного шара, что $\lim_{n\to\infty} \|xa_n - x\| = 0$ для каждого $x \in A$. □

Задача 30. Доказать, что обратное неверно: алгебра со счетной аппроксимативной единицей не обязана быть сепарабельной.