

Лекция 5 (18.10.2021)

3.3. Идеалы, факторы и гомоморфизмы. Под *идеалом* C^* -алгебры мы всегда будем подразумевать двусторонний идеал, замкнутый по норме (для максимальных идеалов в коммутативном случае это получалось автоматически).

Лемма 3.17. *Всякий идеал I в C^* -алгебре является самосопряженным: $I = I^*$.*

Доказательство. Если $I \subset A$ — идеал, то $B := I \cap I^* \subseteq A$ является C^* -подалгеброй. При этом $B \supset I \cdot I^*$. Пусть (u_λ) — аппроксимативная единица в B , а $j \in I$. Тогда

$$\lim_{\lambda \in \Lambda} \|j^* u_\lambda - j^*\|^2 = \lim_{\lambda \in \Lambda} \|u_\lambda(jj^* u_\lambda - jj^*) - (jj^* u_\lambda - jj^*)\| \leq 2 \lim_{\lambda \in \Lambda} \|jj^* u_\lambda - jj^*\| = 0.$$

Поскольку $u_\lambda \in I$, то $j^* u_\lambda \in I$, так что $j^* \in I$, поскольку I замкнут. \square

Лемма 3.18. *Если $x^*x \leq a$ в A , то существует такой $b \in A$, что $\|b\| \leq \|a\|^{1/4}$ и $x = ba^{1/4}$.*

Доказательство. Положим $b_n := x(a + \frac{1}{n}1)^{-1/2}a^{1/4}$ (этот элемент лежит в A , даже если у A нет единицы, но нам удобно в этом случае производить вычисления в A^+). Пусть также

$$d_{nm} := \left(a + \frac{1}{n}1\right)^{-1/2} - \left(a + \frac{1}{m}1\right)^{-1/2}, \quad f_n(t) := t^{3/4} \left(t + \frac{1}{n}\right)^{-1/2}.$$

Тогда последовательность функций $(f_n(t))$ сходится к $f(t) := t^{1/4}$ равномерно на $[0, \|a\|]$, поскольку в силу $u^2 + v^2 \geq 2uv$ имеем

$$\begin{aligned} \left(t^{1/4} \left(1 - \frac{t^{1/2}}{(t + 1/n)^{1/2}}\right)\right)^2 &= t^{1/2} \frac{t + 1/n + t - 2t^{1/2}(t + 1/n)^{1/2}}{t + 1/n} < \\ &< t^{1/2} \frac{t + 1/n + t - 2t}{t + 1/n} = t^{1/2} \frac{1/n}{t + 1/n} = \frac{2\sqrt{t/n}}{t + 1/n} \cdot \frac{1}{2\sqrt{n}} \leq \frac{1}{2\sqrt{n}}. \end{aligned}$$

Значит,

$$\begin{aligned} \|b_n - b_m\|^2 &= \|x d_{nm} a^{1/4}\|^2 = \|a^{1/4} d_{nm} x^* x d_{nm} a^{1/4}\| \leq \|a^{1/4} d_{nm} a d_{nm} a^{1/4}\| = \\ &= \|d_{nm} a^{3/4}\|^2 = \|f_n(a) - f_m(a)\|^2 = \sup_{t \in [0, \|a\|]} |f_n(t) - f_m(t)|. \end{aligned}$$

Таким образом, поскольку f_n — последовательность Коши, то и b_n — тоже. Положим $b := \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$. Тогда $ba^{1/4} = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n a^{1/4} = \lim_{n \rightarrow \infty} x(a + \frac{1}{n}1)^{-1/2} a^{1/2} = x$. \square

Определение 3.19. Подалгебра $B \subset A$ называется *наследственной*, если для любых положительных $b \in B$ и $a \in A$, из условия $0 \leq a \leq b$ следует, что $a \in B$.

Задача 31. Доказать, что положительный элемент произвольной C^* -подалгебры является положительным элементом всей алгебры.

Лемма 3.20. *Пусть $I \subset A$ — идеал, а $j \in I$ — положительный элемент. Если $a^*a \leq j$, то $a \in I$. В частности, любой идеал — наследственная подалгебра.*

Доказательство. Разложим $a = bj^{1/4}$ в соответствии с леммой 3.18. При этом $j^{1/4} \in C^*(j) \subset I$, а значит, $a \in I$. \square

Если $I \subset A$ — идеал, то можно определить банахову фактор-алгебру A/I с нормой $\|a+I\| := \inf_{j \in I} \|a+j\|$. Это — инволютивная алгебра: так как I — самосопряженный, то $\|(a+I)^*\| = \|a^*+I\| = \|a+I\|$. Для краткости будем обозначать $a+I$ через $\dot{a} \in A/I$.

Лемма 3.21. *Инволютивная алгебра A/I является C^* -алгеброй.*

Доказательство. Необходимо проверить только C^* -свойство. Пусть $(u_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ — аппроксимативная единица I (заметим, что идеалы, как правило, не имеют единицы, и уж во всяком случае, собственный идеал не содержит единицу A , даже если таковая имеется). Покажем прежде всего, что

$$(7) \quad \|\dot{a}\| = \lim_{\lambda \in \Lambda} \|a - au_\lambda\|.$$

Действительно, поскольку $u_\lambda \in I$, то $\|\dot{a}\| \leq \|a - au_\lambda\|$. Для доказательства обратного неравенства выберем произвольно $\varepsilon > 0$. Тогда найдется такой элемент $j \in I$, что $\|\dot{a}\| \geq \|a - j\| - \varepsilon$. Имеем

$$\lim_{\lambda \in \Lambda} \|a - au_\lambda\| \leq \lim_{\lambda \in \Lambda} \|a - au_\lambda - (j - ju_\lambda)\| + \|j - ju_\lambda\| = \lim_{\lambda \in \Lambda} \|a - au_\lambda - (j - ju_\lambda)\|.$$

Записывая в A^+ , где имеет место $a - au_\lambda - (j - ju_\lambda) = (a - j)(1 - u_\lambda)$, получаем оценку $\|(a - j)(1 - u_\lambda)\| \leq \|a - j\| < \|\dot{a}\| + \varepsilon$. В силу произвольности $\varepsilon > 0$ получаем (7).

Теперь, вычисляя в A^+ , находим оценку

$$\begin{aligned} \|\dot{a}^* \dot{a}\| &= \lim_{\lambda \in \Lambda} \|a^* a (1 - u_\lambda)\| \geq \lim_{\lambda \in \Lambda} \|(1 - u_\lambda) a^* a (1 - u_\lambda)\| = \\ &= \lim_{\lambda \in \Lambda} \|(a(1 - u_\lambda))^2\| = \|\dot{a}\|^2. \end{aligned}$$

Обратное неравенство $\|\dot{a}^* \dot{a}\| \leq \|\dot{a}\|^2$ верно в любой инволютивной банаховой алгебре. \square

Определение 3.22. Пусть A и B — C^* -алгебры. Назовем $*$ -гомоморфизмом из A в B любой гомоморфизм φ , сохраняющий инволюцию: $\varphi(a^*) = \varphi(a)^*$. Если обе алгебры имеют единицу, то φ называется *унитальным*, если $\varphi(1_A) = 1_B$.

Задача 32. Пусть $\varphi : A \rightarrow B$ — $*$ -гомоморфизм алгебр без единицы. Доказать, что существует единственный унитальный $*$ -гомоморфизм $\varphi^+ : A^+ \rightarrow B^+$, продолжающий φ . Указание: единственная возможность для определения φ^+ заключается в требовании унитальности: $\varphi^+(1) = 1$.

Задача 33. Пусть $\varphi : A \rightarrow B$ — $*$ -гомоморфизм алгебр, причем A без единицы, а B — с единицей. Доказать, что существует единственный унитальный $*$ -гомоморфизм $\varphi^{(+)} : A^+ \rightarrow B$, продолжающий φ . Указание — то же, что и выше.

Теорема 3.23. Пусть $\varphi : A \rightarrow B$ — ненулевой $*$ -гомоморфизм. Тогда $\|\varphi\| = 1$ (в частности, он непрерывен) и $\varphi(A)$ является C^* -подалгеброй B . Если φ инъективен, то он является изометрическим (на образ).

Доказательство. Если у алгебры A нет единицы, то будем рассматривать φ^+ из задачи 32 или $\varphi^{(+)}$ из задачи 33. Если у алгебры A есть единица, то можем считать, что и у B — тоже есть (если нет — то присоединим, не требуя унитальности гомоморфизма). При этом $\varphi(1_A) = p$ — самосопряженный идемпотент ($p^2 = p$), пространство $B_p := pBp$ — подалгебра B (см. задачу 34) с единицей $p = p \cdot 1_B \cdot p$, а φ , рассматриваемый как гомоморфизм в B_p , является унитальным.

Таким образом, при доказательстве можем ограничиться случаем унитарного гомоморфизма $\varphi : A \rightarrow B$ алгебр с единицей.

Чтобы различать спектр элемента в A и B , будем записывать Sp_A (соотв., Sp_B) для спектра элементов в A (соотв., в B).

Пусть $a = a^* \in A$. Тогда $\text{Sp}_B(\varphi(a)) \subset \text{Sp}_A(a)$, поскольку φ является унитарным $*$ -гомоморфизмом алгебр и $\|\varphi(a)\| = r(\varphi(a)) \leq r(a) = \|a\|$. Для элемента $a \in A$ общего вида имеем $\|\varphi(a)\|^2 = \|\varphi(a^*a)\| \leq \|a^*a\| = \|a\|^2$, так что $\|\varphi\| \leq 1$, то есть φ непрерывен и не увеличивает норму.

Предположим теперь, что φ инъективен, но не изометричен. Тогда найдется такой элемент $a \in A$, что $\|\varphi(a)\| < \|a\|$. Значит, $\|\varphi(b)\| < \|b\|$ при $b := a^*a$. Обозначим $\|\varphi(b)\| =: r$ и $\|b\| =: s$. Пусть p — непрерывная вещественная функция, который удовлетворяет условиям $p(t) = 0$ при $t \in [0, r]$ и $p(s) = 1$. Тогда $\|\varphi(p(b))\| = \|p(\varphi(b))\| = \sup_{\lambda \in \text{Sp}_B(\varphi(b))} |p(\lambda)| = 0$, в то время как $\|p(b)\| = \sup_{\lambda \in \text{Sp}_A(b)} |p(\lambda)| \geq 1$. Противоречие с инъективностью. (Условие коммутирования очевидно для многочленов, p_n , равномерно приближающих p , а в пределе получаем для p .)

В случае общего (не обязательно инъективного) $*$ -гомоморфизма, заметим, что $I = \text{Ker } \varphi$ замкнут, поскольку φ непрерывен, так что I — идеал в A . Поэтому φ индуцирует инъективный $*$ -гомоморфизм $\dot{\varphi} : A/I \rightarrow B$ по правилу $\dot{\varphi}(\dot{a}) = \varphi(a)$. Тогда, по доказанному, $\dot{\varphi}$ является изометрическим, а $\varphi(A) = \dot{\varphi}(A/I)$ замкнута в B , так что является C^* -подалгеброй. Поскольку φ — ненулевой, то имеется $a \in A$ с $\varphi(a) \neq 0$. В силу изометричности $\dot{\varphi}$, имеем равенство $\|\dot{a}\| = \|\dot{\varphi}(\dot{a})\| = \|\varphi(a)\|$. При этом для любого $\varepsilon > 0$ найдется такой элемент $c \in A$, что $\dot{c} = \dot{a}$ и $\|c\| < \|\dot{a}\| + \varepsilon$. Значит, $\|\varphi(c)\| > \|c\| - \varepsilon$. В силу произвольности ε , получаем $\|\varphi\| \geq 1$, так что $\|\varphi\| = 1$. \square

Задача 34. Доказать, что алгебра B_p замкнута, получив предварительно равенство $pBp = \text{Ker}(L_{1-p}) \cap \text{Ker}(R_{1-p})$, где L_{1-p} и R_{1-p} — линейные операторы левого и правого умножения на $1 - p$ в B , заданные $L_{1-p} : b \mapsto (1 - p)b$ и $R_{1-p} : b \mapsto b(1 - p)$.

Задача 35. Развить результат предыдущей задачи, проверив разложение в прямую сумму замкнутых подпространств $B = pBp \oplus pB(1 - p) \oplus (1 - p)Bp \oplus (1 - p)B(1 - p)$, причем, если записывать четверку (a, b, c, d) , представляющую элемент данной прямой суммы в виде матрицы $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, то умножение в B перейдет при изоморфизме в умножение матриц по стандартному правилу.

Задача 36. Вывести из теоремы 3.23 утверждение $\varphi(f(a)) = f(\varphi(a))$ для любого нормального a и непрерывной на нужном множестве f (а не только для многочлена).

Задача 37. Продумать доказательство теоремы 3.23 через редукцию к отображению коммутативных подалгебр.

Следствие 3.24. Пусть $I \subset A$ — идеал, а $B \subset A$ — C^* -подалгебра. Тогда $I + B$ совпадает с C^* -подалгеброй $C^*(I, B)$, порожденной I и B .

Доказательство. Очевидно, что $I + B \subset C^*(I, B)$ и является инволютивной подалгеброй. Пусть $q : A \rightarrow A/I$ — $*$ -гомоморфизм факторизации. Мы знаем из предыдущей теоремы, что $q(B)$ замкнут в A/I , так что $I + B = q^{-1}(q(B))$ замкнуто в A . Значит, $I + B$ является C^* -алгеброй, содержащейся в $C^*(I, B)$. \square

До сих пор мы проявляли большую осторожность при рассмотрении спектра элемента в C^* -алгебре и ее C^* -подалгебре. Следующая лемма показывает, что это не так важно.

Лемма 3.25. Пусть $B \subset A$ — C^* -подалгебра с единицей C^* -алгебры с единицей, причем $1_A = 1_B$, $a \in B$. Тогда $\text{Sp}_B(a) = \text{Sp}_A(a)$.

Доказательство. Очевидно, что если элемент имеет обратный в B , то и в A тоже, откуда $\text{Sp}_A(a) \subset \text{Sp}_B(a)$. Обратное включение следует из утверждения, что если a обратим в A , то его обратный принадлежит B . Чтобы доказать это, рассмотрим сначала случай $a = a^*$. Тогда C^* -алгебра $C = C^*(a, a^{-1})$, порожденная a и a^{-1} , является коммутативной унитарной C^* -подалгеброй A , а значит, она изоморфна некоторой алгебре функций $C(X)$. Пусть \hat{a} обозначает образ a при этом изоморфизме. Тогда $0 \notin \text{Sp}_{C(X)}(\hat{a}) \subset \mathbb{R}$. Выберем такие многочлены p_n , что $p_n(t)$ сходится равномерно к t^{-1} на $\text{Sp}_{C(X)}(\hat{a})$. Тогда $\widehat{a^{-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} p_n(\hat{a})$, так что $a^{-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} p_n(a) \in C^*(a) \subset B$.

Для элемента a общего вида, если a^{-1} существует в A , то $a^{-1}(a^*)^{-1} = (a^*a)^{-1} \in B$ по доказанному. Поэтому $a^{-1} = (a^*a)^{-1}a^* \in B$. \square

Задача 38. Показать на примере, что без условия $1_A = 1_B$ предыдущая теорема не имеет места.