Лекция 8 (08.11.2021)

Лемма 4.16. *Пусть $a \in A$ — самосопряженный элемент. Тогда имеется такое состояние φ на A, что $|\varphi(a)| = \|a\|$.*

Доказательство. Если A без единицы, то будем работать в A^+. Рассмотрим коммутативную C^*-алгебру $C^*(a)$. Тогда найдется такой мультипликативный линейный функционал φ_0 на $C^*(a)$, что $|\varphi_0(a)| = \|a\|$ (надо взять в качестве φ_0 отображение взятия значения в той точке $\mathrm{Sp}(a)$, где функция $\hat{a}$ достигает своего максимума). Тогда $\varphi_0(1) = 1 = \|\varphi_0\|$. Рассмотрим продолжение φ_0 по теореме Хана-Банаха до функционала φ на A^+. Тогда, поскольку $\|\varphi\| = 1 = \varphi(1)$, то φ — состояние по лемме 4.15. □

Следствие 4.17. *Для любого $a \in A$ существуют такие представление π и единичный вектор ξ в пространстве представления, что $\|\pi(a)\xi\| = \|a\|$.*

Доказательство. По предыдущей лемме, найдем такое состояние φ, что $\varphi(a^*a) = \|a\|^2$. Пусть $\pi = \pi_\varphi$ и $\xi = \xi_\varphi$ получены для φ по ГНС-конструкции. Тогда $\|\pi(a)\xi\|^2 = (\xi, \pi(a^*a)\xi) = \varphi(a^*a) = \|a\|^2$. □

Теорема 4.18 (Гельфанда-Наймарка)**.** *Любая C^*-алгебра изометрически $*$-изоморфна C^*-подалгебре $\mathbb{B}(H)$ для некоторого гильбертова пространства H. Если A сепарабельна, то и H может быть выбрано сепарабельным.*

Доказательство. Положим $\pi = \oplus_\varphi \pi_\varphi$, где прямая сумма берется по всем состояниям A. Точнее, рассматривается гильбертова прямая сумма $H := \oplus_\varphi H_\varphi$ (пополнение по ℓ_2 норме пространства финитных отображений $\varphi \mapsto h_\varphi \in H_\varphi$, то есть наборов $h = \{h_\varphi\}$, $h_\varphi \in H_\varphi$, причем лишь конечное число h_φ отлично от нуля, а норма определяется как $\|h\|^2 = \sum_\varphi \|h_\varphi\|^2$) с диагональным действием $\pi(a)(\{h_\varphi\}) = \{\pi_\varphi(a)(h_\varphi)\}$. Тогда, как видно из доказательства предыдущего следствия, $\|\pi(a)\| = \sup_\varphi \|\pi_\varphi(a)\| = \|a\|$. Если же A сепарабельна, то достаточно брать сумму по счетному набору φ_n, где $\pi_{\varphi_n}(a_n)\| = \|a_n\|$, для элементов a_n, образующих плотное подмножество в A. Тогда $\pi = \oplus_{n\in\mathbb{N}} \pi_{\varphi_n}$, а соответствующее гильбертово пространство сепарабельно, поскольку каждое H_{φ_n} сепарабельно (как пополнение фактора сепарабельного пространства). □

Определение 4.19. Построенное в теореме (в первой ее части) представление называется *универсальным представлением* A. Алгебра фон Неймана $\pi(A)''$, где π — универсальное представление, содержит $\pi(A) \cong A$ в качестве плотного подмножества и называется *обертывающей алгеброй фон Неймана* для A.

4.4. **Разложение Жордана.**

Лемма 4.20. *Пусть φ — линейный функционал на A. Тогда $\varphi = \psi_1 + i\psi_2$, где ψ_1 и ψ_2 — самосопряженные.*

Доказательство. Положим, как делали и для элементов алгебры, $\psi_1(a) = (\varphi(a) + \overline{\varphi(a^*)})/2$ и $\psi_2(a) = (\varphi(a) - \overline{\varphi(a^*)})/2i$. □

Обозначим через A_{sa} множество всех самосопряженных элементов A. Тогда, очевидно, что A_{sa} является вещественным банаховым пространством.

Задача 44. Имеется естественная биекция между самосопряженными линейными функционалами на A и (вещественными) линейными функционалами на A_{sa}.

Для доказательства теоремы о разложении Жордана нам понадобится следующее утверждение, представляющее самостоятельный интерес.

Теорема 4.21 (о продолжении положительных функционалов)**.** *Пусть $B \subset A$ — C^*-подалгебра, а $\varphi : B \to \mathbb{C}$ — положительный функционал. Тогда найдется такой положительный функционал $\varphi' : A \to \mathbb{C}$, что $\varphi'|_B = \varphi$ и $\|\varphi'\| = \|\varphi\|$.*

Доказательство. Возможны следующие случаи:

a) обе алгебры имеют общую единицу,
b) A имеет единицу, а B — нет,
c) обе алгебры не имеют единицы,
d) B имеет единицу, а A — нет.
e) обе алгебры с 1, но $1_A \neq 1_B$.

В силу следствия 4.14, (c) и (b) сводятся присоединением единицы к (a) (для (b) нужно заметить, что $B^+ \cong B \oplus \mathbb{C}\, 1_A$). В свою очередь, (d), очевидно, сводится к (e).

В случае (a) продолжим по теореме Хана-Банаха φ до некоторого $\varphi' : A \to \mathbb{C}$ той же нормы. Тогда по лемме 4.10, $\|\varphi'\| = \|\varphi\| = \varphi(1) = \varphi'(1)$ и φ' — положительный по лемме 4.15.

В случае (e) рассмотрим C^*-подалгебру $B_1 := B \oplus \mathbb{C}\, 1_A = B \oplus \mathbb{C}\,(1_A - 1_B)$ и продолжим φ до $\varphi_1 : B_1 \to \mathbb{C}$, положив $\varphi_1(1_A - 1_B) = 0$. Тогда $\varphi_1(a) = \varphi(1_B \cdot a)$, где $a \in B_1$. Действительно, если $a \in B$, то $\varphi_1(a) = \varphi(1_B \cdot a) = \varphi(a)$, а если $a = 1_A - 1_B$, то $\varphi_1(a) = \varphi(1_B(1_A - 1_B)) = \varphi(0) = 0$. При этом единица B_1 — это 1_A. Кроме того, $\|\varphi_1\| \leqslant \|\varphi\| \cdot \|1_B\| = \|\varphi\|$, а $\varphi_1(1_A) = \varphi(1_B) = \|\varphi\|$. Значит, $\|\varphi_1\| = \|\varphi\| = \varphi_1(1_A) = \varphi_1(1_{B_1})$ и, по лемме 4.15, φ_1 — положительный. Таким образом, случай (e) тоже свелся к доказанному случаю (a). □

Теорема 4.22 (Разложение Жордана)**.** *Пусть ψ — самосопряженный линейный функционал на A с нормой, не превосходящей* 1*. Тогда $\psi = \varphi_1 - \varphi_2$, где φ_1 и φ_2 — положительные линейные функционалы на A с нормами, не превосходящими* 1.

Доказательство. Обозначим через K множество всех самосопряженных линейных функционалов нормы $\leqslant 1$, допускающих разложение, требуемое в формулировке леммы. Тогда K — непустое, выпуклое и ограниченное. Предположим противное: $\psi \notin K$. Тогда, по теореме Хана-Банаха, найдутся такие $x \in A_{sa}$ и $\alpha \in \mathbb{R}$, что $\psi(x) > \alpha$ и $\varphi(x) \leqslant \alpha$ для любого $\varphi \in K$, в частности, для любого состояния. Поскольку K симметрично, то

$$|\varphi(x)| \leqslant \alpha \text{ для любого } \varphi \in K. \tag{11}$$

Тогда $\|x\| \leqslant \alpha$. Действительно, предположим противное и рассмотрим $C^*(x) \subset A$. Тогда

$$\|x\| = \sup\{|\varphi(x)| : \varphi \text{ мультипликативен}\} \leqslant \sup\{|\varphi(x)| : \|\varphi\| \leqslant 1,\ \varphi \text{ положителен}\}.$$

Значит, из нашего предположения следует, что $|\varphi(x)\| > \alpha$ для некоторого положительного функционала на $C^*(x) \subset A$ с нормой $\|\varphi\| \leqslant 1$. По теореме 4.21, найдется продолжение φ до положительного функционала φ' на A нормы $\leqslant 1$ (в частности, $\varphi' \in K$), причем $|\varphi'(x)| > \alpha$. Это противоречит (11). Значит, $\|x\| \leqslant \alpha$. Но тогда не может быть $\psi(x) > \alpha$, поскольку $\|\psi\| \leqslant 1$. Таким образом, предположение о существовании такого неразложимого ψ было неверным. □

4.5. **Линейные топологические пространства.**

Определение 4.23. Подмножество M линейного пространства называется *уравновешенным*, если для любого $v \in M$ вектор λv принадлежит M при любом $|\lambda| \leqslant 1$. В частности, M — звездное относительно нуля пространства.

Определение 4.24. Подмножество M линейного пространства называется *поглощающим*, если для любого вектора v пространства найдется такое число $\alpha > 0$, что $v \in \beta M$ при $|\beta| \geqslant \alpha$.

Определение 4.25. Линейное пространство, снабженное топологией, называется *линейным топологическим пространством* (ЛТП), если операции линейного пространства непрерывны.

В основном курсе функционального анализа доказываются следующие несложные утверждения (см. Колмогоров и Фомин, 1982, гл. III, §5):

Предложение 4.26. *1). База ЛТП состоит из сдвигов окрестностей нуля.*

2). Любой вектор ЛТП и не содержащее его замкнутое множество имеют непересекающиеся окрестности.

Определение 4.27. ЛТП L удовлетворяет *условию гомотетии*, если для любой окрестность нуля W ее гомотетия λW — тоже окрестность нуля для любого $\lambda \neq 0$ из основного поля.

Замечание 4.28. Очевидно, что топология нормированного пространства удовлетворяет условию гомотетии.

Предложение 4.29. *Для любой окрестности нуля U ЛТП L с условием гомотетии существует уравновешенная окрестность, в ней содержащаяся.*

Доказательство. Рассмотрим непрерывное отображение $\mathbb{C} \times L \to L$ (умножение), отображающее $(0, 0_L) \mapsto 0_L$. Тогда, в силу непрерывности, найдутся такие $\delta > 0$ и окрестность нуля W, что $\lambda W \subseteq U$ при $|\lambda| \leqslant \delta$ (добиться нестрогого неравенства можно, уменьшив δ из стандартного определения). Положим $W' := \cup_{0<|\lambda|\leqslant 1} \lambda W$. В силу 4.27, это W' — искомое. $\square$

Замечание 4.30. На самом деле, можно доказать, что базу окрестностей нуля ЛТП L можно выбрать из поглощающих уравновешенных множеств, а также, что условие гомотетии фактически не является условием, но нам это не понадобится.

Нам понадобится следующий важный результат.

Теорема 4.31. *Пусть L — конечномерное пространство,* $\dim L = n$. *Тогда любая отделимая топология τ, превращающая L в линейное топологическое пространство L_τ с условием гомотетии, совпадает с топологией евклидовой нормы $\|v\|^2 = \sum_{i=1}^n |v^i|^2$, где $e_1, \ldots, e_n$ — некоторый базис L, а $v = v^1 e_1 + \cdots v^n e_n$.*

Доказательство. Пространство L с евклидовой (или унитарной) топологией будем обозначать L_u, а окрестности нуля двух топологий — через T и U, соответственно.

Рассмотрим произвольную T. Тогда найдется такая окрестность T_0, что $T_0 + \cdots + T_0 \subset T$ (n слагаемых) в силу непрерывности операции сложения. Для каждого k найдется такое $\varepsilon_k > 0$, что $v^k e_k \in T_0$ при $|v_k| < \varepsilon_k$ $(k = 1, \ldots, n)$. Пусть $\varepsilon := \min_k \varepsilon_k$, а

$U := \{v \in L \mid \|v\| < \varepsilon\}$. Тогда $v^k e_k \in T_0$ для любого $v \in U$ и любого $k = 1, \ldots, n$. Значит, $U \subset T$. Из доказанного, в частности, следует, что тождественное отображение $\iota : L_u \to L_\tau$ является непрерывным.

Обратно, пусть U — произвольная окрестность, можно считать, что $U = B(0, \varepsilon)$ — открытый шар радиуса ε с границей (сферой) S, являющейся компактным множеством. Тогда $S = \iota(S)$ компактно в L_τ. Значит, оно замкнуто, поскольку топология отделима. Тогда найдется звездная окрестность нуля T (например, уравновешенная), не пересекающаяся с S в силу предложений 4.26 и 4.29. При этом $T \subseteq U$, поскольку иначе существует такой вектор $v \in T$, что $\|v\| \geqslant \varepsilon$, и если положить $\alpha := \varepsilon / \|v\|$, $w := \alpha v$, то $\alpha \leqslant 1$, так что $w \in T$ в силу звездности. Но $\|w\| = \varepsilon$, так что $w \in T \cap S$. Противоречие. $\square$