Лекция 9 (15.11.2021)

4.6. **Конечномерные C^*-алгебры.** Рассмотрим $*$-слабую топологию на A, задаваемую системой полунорм $a \mapsto |\varphi(a)|$ для всех линейных функционалов φ. Из леммы 4.20 и теоремы 4.22 следует, что ту же топологию можно получить, ограничиваясь только полунормами, связанными с состояниями.

Заметим также, что соответствующее ЛТП обладает свойством гомотетии 4.27.

Лемма 4.32. *Конечномерная C^*-алгебра всегда имеет единицу.*

Доказательство. Если A конечномерна, то топология нормы совпадает с $*$-слабой топологией по теореме 4.31. Пусть u_n — аппроксимативная единица алгебры A. Тогда для любого состояния φ последовательность $\varphi(u_n)$ является неубывающей и ограниченной. Поэтому u_n сходится в $*$-слабой топологии, а значит, и по норме. Таким образом, имеется предел $\lim_n u_n = a$. Тогда $ax = xa = x$ для любого $x \in A$, так что $a = 1$. □

Лемма 4.33. *Пусть $I \subset A$ — идеал в конечномерной C^*-алгебре A. Тогда $I = Ap$ для некоторого центрального проектора (=идемпотента из центра) p.*

Доказательство. Поскольку I конечномерен, то унитален по лемме 4.32. Пусть $p \in I$ — единица I. Тогда для всякого $x \in A$ выполняется $xp \in I$, так что $p(xp) = xp$. Поэтому $px^*p = x^*p$ для любого $x \in A$, откуда $xp = pxp = px$ и p принадлежит центру A. Очевидно, что $p^2 = p$. □

Лемма 4.34. *Простая конечномерная C^*-алгебра A изометрически $*$-изоморфна матричной алгебре M_n для некоторого n.*

Доказательство. Прежде всего, заметим, что $aAb \neq 0$ для любых ненулевых $a, b \in A$. Действительно, AaA является ненулевым идеалом (так как A с единицей и $0 \neq a = 1 \cdot a \cdot 1 \in A$), так что в силу простоты, $AaA = A$. Поэтому $1 = \sum_i x_i a y_i$ и $b = \sum_i x_i a y_i b$. Поэтому, если $ayb = 0$ для любого $y \in A$, то $b = \sum_i x_i(ay_ib) = 0$, что противоречит предположению.

Пусть B — некоторая максимальная коммутативная подалгебра A. Тогда она может быть отождествлена с $C(X) = \mathbb{C}^n = \mathbb{C} \cdot e_1 \oplus \ldots \oplus \mathbb{C} \cdot e_n$ для некоторого n, где X состоит из n точек, а $e_i \in B$ обозначает элемент, соответствующий характеристической функции в точке i. При этом e_i являются проекторами с соотношениями $e_ie_j = 0$ для $i \neq j$ и $\sum_{i=1}^n e_i = 1$. Поскольку $e_iAe_i \cdot e_j = e_j \cdot e_iAe_i = 0$ а B максимальная, то $e_iAe_i \subset B$. Поэтому $e_iAe_i = \mathbb{C} \cdot e_i$ (поскольку, очевидно, $0 \neq e_iAe_i \ni e_i$, или можно воспользоваться утверждением из начала доказательства).

Для любых i, j найдется такой $x \in A$, что $x = e_ixe_j \neq 0$, $\|x\| = 1$. Действительно, в силу утверждения из начала доказательства, $e_iAe_j \neq 0$, так что имеется $x = e_iye_j$ с $\|x\| = 1$. При этом $e_ixe_j = e_ie_iye_je_j = e_iye_j = x$. Тогда $x^*x = e_jx^*e_ie_ixe_j \in e_jAe_j$, а значит, по доказанному, имеет вид αe_j, $\alpha \in \mathbb{C}$. Так как x^*x — положительный элемент, по норме равный единице, то $\alpha = 1$, так что $x^*x = e_j$. Аналогично, $xx^* = e_i$. Обозначим такой x для $j = 1$ через u_i, так что $u_i^*u_i = e_1$, $u_iu_i^* = e_i$, $i = 1, \ldots, n$. Положим $u_{ij} := u_iu_j^*$. При этом $u_ie_1u_i^* = u_iu_i^*u_iu_i^* = e_ie_i = e_i$, так что $u_{ij}u_{ji} = u_iu_j^*u_ju_i^* = u_ie_1u_i^* = e_i$. Также $e_ju_{ji} = u_ju_j^*u_ju_i^* = u_je_1u_i^* = u_ju_i^*u_iu_i^* = u_{ji}e_i$, и $e_iu_{ij} = u_iu_i^*u_iu_j^* = u_ie_1u_j^* = u_iu_j^*u_ju_j^*$

Если $x \in e_iAe_j$, то есть $x = e_iae_j$, то $xu_{ji} = e_iae_ju_{ji} = e_iau_{ji}e_i \in e_iAe_i$, так что $xu_{ji} = \lambda e_i$ для некоторого $\lambda \in \mathbb{C}$. Тогда $x = xe_j = xu_{ji}u_{ij} = \lambda e_iu_{ij} = \lambda u_{ij}$, так что для любого $x \in A$ существует такое число $\lambda_{ij}(x) \in \mathbb{C}$, что $e_ixe_j = \lambda_{ij}(x)u_{ij}$. Таким образом, $x = \sum_{i,j} e_ixe_j = \sum_{ij} \lambda_{ij}(x)u_{ij}$. Соответствие $x \mapsto (\lambda_{ij}(x))$ определяет изоморфизм $\kappa : A \to M_n$ (задача 45). □

Задача 45. Проверить биективность и необходимые алгебраические свойства κ.

Теорема 4.35. *Если A конечномерна, то $A = \oplus_k Ap_k$, где p_k — центральные проекторы, а каждая Ap_k — матричная алгебра $M_{n(k)}$.*

Доказательство. Для простой алгебры результат следует из леммы 4.34. Если A не является простой, то $I = Ap$ по лемме 4.33, где p — центральный проектор. Тогда $A = I \oplus J$, где $J := A(1-p)$. Тогда J — тоже идеал, поскольку $(1-p)$ — тоже центральный проектор, так что $A(1-p)A = AA(1-p) \subseteq A(1-p)$. При этом центр A, будучи конечномерной коммутативной алгеброй, изоморфен $\mathbb{C}^m$ (функциям на конечном множестве), а проекторам соответствуют характеристические функции. Далее рассуждаем по индукции, уменьшая размерность, пока не придем к сумме простых алгебр. □

4.7. **Невырожденные представления.**

Определение 4.36. Пусть π — представление C^*-алгебры A в гильбертовом пространстве H. Обозначим через $\pi(A)H$ (возможно незамкнутое) линейное пространство конечных линейных комбинаций вида $\sum_i \pi(a_i)\xi_i$, где $a_1, \ldots, a_n \in A$, $\xi_1, \ldots, \xi_n \in H$. Представление π называется *невырожденным*, если $\pi(A)H$ плотно в H.

Задача 46. Если у A есть единица, то π является невырожденным тогда и только тогда, когда $\pi(1) = 1$.

Лемма 4.37. *Пусть $I \subset A$ — идеал, а π — невырожденное представление I в гильбертовом пространстве H. Тогда существует и единственно продолжение π до представления $\tilde{\pi}$ всей алгебры A в H.*

Доказательство. Определим $\tilde{\pi}$ сначала на векторах из плотного подпространства $\pi(I)H \subset H$ формулой

$$\tilde{\pi}(a)\left(\sum_i \pi(j_i)\xi_i\right) := \sum_i \pi(aj_i)\xi_i. \tag{12}$$

Определение корректно, поскольку, если $\sum_i \pi(j_i)\xi_i = \sum_i \pi(j_i')\xi_i'$, то

$$\tilde{\pi}(a)\left(\sum_i \pi(j_i)\xi_i\right) = \lim_{\lambda\in\Lambda} \tilde{\pi}(a)\left(\sum_i \pi(u_\lambda j_i)\xi_i\right) = \lim_{\lambda\in\Lambda} \pi(au_\lambda)\left(\sum_i \pi(j_i)\xi_i\right)$$

и, аналогично, $\tilde{\pi}(a)(\sum_i \pi(j_i')\xi_i') = \lim_{\lambda\in\Lambda} \pi(au_\lambda)(\sum_i \pi(j_i')\xi_i')$, где $u_\lambda \in I$ — аппроксимативная единица I. Заметим, что существование последних пределов в цепочке следует из существования предпоследних — то есть, тем самым, для каждого из двух случаев обосновывается отдельно. Поскольку

$$\begin{aligned}\left\|\tilde{\pi}(a)\left(\sum_i \pi(j_i)\xi_i\right)\right\| &= \lim_{\lambda\in\Lambda}\left\|\pi(au_\lambda)\left(\sum_i \pi(j_i)\xi_i\right)\right\| \leqslant \sup_{\lambda\in\Lambda}\|\pi(au_\lambda)\|\cdot\left\|\sum_i \pi(j_i)\xi_i\right\| \leqslant \\ &\leqslant \|a\|\cdot\sup_{\lambda\in\Lambda}\|u_\lambda\|\cdot\left\|\sum_i \pi(j_i)\xi_i\right\| = \|a\|\cdot\left\|\sum_i \pi(j_i)\xi_i\right\|,\end{aligned}$$

так что $\tilde{\pi}$ ограничено, а значит, $\tilde{\pi}(a)$ продолжается до ограниченного оператора в H.

При этом, как легко проверить, $\tilde{\pi}(ab) = \tilde{\pi}(a)\tilde{\pi}(b)$ и $\tilde{\pi}(a^*) = \tilde{\pi}(a)^*$ для любых $a, b \in A$, так что $\tilde{\pi}$ является представлением A. Единственность следует из того, что любое продолжение π должно удовлетворять (12). □

Лемма 4.38. *В условиях леммы 4.37 представление π неприводимо тогда и только тогда, когда $\tilde{\pi}$ неприводимо.*

Доказательство. Пусть π приводится собственным инвариантным подпространством $L \subset H$. Тогда, в силу невырожденности, $H = \overline{\pi(I)(L + L^\perp)} \subseteq \overline{\pi(I)L} + \overline{\pi(I)L^\perp}$. Поскольку $L^\perp$ тоже инвариантно, то $\pi(I)L^\perp \subset L^\perp$, так что $\overline{\pi(I)L} = L$. Then $\overline{\tilde{\pi}(A)L} = \overline{\tilde{\pi}(A)\pi(I)L} = \overline{\pi(I)L} = L$ и L приводит $\tilde{\pi}$. В обратную сторону утверждение тривиально. □

Лемма 4.39. *Пусть π — представление A в гильбертовом пространстве H, а $I \subset A$ — идеал. Тогда ортогональный проектор p на $\overline{\pi(I)H}$ лежит в центре $\pi(A)''$. Если π неприводимо и $\pi(I) \neq 0$, то $\pi|_I$ также неприводимо.*

Доказательство. Поскольку $\pi(A)\pi(I)H = \pi(I)H$, то $\overline{\pi(I)H}$ инвариантное пространство для $\pi(A)$, а значит, $p \in \pi(A)'$ (см. конец доказательства леммы 4.3). Если $x \in \pi(I)'$, то $x\pi(j)\xi = \pi(j)x\xi \in \pi(I)H$ для любых $j \in I$, $\xi \in H$, так что pH — инвариантное подпространство $\pi(I)'$ и, значит, $p \in \pi(I)''$. Поэтому

$$p \in \pi(I)'' \cap \pi(A)' \subset \pi(A)'' \cap \pi(A)',$$

что является центром $\pi(A)''$.

Если π неприводимо, то p — скалярный оператор (то есть 0 или 1), а поскольку $\pi(I) \neq 0$, то $p = 1$. Значит, $\pi|_I$ является невырожденным. Значит, по лемме 4.38 оно неприводимо. □

5. Специальные классы C^*-алгебр

5.1. **C^*-алгебра компактных операторов.** Мы рассмотрим в этом параграфе C^*-подалгебры C^*-алгебры $\mathbb{K}(H)$ компактных операторов в гильбертовом пространстве H. Мы будем говорить, что C^*-подалгебра алгебры $\mathbb{B}(H)$ *неприводима*, если ее тождественное представление неприводимо.

Определение 5.1. Проектор p называется *минимальным*, если не существует такого проектора $q \neq 0$, $q \neq p$, что $qp = q$. Другими словами, p не *доминирует* никакого нетривиального проектора.

Лемма 5.2. *Любая ненулевая C^*-алгебра A компактных операторов содержит минимальный проектор e и $eAe = \mathbb{C}\cdot e$. Если A неприводима, то e — проектор ранга 1 (как проектор в гильбертовом пространстве).*

Доказательство. Поскольку A ненулевая, то она содержит ненулевой положительный оператор (см. (6)), который (как известно из основного курса) имеет дискретный спектр (кроме 0) с собственными значениями конечных кратностей. Рассмотрим проектор на ненулевую точку спектра. Поскольку характеристическая функция этой изолированной точки является непрерывной на спектре, то этот проектор принадлежит A. Тогда среди доминируемых им ненулевых проекторов имеется некоторый проектор $e \in A$ минимального ранга среди доминируемых (поскольку у них конечные ранги). Тогда e — минимальный (единственность минимального и даже равенство рангов у разных минимальных не утверждается). Если eAe состоит не только из $\mathbb{C} \cdot e$, то тем же способом мы сможем построить проектор, доминируемый e и прийти к противоречию.

Предположим теперь, что A неприводима, но ранг e больше 1. Выберем пару ненулевых ортогональных векторов ξ, η в образе e. Поскольку для любого a существует такое число $\lambda \in \mathbb{C}$, что $eae = \lambda e$, то $(\xi, a\eta) = (e\xi, ae\eta) = (\xi, eae\eta) = \lambda(\xi, \eta)$, то есть $a\eta \perp \xi$ для любого $a \in A$. Рассматривая все ξ из образа e, перпендикулярные η, видим, что подпространство $\overline{A\eta}$ является собственным инвариантным подпространством. Противоречие. $\square$

Лемма 5.3. *Единственной неприводимой C^*-подалгеброй $\mathbb{K}(H)$ является она сама.*

Доказательство. Пусть A — неприводимая C^*-подалгебра $\mathbb{K}(H)$, а $e \in A$ — минимальный проектор ранга 1. Тогда найдется такой вектор $\xi \in H$ единичной длины, что $e\eta = \xi(\xi, \eta)$ для любого η (берем ξ из образа e). В силу неприводимости, для любых $\eta, \zeta \in H$ найдутся такие элементы $a, b \in A$, что $a\xi = \eta$, $b\xi = \zeta$. При этом $A \ni aeb^*$ и $aeb^*(\kappa) = a\xi(\xi, b^*\kappa) = \eta(\zeta, \kappa)$, $\kappa \in H$. Таким образом, A содержит все операторы ранга 1. Такие операторы порождают $\mathbb{K}(H)$ (любой компактный приближается конечномерными), так что $A = \mathbb{K}(H)$. $\square$

Следствие 5.4. *Алгебра $\mathbb{K}(H)$ является простой.*

Доказательство. Поскольку $\mathbb{K}(H)$ неприводима, то любой ее ненулевой идеал тоже неприводим (по лемме 4.39), так что он совпадает с $\mathbb{K}(H)$ (по лемме 5.3). $\square$

Следствие 5.5. *Пусть A — неприводимая C^*-подалгебра $\mathbb{B}(H)$, содержащая ненулевой компактный оператор. Тогда $\mathbb{K}(H) \subseteq A$.*

Доказательство. Поскольку $A \cap \mathbb{K}(H)$ — ненулевой идеал A, то он неприводим по лемме 4.39. По лемме 5.3 эта подалгебра $\mathbb{K}(H)$ должна совпадать со всей $\mathbb{K}(H)$. $\square$