Лекция 11 (29.11.2021)

Определение 5.13. Любой $*$-гомоморфизм между конечномерными C^*-алгебрами может быть представлен следующим графическим способом. Представим A в виде k-набора $\{(1,1)=n_1,\ldots,(1,k)=n_k\}$, соответствующего $A\cong M_{n_1}\oplus\ldots\oplus M_{n_k}$, а B — в виде l-набора $\{(2,1)=m_1,\ldots,(2,l)=m_l\}$, соответствующего $B\cong M_{m_1}\oplus\ldots\oplus M_{m_l}$. Изобразим φ при помощи стрелок между элементами наборов, причем из $(1,j)$ в $(2,i)$ проведем c_{ij} стрелок, чтобы показать частичную кратность. Последовательность таких картинок для последовательности вложений $A_1\subset A_2\subset\ldots\subset A_p\subset\cdots$ называется *диаграммой Браттели последовательности.* Иногда ее называют диаграммой Браттели алгебры, но одна и та же алгебра может быть получена из разных последовательностей.

Задача 51. Нарисовать диаграммы Браттели для (некоторых определяющих последовательностей) следующих AF-алгебр:

(1) алгебры компактных операторов $\mathbb{K}(H)$;
(2) ее унитализации $\mathbb{K}(H)^+$;
(3) замыкание объединения $A_p=M_{2^p}$, с вложениями $A_p\subset A_{p+1}$ кратности 2 по формуле $a\mapsto\begin{pmatrix}a&0\\0&a\end{pmatrix}$ (CAR алгебра);
(4) $C(K)$, где K — канторово множество, полученное из $[0,1]$ последовательными удалениями средней трети соответствующих интервалов. Если K_p — множество, полученное на p-м шаге этого процесса, то A_p — алгебра непрерывных функций, постоянных на интервалах K_p;
(5) $C(X)$, где $X:=\{0\}\cup\{\frac{1}{n}:n\in\mathbb{N}\}$, а A_k состоит из всех функций, постоянных на $[0,1/2^k]$.

Лемма 5.14. *Если две диаграммы Браттели совпадают, то соответствующие им AF-алгебры изометрически $*$-изоморфны.*

Доказательство. Пусть A_n и B_n — две последовательности конечномерных C^*-алгебр с включениями $\alpha_n:A_n\to A_{n+1}$, $\beta_n:B_n\to B_{n+1}$. Поскольку диаграммы Браттели одинаковы, то для каждого n имеется изоморфизм $\varphi_n:A_n\to B_n$. Рассмотрим $\varphi_{n+1}\circ\alpha_n$ и $\beta_n\circ\varphi_n:A_n\to B_{n+1}$. Они могут отличаться лишь на унитарный $u_{n+1}\in B_{n+1}$, то есть $\beta_n\circ\varphi_n=\operatorname{Ad}_{u_{n+1}}\varphi_{n+1}\circ\alpha_n$, где $\operatorname{Ad}_{u_{n+1}}(a)=u_{n+1}a(u_{n+1})^*$.

Положим $\psi_1=\varphi_1$, $v_1=1$. Определим по индукции $v_{n+1}=\beta_n(v_n)u_{n+1}\in B_{n+1}$, $\psi_{n+1}=\operatorname{Ad}_{v_{n+1}}\varphi_{n+1}$. Тогда

$$\begin{aligned}\beta_n\psi_n &= \beta_n\operatorname{Ad}_{v_n}\varphi_n=\operatorname{Ad}_{\beta_n(v_n)}\beta_n\varphi_n=\operatorname{Ad}_{\beta(v_n)}\operatorname{Ad}_{u_{n+1}}\varphi_{n+1}\alpha_n\\ &= \operatorname{Ad}_{\beta_n(v_n)u_{n+1}}\varphi_{n+1}\alpha_n=\psi_{n+1}\alpha_n.\end{aligned}$$

При этом $\cup_{n=1}^\infty\psi_n:\cup_{n=1}^\infty A_n\to\cup_{n=1}^\infty B_n$ — изометрический $*$-изоморфизм, так что замыкания тоже изоморфны. □

Не надо думать, что AF-алгебры являются “маленькими” и что C^*-подалгебры AF-алгебр — снова AF-алгебры. Например, $C[0,1]$ не является AF-алгеброй (поскольку единственная ее конечномерная C^*-подалгебра состоит из постоянных функций), но является C^*-подалгеброй AF-алгебры $C(K)$ функций на канторовом множестве. Действительно, пусть f — функция на K, принимающая все рациональные значения промежутка $[0,1]$. Ее спектр является замыканием этого множества, то есть равен всему интервалу $[0,1]$. Таким образом, $C^*(1,f) \subset C(K)$ изометрически $*$-изоморфна $C(\mathrm{Sp}(f)) = C[0,1]$.

5.3. **Мультипликаторы.** Будем называть C^*-подалгебру $\mathbb{B}(H)$ *невырожденной*, если ее естественное представление в гильбертовом пространстве H является невырожденным.

Везде в этом параграфе $A, B \subset \mathbb{B}(H)$.

Определение 5.15. Оператор $x \in \mathbb{B}(H)$ называется *левым мультипликатором* A, если $xA \subset A$. Он называется *правым мультипликатором*, если $Ax \subset A$ и *двойным (или двусторонним) мультипликатором* или просто *мультипликатором*, если выполняются оба условия.

Если у A есть единица, то всякий левый (правый) мультипликатор лежит в A.

Поскольку A слабо плотно в A'', то мы можем перейти к замыканию $xA \subset A$ и получить $xA'' \subset A''$. Если A'' с единицей, то $x \in A''$.

Определение 5.16. Линейное отображение $\sigma : A \to A$ называется *левым централизатором*, если $\sigma(ab) = \sigma(a)b$ для любых $a, b \in A$. Линейное отображение $\sigma : A \to A$ называется *правым централизатором*, если $\sigma(ab) = a\sigma(b)$ для любых $a, b \in A$. Пара (σ_1, σ_2) называется *двойным централизатором*, если σ_1 — правый централизатор, σ_2 — левый централизатор и $\sigma_1(a)b = a\sigma_2(b)$ для любых $a, b \in A$.

Лемма 5.17. *Любой левый централизатор ограничен.*

Доказательство. Предположим противное. Тогда для любого $n \in \mathbb{N}$ имеется такой элемент $x_n \in A$, что $\|x_n\| < 1/n$ и $\|\sigma(x_n)\| > n$. Значит, ряд $a = \sum_{n=1}^{\infty} x_n x_n^*$ сходится, так что $a \in A$ и $x_n x_n^* \leqslant a$. По лемме 3.18, x_n может быть записан в виде $x_n = a^{1/4}u_n$, где $\|u_n\| \leqslant \|a\|^{1/4}$. Поэтому для любого n имеем $\|\sigma(x_n)\| = \|\sigma(a^{1/4})u_n\| \leqslant \|\sigma(a^{1/4})\| \cdot \|a^{1/4}\|$ — противоречие. $\square$

Теорема 5.18. *Если A невырождена, то имеется биективное соответствие между левыми (правыми, двойными) мультипликаторами и левыми (правыми, двойными) централизаторами.*

Доказательство. Если x — левый мультипликатор, то отображение $A \ni a \mapsto xa \in A$ — левый централизатор. Если $xa = ya$ для любого $a \in A$, то $(x - y)a = 0$ для любого $a \in A''$, так что $x = y$ в A''.

Пусть σ — левый централизатор, а u_λ — аппроксимативная единица для A. Поскольку направленность $\sigma(u_\lambda)$ ограничена, то для нее имеется точка накопления в A'' (ограниченные множества слабо компактны в $\mathbb{B}(H)$ и точки накопления должны лежать в замыкании A). Обозначим одну из точек накопления через x. Для любого $a \in A$, направленность $u_\lambda a$ сходится по норме к a, так что $\sigma(u_\lambda a) = \sigma(u_\lambda)a$ сходится к $\sigma(a)$. Тогда $xa = \sigma(a) \in A$, так что x — левый мультипликатор. Если $xA = 0$, то $\sigma = 0$. Заметим, что если $y \in A''$ — другая точка накопления, то $xa = \sigma(a) = ya$ для любого $a \in A$, и $(x - y)a = 0$ для любого $a \in A''$ (ввиду сильной плотности A в A''), так что $x = y$ в A''. Так что точка накопления в данном случае одна.

Аналогично доказывается для правых мультипликаторов и правых централизаторов.

Пусть теперь x — двойной мультипликатор, то отображения $\sigma_2 : a \mapsto xa$ и $\sigma_1 : a \mapsto ax$ — левый и правый мультипликаторы, причем $\sigma_1(a)b = (ax)b = a(xb) = a\sigma_2(b)$ для любых $a, b \in A$, так что x определяет двойной централизатор. Обратно, если (σ_1, σ_2) — двойной централизатор, то, по доказанному, σ_1 определяет правый мультипликатор x_1, а σ_2 — левый мультипликатор x_2. При этом $ax_1b = \sigma_1(a)b = a\sigma_2(b) = ax_2b$ для любых $a, b \in A$, так что $x_1 = x_2$, а $x_1 = x_2$ — двойной мультипликатор. $\square$

Задача 52. Пусть $\pi : A \to \mathbb{B}(H)$ — вырожденное представление. Обозначив через H_0 инвариантное подпространство $H_0 := \{\xi \in H \colon \pi(a)(\xi)0$ для любого $a \in A\}$. Доказать, что π индуцирует представление $\pi' : A \to \mathbb{B}(H/H_0)$, причем, если π было точным представлением (инъективным гомоморфизмом), то и π' будет таковым.

Замечание 5.19. Соответственно, до конца настоящего параграфа будем считать $A \subseteq \mathbb{B}(H)$ невырожденной, так что (двойные) мультипликаторы совпадают с двойными централизаторами.

Множество всех левых (правых) мультипликаторов A обозначается через $LM(A)$ ($RM(A)$), а множество всех мультипликаторов A — через $M(A)$.

Задача 53. Проверить, что $RM(A) = (LM(A))^*$ и что $M(A) = LM(A) \cap RM(A)$, так что $M(A)$ симметрично по отношению к инволюции.

Прямо из определения следует, что все три множества замкнуты по норме. Таким образом, $M(A)$ — C^*-алгебра (а остальные две — в общем случае только банаховы алгебры).

Задача 54. Пусть X — локально-компактное пространство, а $C_0(X)$, как и ранее — C^*-алгебра непрерывных функций, стремящихся к 0 на бесконечности. Доказать, что алгебра $M(C_0(X)) \subset L^\infty(X)$ может быть отождествлена с C^*-алгеброй $C_b(X)$ всех ограниченных непрерывных функций на X.

Пример 5.20. Если $A = \mathbb{K}(H)$, то $M(\mathbb{K}(H)) \subseteq \mathbb{B}(H)$, но любой ограниченный оператор является мультипликатором (так как $\mathbb{K}(H)$ — идеал в $\mathbb{B}(H)$), так что $M(\mathbb{K}(H)) = \mathbb{B}(H)$.

Определение 5.21. Идеал $A \subset B$ называется *существенным*, если любой ненулевой идеал B имеет нетривиальное пересечение с A.

Обозначим через $A^\perp \subset B$ множество $A^\perp = \{x \in B \colon Ax = 0\}$.

Лемма 5.22. *Подалгебра $A \subset B$ существенна тогда и только тогда, когда $A^\perp = 0$.*

Доказательство. Предположим, что $A^\perp = 0$, но A не является существенной. Тогда имеется такой ненулевой идеал $J \subset B$, что $A \cap J = \{0\}$. Возьмем $j \in J$, $j \neq 0$. Для любого $a \in A$ имеем $ja \in J \cap A$, так что $ja = 0$ и $0 \neq j \in A^\perp$ — противоречие.

Обратно, пусть A — существенный, но $A^\perp \neq 0$. Тогда найдется такой $x \in A^\perp$, что $x \neq 0$. Рассмотрим идеал BxB (замыкание множества всех линейных комбинаций элементов вида $\sum_i b_i x b_i'$, $b_i, b_i' \in B$) и выберем $y \in BxB \cap A$. Как известно (например, из леммы 3.18), любой элемент C^*-алгебры допускает разложение в произведение двух ее элементов, так что мы можем записать $y = z \cdot a$, где $z, a \in BxB \cap A$. Запишем $z = \sum_i b_i x b_i'$, так что $y = za = \sum_i b_i x (b_i' a) = 0$, поскольку $b_i' a \in A$, а значит, $x b_i' a = 0$, поскольку $x \in A^\perp$. Следовательно, $BxB \cap A = 0$ — противоречие с существенностью. $\square$

Лемма 5.23. *Пусть $A \subset B$ — существенный идеал. Тогда существует вложение $B \subset M(A)$, тождественное на A.*

Доказательство. Рассмотрим $b \in B$. Тогда b определяет левый и правый централизатор A (так как A — идеал) $\sigma_2 : a \mapsto ba$ и $\sigma_1 : a \mapsto ab$, причем $\sigma_1(a)a' = (ab)a' = a(ba') = a\sigma_2(a')$ для любых $a, a' \in A$, так что b определяет двойной централизатор, а значит, мультипликатор. Так что определено отображение $\pi : B \to M(A)$, тождественное на A. Это отображение, очевидно, является $*$-гомоморфизмом. Остается проверить инъективность π. Если $b \in \operatorname{Ker} \pi$, то $\sigma_1 = 0$ и $\sigma_2 = 0$ (см. доказательство теоремы 5.18), так что $bA = 0$, $Ab = 0$ и $b \in A^{\perp}$, а значит, $b = 0$. □

Заметим, что соответствие $A \mapsto M(A)$ не является функтором. Например, для $A = \mathbb{K}(H)$ и $B = A^{+}$ рассмотрим вложение $A \subset B$. При этом $M(A) = \mathbb{B}(H)$, а $M(B) = B$. Очевидно, что вложение не продолжается на эти мультипликаторные алгебры. Тем не менее, в некоторых случаях переход к мультипликаторам имеет некоторые функториальные свойства.

Лемма 5.24. *Пусть $\varphi : A \to B$ — сюръективный $*$-гомоморфизм двух C^*-алгебр. Тогда он продолжается до $*$-гомоморфизма $\bar{\varphi} : M(A) \to M(B)$.*

Доказательство. Пусть $\sigma \in LM(A)$ — левый централизатор. Для любого $b \in B$ положим $\bar{\varphi}(\sigma)(b) := \varphi(\sigma(\varphi^{-1}(b)))$. Необходимо проверить корректность, то есть независимость от выбора представителя в $\varphi^{-1}(b) \subset A$. В силу линейности, достаточно проверить, что σ отображает $\operatorname{Ker} \varphi$ в себя. Пусть $a \in \operatorname{Ker} \varphi$. Представим его в виде $a = a_1 \cdot a_2$, $a_1, a_2 \in \operatorname{Ker} \varphi$. Тогда $\varphi(\sigma(a)) = \varphi(\sigma(a_1)a_2) = 0$, поскольку $\operatorname{Ker} \varphi$ — идеал.

Таким образом, левый централизатор σ определяет отображение $\bar{\varphi}(\sigma)$, которое является левым централизатором B. Аналогично делается для правых и двойных централизаторов (задача 55). □

Задача 55. Доказать, что $\bar{\varphi}(\sigma)$ является левым централизатором. Аналогично построить продолжение правого централизатора. Проверить, что для двойного централизатора получаем двойной централизатор.

Задача 56. Проверить, что в ситуации предыдущей леммы расширение $\bar{\varphi}$ также является сюръективным.

Задача 57. Доказать, что представление $\pi : A \to \mathbb{B}(H)$ невырождено тогда и только тогда, когда для некоторой аппроксимативной единицы u_λ алгебры A выполнено следующее условие: для любого вектора $\xi \in H$ найдется такое λ, что $u_\lambda(\xi) \neq 0$.

Лемма 5.25. *Пусть $B \subset A$ — алгебра и C^*-подалгебра с общей аппроксимативной единицей u_λ. Тогда $M(B) \subset M(A)$.*

Доказательство. Если A невырождена, то и B тоже невырождена в силу задачи 57. Так что $M(B) \subset B'' \subset A''$. Для любого $x \in A$, $y \in M(B)$, $yx = \lim y u_\lambda x \in A$, и аналогично, $xy \in A$, так что y — мультипликатор A. □