Лекция 12 (06.12.2021)

5.4. Гильбертовы C^*-модули.

Определение 5.26. Пусть M — банахово пространство (с нормой $\|\cdot\|$), которое в то же время является правым модулем над C^*-алгеброй A (действие A на M предполагается непрерывным). Пусть $\langle\cdot,\cdot\rangle : M \times M \to A$ — полуторалинейная форма (называемая *скалярным произведением*) со свойствами:

(1) $\langle m, na\rangle = \langle m, n\rangle a$ для всех $m, n \in M$, $a \in A$;
(2) $\langle m, n\rangle = \langle n, m\rangle^*$ для всех $m, n \in M$;
(3) $\langle m, m\rangle \in A$ положителен для всех $m \in M$, а если он равен 0, то $m = 0$.

Мы называем M *гильбертовым C^*-модулем,* если $\|m\|^2 = \|\langle m, m\rangle\|$ для всякого $m \in M$.

Пример 5.27. Алгебра A является гильбертовым C^*-над A, если мы определим скалярное произведение формулой $\langle a, b\rangle := a^*b$, $a, b \in A$.

Пример 5.28. Модуль A^n — гильбертов C^*-модуль над A со скалярным произведением, заданным формулой $\langle (a_1, \ldots, a_n), (b_1, \ldots, b_n)\rangle := \sum_{i=1}^n a_i^* b_i$.

Лемма 5.29 (неравенство Коши(-Шварца-Буняковского))**.** *$\|\langle n, m\rangle\|^2 \leqslant \|n\|^2\|m\|^2$ для любых $n, m \in M$.*

Доказательство. Для всех $A \in A$ мы имеем $\langle m - na, m - na\rangle \geqslant 0$, поэтому $\langle m, m\rangle - a^*\langle n, m\rangle - \langle m, n\rangle a + a^*\langle n, n\rangle \geqslant 0$. Возьмем $a = \frac{1}{\|n\|^2}\langle n, m\rangle$. Тогда $\langle m, m\rangle - \frac{2}{\|n\|^2}\langle m, n\rangle\langle n, m\rangle + \frac{1}{\|n\|^4}\langle m, n\rangle\langle n, n\rangle\langle n, m\rangle \geqslant 0$. Поскольку $\|n\|^2 = \|\langle n, n\rangle\| \geqslant \langle n, n\rangle$, то получаем, что $\langle m, m\rangle - \frac{1}{\|n\|^2}\langle m, n\rangle\langle n, m\rangle \geqslant 0$, так что $\langle m, n\rangle\langle n, m\rangle \leqslant \|n\|^2\langle m, m\rangle$. Отсюда получаем требуемое неравенство. □

Пример 5.30. Пусть M состоит из всех последовательностей (a_i), $a_i \in A$, для которых ряд $\sum_{i=1}^\infty a_i^* a_i$ сходится в A (по норме). Скалярное произведение задается формулой by $\langle (a_i), (b_i)\rangle := \sum_{i=1}^\infty a_i^* b_i$. По предыдущей лемме, этот ряд сходится. Данный гильбертов C^*-модуль очень важен для приложений. Он обычно обозначается через $l_2(A)$ и называется *стандартным* гильбертовым C^*-модулем.

Отображение $T : M \to M$ называется (ограниченным) *оператором* в гильбертовом C^*-модуле M, если оно линейно и A-линейно (то есть, $T(ma) = T(m)a$ для любых $m \in M$, $a \in A$). Если $M = A$, то это определение совпадает с определением левых централизаторов.

Определение 5.31. Оператор T называется *допускающим сопряженный*, если имеется такой оператор S, что $\langle m, T(n)\rangle = \langle S(m), n\rangle$ для любых $m, n \in M$. В этом случае S называется *сопряженным оператором* для T и обозначается $T^\bigstar$. Обозначим через $\mathbb{B}_A^\bigstar(M)$ множество операторов, допускающих сопряженный.

В отличие от гильбертовых пространств, в гильбертовых C^*-модулях имеются ограниченные операторы, не допускающие сопряженного.

Задача 58. Построить пример оператора, не допускающего сопряженного.

Задача 59. Доказать, что $\|x\| = \sup_{y \in B_1(M)}\langle x, y\rangle$, где $B_1(M) \subset M$ — единичный шар.

Теорема 5.32. *Алгебра* $\mathbb{B}_A^\bigstar(M)$ *является* C^**-алгеброй.*

Набросок доказательства. Ключевыми являются следующие моменты.

1) Инволюция $\bigstar : \mathbb{B}_A^\bigstar(M) \to \mathbb{B}_A^\bigstar(M)$ является изометрией. Действительно, в силу задачи 59,

$$\|T\| = \sup_{x \in B_1(M)} \|Tx\| = \sup_{x,y \in B_1(M)} \|\langle Tx, y\rangle\| =$$

$$= \sup_{x,y \in B_1(M)} \|\langle x, T^\bigstar y\rangle\| = \sup_{y \in B_1(M)} \|T^\bigstar y\| = \|T^\bigstar\|.$$

2) Для нормы выполнено C^*-свойство. Это следует из оценки

$$\|T^\bigstar T\| \geqslant \sup_{x \in B_1(M)} \|\langle T^\bigstar Tx, x\rangle\| = \sup_{x \in B_1(M)} \|\langle Tx, Tx\rangle\| = \|T\|^2$$

(в обратную сторону — это общее свойство операторной нормы с учетом пункта один).

3) Алгебра $\mathbb{B}_A^\bigstar(M)$ замкнута как подалгебра банаховой алгебру B всех ограниченных $\mathbb{C}$-линейный операторов $M \to M$ (с операторной нормой). Действительно, прежде всего, заметим, что банахова алгебра $\mathbb{B}_A(M)$ всех операторов замкнута в B как пересечение по всем $x \in M$, $a \in A$, замкнутых множеств $\mathrm{Ker}(f_{x,a})$, где $f_{x,a} : B \to M$, $f_{x,a}(T) = T(xa) - T(x)a$, — ограниченное линейное отображение, $\|f_{x,a}\| \leqslant 2\|x\|\,\|a\|$. Пусть направленность элементов $T_\alpha \in \mathbb{B}_A^\bigstar(M)$ сходится к $T \in \mathbb{B}_A(M)$, в частности, является направленностью Коши. По пункту 1), направленность $T_\alpha^\bigstar$ тоже является направленностью Коши, а значит, имеет предел $S \in \mathbb{B}_A(M)$. Легко видеть, что $S = T^\bigstar$ и $T \in \mathbb{B}_A^\bigstar(M)$. □

Задача 60. Завершить доказательство теоремы 5.32.

Если $M = A$, то определение оператора, допускающего сопряженный совпадает с определением двойного централизатора.

Определение 5.33. Оператор $\theta_{x,y}$, определенный формулой $\theta_{x,y}(z) = x\langle y, z\rangle$, называется *элементарным.*

Задача 61. Доказать, что $\theta_{x,y} \in \mathbb{B}_A^\bigstar(M)$, предъявив явную формулу для сопряженного.

Определение 5.34. Замыкание множества $\mathbb{C}$-линейных комбинаций элементарных операторов обозначается через $\mathbb{K}_A(M)$. Его элементы называются *A-компактными* операторами.

Задача 62. Доказать, что $\mathbb{K}_A(M)$ — идеал в $\mathbb{B}_A^\bigstar(M)$.

Задача 63. Доказать, что $\mathbb{K}_A(A) = A$. Заметим, что если A без единицы, то $\mathbb{K}_A(A) = A \neq \mathbb{B}_A^\bigstar(A) = DC(A)$ (алгебра двойных централизаторов).

5.5. **Алгебра Калкина.** Если гильбертово пространство H не является сепарабельным, то $\mathbb{B}(H)$ может быть достаточно сложным, в частности, иметь не только один собственный идеал. Например, идеалом является множество операторов с сепарабельным образом. Этого не происходит в случае сепарабельного H, которым мы обычно будем ограничиваться.

Определение 5.35. Фактор-C^*-алгебра $Q(H) = \mathbb{B}(H)/\mathbb{K}(H)$ называется *алгеброй Калкина.*

Определение 5.36. Фактор-C^*-алгебра $M(A)/A$ называется *алгеброй внешних мультипликаторов,* или *обобщенной алгеброй Калкина.*

Лемма 5.37. *Алгебра Калкина является простой.*

Доказательство. Надо доказать, что $\mathbb{K}(H)$ — единственный идеал $\mathbb{B}(H)$. Пусть идеал $I \subset \mathbb{B}(H)$ содержит хотя бы один некомпактный оператор. Можно считать, что этот оператор положительный (так как любой оператор представляет собой линейную комбинацию четырех положительных). Обозначим его через t. Заметим, что поскольку $\mathbb{K}(H)$ — простая (по следствию 5.4), то либо $\mathbb{K}(H) \subseteq I$, либо $\mathbb{K}(H) \cap I = \{0\}$. Поскольку $t \notin \mathbb{K}(H)$, то можно считать, что найдется такое число $\alpha > 0$, что оба спектральных проектора $p_1 = p_{[0,\alpha)}$ и $p_2 = p_{[\alpha,\infty)}$ бесконечного ранга. Действительно, если p_2 с указанным свойством не найдется, то t является компактным вопреки предположению. Если при этом $p_1 = 0$, то t обратим, а значит, $I = \mathbb{B}(H)$, как и требовалось. Если $p_1 \neq 0$, но ранг его конечный, то имеем конечное число собственных значений, меньших α, так что для некоторой функции f, непрерывной на спектре, имеем $0 \neq f(t) \in \mathbb{K}(H)$. Значит, $\mathbb{K}(H) \subseteq I$. Поэтому $p_1 \in I$ и $t + p_1 \in I$ — обратимый и $I = \mathbb{B}(H)$. Итак, оба проектора p_1 и p_2 — бесконечного ранга. Пусть $H_i = \operatorname{Im} p_i$, $i = 1, 2$. Тогда $H_1 \perp H_2$ и $H = H_1 \oplus H_2$. Поскольку H_1 и H_2 изоморфны в силу сепарабельности H, то имеется такая частичная изометрия $w \in \mathbb{B}(H)$, что $w|_{H_2} = 0$ и $w|_{H_1}$ отображает H_1 изометрически на H_2. Поскольку спектральные проекторы коммутируют с t, то $tp_2 \geqslant \alpha \cdot 1_{H_2}$, где 1_{H_2} — тождественный оператор в H_2. Кроме того, $w^*tw \geqslant \alpha \cdot 1_{H_1}$, а значит, $tp_2 + w^*tw \geqslant \alpha \cdot 1$. Поэтому $tp_2 + w^*tw \in I$ обратим, так что $I = \mathbb{B}(H)$. $\square$