Лекция 2 (27.09.2022)

2. Спектр и функциональное исчисление

Определение 2.1. Пусть A — банахова алгебра с единицей. Для любого $a \in A$ назовем множество $\mathrm{Sp}(a) = \{\lambda \in \mathbb{C} : (a - \lambda 1)$ не является обратимым$\}$ *спектром* элемента a. Функция $R_a(\lambda) = (a - \lambda 1)^{-1}$ называется *резольвентой* a. Если A — C^*-алгебра без единицы, то *квазиспектр* $\mathrm{Sp}'(a)$ элемента $a \in A$ полагается равным спектру a как элемента алгебры A^+.

Задача 12. Показать, что квазиспектр всегда содержит ноль.

Теорема 2.2. *Спектр любого элемента является компактным непустым множеством. Резольвента является аналитической функцией вне спектра (то есть для любой точки пополненной комплексной плоскости из дополнения к спектру представляется степенным рядом с коэффициентами из алгебры, равномерно сходящимся на некотором замкнутом диске).*

Доказательство. Если $|\lambda| > \|a\|$, то ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{-(n+1)} a^n$ сходится по норме, причем сходится к $-(a-\lambda 1)^{-1}$, поскольку $-(a-\lambda 1)\sum_{n=0}^{k} \lambda^{-(n+1)} a^n = 1-\lambda^{-(k+2)}a^{k+1}$ сходится к 1. Таким образом, $R_a(\lambda)$ является аналитической в окрестности бесконечности $|\lambda| > \|a\|$ и

$$\lim_{\lambda\to\infty} \|R_a(\lambda)\| \le \lim_{\lambda\to\infty} \frac{1}{|\lambda|}\frac{1}{1-\frac{\|a\|}{|\lambda|}} = 0.$$

В частности, $\mathrm{Sp}(a)$ содержится в замкнутом диске радиуса $\|a\|$ и, тем самым, является ограниченным множеством.

Если $a - \lambda_0 1$ является обратимым (то есть $\lambda_0 \notin \mathrm{Sp}(a)$) и $|\lambda - \lambda_0| < \frac{1}{\|(a-\lambda_0 1)^{-1}\|}$ то, аналогичным образом,

$$(a - \lambda 1)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^n (a - \lambda_0 1)^{-n-1}$$

является рядом Тейлора R_a в окрестности λ_0, так что $R_a(\lambda)$ является аналитической вне $\mathrm{Sp}(a)$. Это же рассуждение показывает, в частности, что дополнение к $\mathrm{Sp}(a)$ открыто, то есть $\mathrm{Sp}(a)$ замкнуто. Так как спектр ограничен, то он компактен.

Поскольку $R_a(\lambda)$ является аналитической, то комплекснозначная функция $\lambda \mapsto \varphi(R_a(\lambda))$ тоже является аналитической, если φ — произвольный ограниченный линейный функционал на A. Если $\mathrm{Sp}(a)$ пуст, то $\varphi(R_a(\lambda))$ — аналитическая функция на всем $\mathbb{C}$. При этом она ограничена, поскольку $|\varphi(R_a(\lambda))| \leqslant \|\varphi\| \cdot \|R_a(\lambda)\|$ а $\|R_a(\lambda)\|$ ограничено — оцениваем по отдельности на компактном диске радиуса $\lambda_0 > \|a\|$ и вне его через полученную выше оценку

$$\|R_a(\lambda)\| \le \frac{1}{|\lambda| - \|a\|} \le \frac{1}{|\lambda_0| - \|a\|}.$$

Значит, $\varphi(R_a(\lambda)) = 0$ для любого φ, поэтому $R_a(\lambda) = 0$ (см. задачу 13 ниже) при всех $\lambda \in \mathbb{C}$, что невозможно (получается, что $\lambda_1 1 - \lambda_2 1 = 0$ при $\lambda_1 \neq \lambda_2$). $\square$

Задача 13. Если имеется элемент $x \neq 0$ в нормированном пространстве X, то имеется непрерывный линейный функционал φ, не обращающийся на x в ноль. (Это теорема из стандартного курса, следствие теоремы Хана-Банаха, см. например, Колмогоров и Фомин, следствие 2 на стр. 189 (изд. 1981 г.)).

Задача 14. Пусть a и b — коммутирующие элементы банаховой алгебры. Тогда произведение ab обратимо тогда и только тогда, когда каждый из элементов a и b является обратимым.

Теорема 2.3 (Теорема об отображении спектра)**.** *Если $p(z)$ является многочленом, то* $\mathrm{Sp}(p(a)) = p(\mathrm{Sp}(a))$.

Доказательство. При $\alpha \in \mathbb{C}$ разложим $p(z)-\alpha$ на линейные множители $p(z)-\alpha = c\prod_i(z-\beta_i)$. Тогда $p(a)-\alpha 1 = c\prod_i(a-\beta_i 1)$ и $p(a)-\alpha 1$ обратим тогда и только тогда, когда обратимы все $a-\beta_i 1$ (применяя индуктивно задачу 14). Поэтому $\alpha \in \mathrm{Sp}(p(a))$ і тогда и только тогда, когда хотя бы одно из β_i принадлежит $\mathrm{Sp}(a)$. С другой стороны, подставляя это β_{i_0} в исходное разложение, получаем $p(\beta_{i_0}) - \alpha = c\prod_i(\beta_{i_0}-\beta_i) = 0$, то есть $\alpha = p(\beta_{i_0})$. Обратное включение получается аналогично. $\square$

Лемма 2.4. *Пусть A — C^*-алгебра (с единицей). Тогда* $\mathrm{Sp}(a^*) = \overline{\mathrm{Sp}(a)}$. *В частности, если $a = a^*$ (то есть элемент самосопряжен), то* $\mathrm{Sp}(a) \subset \mathbb{R}$. *Если a — унитарный, то* $\mathrm{Sp}(a) \subset \mathbb{S}^1$, *где $\mathbb{S}^1 \subset \mathbb{C}$ — единичная сфера.*

Доказательство. Поскольку $a^*(a^{-1})^* = (a^{-1}a)^* = 1^* = 1$, и аналогично, в другом порядке, то элемент обратим тогда и только тогда, когда обратим его сопряженный. Это дает первое утверждение.

Пусть теперь a — унитарный, в частности, обратимый. Тогда $\|a\|^2 = \|a^*a\| = 1$, так что при $|\lambda| > 1$ имеем $\lambda \notin \mathrm{Sp}(a)$. Если же $|\lambda| < 1$, то $1 - \lambda a^*$ обратим, а значит, обратим и $a(1-\lambda a^*) = a - \lambda 1$. Таким образом, $\mathrm{Sp}(a) \subset \mathbb{S}^1$. $\square$

Определение 2.5. Число $r(a) = \sup\{|\lambda| \ : \ \lambda \in \mathrm{Sp}(a)\}$ называется *спектральным радиусом a.*

Задача 15. Показать, что $r(a) \leq \|a\|$ для любого $a \in A$.

Лемма 2.6. $r(a) = \lim_{n\to\infty} \|a^n\|^{1/n}$.

Доказательство. Разложим резольвенту R_a в окрестности бесконечности: $R_a(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{\lambda^{n+1}}$. Эта функция является аналитической при $|\lambda| > r(a)$, так что для любого $\rho > r(a)$ общий член стремится к нулю: $\lim_{n\to\infty} \|\frac{a^n}{\rho^{n+1}}\| = 0$. Поэтому $\overline{\lim}_{n\to\infty}\|a^n\|^{1/n} \leq \rho$ для любого $\rho > r(a)$, так что

$$\overline{\lim}_{n\to\infty}\|a^n\|^{1/n} \leq r(a). \tag{4}$$

С другой стороны, в силу компактности спектра, найдется такое $\alpha \in \mathrm{Sp}(a)$, что $|\alpha| = r(a)$. По теореме об отображении спектра, $\alpha^n \in \mathrm{Sp}(a^n)$, поэтому $|\alpha^n| \leq r(a^n)$. По задаче 15, $r(a^n) \leq \|a^n\|$. Объединяя, получаем

$$r(a) = |\alpha| = (|\alpha^n|)^{1/n} \leq (r(a^n))^{1/n} \leq \|a^n\|^{1/n}$$

для всех n, так что

$$r(a) \leq \inf_n \|a^n\|^{1/n}. \tag{5}$$

Сравнивая (4) и (5), заключаем, что $\lim_{n\to\infty} \|a^n\|^{1/n}$ существует и равен $r(a)$. $\square$

2.1. **Мультипликативные функционалы и максимальные идеалы коммутативных банаховых алгебр.** Напомним, что алгебра A называется *простой*, если у нее нет собственных (т.е., отличных от $\{0\}$ и A) идеалов.

Лемма 2.7. *Алгебра комплексных чисел $\mathbb{C}$ является единственной простой коммутативной алгеброй.*

Доказательство. Если $A \neq \mathbb{C}$, то имеется нескалярный элемент $a \in A$ (то есть $a \neq \lambda 1$ ни для какого λ). Возьмем некоторое $\alpha \in \operatorname{Sp}(a)$ и положим $I = \overline{(a-\alpha 1)A}$, так что $I \neq \{0\}$ — замкнутый (двусторонний) идеал в A. Для любого $b \in A$, элемент $(a-\alpha 1)b$ не является обратимым (см. задачу 14), так что по лемме 1.10 $\|(a-\alpha 1)b - 1\| \geq 1$. Поэтому $1 \notin I$ — противоречие с простотой A. $\square$

Определение 2.8. *Мультипликативным функционалом* на A называется нетривиальный гомоморфизм $\varphi : A \to \mathbb{C}$. Их множество обозначается через M_A.

Задача 16. Доказать, что $\varphi(1) = 1$. Можно воспользоваться легким наблюдением общего характера: образ идемпотента ($p^2 = p$) при гомоморфизме — всегда идемпотент.

Лемма 2.9. *Мультипликативный функционал на коммутативной банаховой алгебре A с единицей имеет норму 1. Отображение, сопоставляющее каждому мультипликативному функционалу его ядро, является биекцией на множество максимальных идеалов A, то есть таких собственных идеалов, которые не содержатся ни в каком другом идеале, кроме всей алгебры A*

Доказательство. Поскольку, по задаче 16, $\varphi(1) = 1$, $\|\varphi\| \geq 1$. Suppose $\|\varphi\| > 1$. Пусть найдется такой элемент $a \in A$, что $\|a\| < 1$ и $\varphi(a) = 1$. Тогда ряд $b = \sum_{n=1}^{\infty} a^n$ сходится и $a + ab = b$. Значит, $\varphi(b) = \varphi(a)(1 + \varphi(b)) = 1 + \varphi(b)$ — противоречие. Получаем, что $\|\varphi\| = 1$.

Поскольку $\operatorname{Ker}\varphi$ имеет коразмерность 1, то это — максимальный идеал.

Любой функционал φ полностью определяется своим ядром и условием $\varphi(1) = 1$ (см. задачу 17 ниже), так что указанное соответствие является биекцией на образ.

Покажем, что оно является эпиморфизмом. Если $M \subset A$ является максимальным идеалом, то $\operatorname{dist}(M, 1) = 1$, поскольку единичный открытый шар с центром в 1 состоит из обратимых элементов (лемма 1.10), а M не может содержать обратимых элементов (если $a \in M$ обратим, то $1 \in M$, а значит, $M = A$). Тогда замкнутый идеал $\overline{M}$ (замыкание M) тоже не содержит 1, так что в силу максимальности $\overline{M} = M$. Рассмотрим фактор-алгебру A/M, являющуюся простой (так как иначе M не был бы максимальным) коммутативной банаховой алгеброй с единицей. Поэтому, по лемме 2.7, $A/M \cong \mathbb{C}$. Соответствующее отображение факторизации является ненулевым гомоморфизмом, то есть мультипликативным функционалом (с ядром M). $\square$

Задача 17. Доказать, что любой функционал φ полностью определяется своим ядром и условием $\varphi(1) = 1$ (профакторизовать по ядру и рассмотреть индуцированный функционал на $\mathbb{C}$).

Поскольку мультипликативные функционалы ограничены единицей, то M_A является подмножеством единичного шара в сопряженном банаховом пространстве A' (пространстве всех ограниченных линейный функционалов на A). Пространство A'

может быть снабжено $*$-*слабой топологией*, задаваемой предбазой окрестностей вида $U_{\varphi_0,\varepsilon,a} = \{\varphi \in A' : |(\varphi - \varphi_0)(a)| < \varepsilon\}$, $\varphi_0 \in A'$, $a \in A$, $\varepsilon > 0$. В терминах направленностей, направленность φ_α сходится к φ, если $\varphi_\alpha(a)$ сходится к $\varphi(a)$ для каждого $a \in A$. Единичный шар пространства A' является компактным и хаусдорфовым относительно $*$-слабой топологии (теорема Банаха-Алаоглу, в случае сепарабельного пространства A доказывается в стандартном курсе, см. Колмогоров и Фомин §3, гл. IV, изд. 1981 г.).

Задача 18. Проверить, что M_A является $*$-слабо замкнутым.

Поэтому M_A тоже $*$-слабо компактно.

Задача 19. Следующий пример описывает типичную ситуацию, как станет ясно чуть дальше. Пусть $A = C[0,1]$, так что мультипликативные функционалы соответствуют точкам $[0,1]$. Именно, $\varphi(g) = g(t)$. Покажите, что для "обычной" нормы сопряженного пространства для любых двух точек $t \neq s$, расстояние между φ_t и φ_s равно 1. То есть множество мультипликативных функционалов дискретно, некомпактно, никаких предельных точек нет, в отличие от ситуации со $*$-слабой топологией.

Если же A не имеет единицы, рассмотрим банахову алгебру $A^+ = A \oplus \mathbb{C}$ (с первоначальной нормой (2), а не C^*-нормой из леммы 1.7). В ней A само является максимальным идеалом, отвечающим мультипликативному функционалу $\varphi_0((a,\lambda)) = \lambda$. Любой другой максимальный идеал I алгебры A^+ должен иметь собственное пересечение с A. Тогда $I \cap A$ — идеал коразмерности 1, поскольку I имел коразмерность 1 в A^+. Таким образом, $I \cap A$ — максимальный идеал в A. Поскольку его коразмерность 1, то определено факторотображение — ненулевой гомоморфизм в $\mathbb{C}$. Обратно, если $\varphi : A \to \mathbb{C}$ — (ненулевой) мультипликативный функционал на A, то формула $\widetilde{\varphi}((a,\lambda)) = \varphi(a) + \lambda$ задает единственное продолжение φ до мультипликативного функционала на A^+ (задача 21). Получаем биективное соответствие между M_A и $M_{A^+} \setminus \{\varphi_0\}$.

Задача 20. Доказать, что M_A — локально-компактное хаусдорфово пространство, а M_{A^+} — его одноточечная компактификация.

Задача 21. Проверить, что если $\varphi : A \to \mathbb{C}$ — (ненулевой) мультипликативный функционал на A, то формула $\widetilde{\varphi}((a,\lambda)) = \varphi(a) + \lambda$ задает единственное продолжение φ до мультипликативного функционала на A^+.