

### Лекция 4 (11.10.2022)

**Следствие 3.3** (непрерывное функциональное исчисление). Пусть  $a$  — нормальный элемент  $C^*$ -алгебры  $A$  с единицей, а  $f$  — непрерывная функция на  $\text{Sp}(a)$ . Тогда элемент  $f(a) \in A$  определяется как прообраз  $f$  при преобразовании Гельфанда:  $\Gamma = \Gamma_a : C^*(1, a) \rightarrow C(\text{Sp}(a))$ ,  $f(a) := (\Gamma_a)^{-1}(f)$ . Если  $0 \in \text{Sp}(a)$  и  $f(0) = 0$ , то  $f(a) \in C^*(a)$ . Кроме того,  $f(\text{Sp}(a)) = \text{Sp}(f(a))$  и если  $g$  — непрерывная функция на  $f(\text{Sp}(a))$ , то  $g(f(a)) = (g \circ f)(a)$ .

*Доказательство.* Всё уже было доказано, кроме последнего утверждения. Рассмотрим сначала многочлен  $p(\lambda, \bar{\lambda})$  в качестве  $f = f(\lambda)$ . Тогда  $\Gamma(p(a, a^*))$  — функция  $\lambda \mapsto p(\lambda, \bar{\lambda})$ , так что  $\text{Sp}(p(a, a^*))$  совпадает с множеством значений этой функции,  $\{\mu : \mu = p(\lambda, \bar{\lambda}), \lambda \in \text{Sp}(a)\}$ . Приближая  $f$  многочленами, получаем  $f(\text{Sp}(a)) = \text{Sp}(f(a))$  (задача 28).

Аналогично, рассмотрим многочлен  $q(\lambda, \bar{\lambda})$  в качестве  $g$ . Легко увидеть, что

$$q(f(a)) = \lim_{\alpha} (q(p_{\alpha}(a))) = \lim_{\alpha} (q \circ p_{\alpha})(a) = (q \circ f)(a).$$

Теперь приближаем  $g$  многочленами и пользуемся изометричностью обратного преобразования Гельфанда.  $\square$

**Задача 28.** Доказать, что  $f(\text{Sp}(a)) = \text{Sp}(f(a))$  в доказательстве выше, приближая  $f$  многочленами, и правильно сформулировав, что значит, что образ непрерывен при равномерном приближении, и пользуясь изометричностью преобразования Гельфанда.

**Следствие 3.4.** Если  $a$  — нормальный элемент, то  $\|a\| = r(a)$ .

*Доказательство.*  $\|a\| = \|\hat{a}\| = \sup_{\varphi \in M_A} |\hat{a}(\varphi)| = \sup_{\lambda \in \text{Sp}(a)} |\lambda| = r(a)$ .  $\square$

#### 3.1. Положительные элементы.

**Определение 3.5.** Самосопряженный элемент  $a$  в  $C^*$ -алгебре  $A$  с единицей называется *положительным*, если  $\text{Sp}(a) \subset [0, \infty)$ . Если у  $A$  нет единицы, то  $a$  называется *положительным*, если он положителен в  $A^+$ .

Положительность записывается как  $a \geq 0$ . Для двух самосопряженных элементов  $a, b \in A$  мы говорим, что  $a \geq b$ , если  $a - b \geq 0$ .

**Задача 29.** Показать, что если  $a \geq 0$  и  $0 \geq a$ , то  $a = 0$ ; а также, что  $-\|a\|1 \leq a \leq \|a\|1$  для всякого самосопряженного  $a$ .

Теперь рассмотрим другие применения непрерывного функционального исчисления к положительности.

**Следствие 3.6.** Пусть  $a \in A$  — положительный элемент. Тогда существует единственный положительный квадратный корень  $b$  из  $a$ , то есть такой  $b \geq 0$ , что  $b^2 = a$ .

*Доказательство.* Функция  $f(z) = \sqrt{z}$  определена и непрерывна на  $[0, \infty)$ , поэтому  $b = f(a)$  определен. Он самосопряжен и даже положителен (поскольку  $f$  отображает  $[0, \infty)$  в себя) и  $b^2 = f(a)^2 = a$  (по следствию 3.3). Если  $c$  — другой положительный квадратный корень из  $a$ , то  $c = f(c^2) = f(a) = b$ .  $\square$

**Следствие 3.7.** Пусть  $a \in A$  — самосопряженный элемент. Тогда имеются такие положительные элементы  $a_+, a_- \in A$ , что  $a = a_+ - a_-$  и  $a_+ a_- = 0$ .

*Доказательство.* Определим непрерывную функцию  $f : \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty)$ , положив  $f(x) = x$  при  $x \geq 0$  и  $f(x) = 0$  при  $x < 0$ . Обозначим  $g(x) = f(-x)$ . Эти функции удовлетворяют  $f(x) - g(x) = x$  и  $f(x)g(x) = 0$ . Остается положить  $a_+ = f(a)$ ,  $a_- = g(a)$ .  $\square$

**Следствие 3.8.** Для самосопряженного элемента  $a \in A$  следующие условия эквивалентны:

- (i)  $a \geq 0$ ;
- (ii)  $a = b^2$  для некоторого самосопряженного  $b$ ;
- (iii)  $\|\mu 1 - a\| \leq \mu$  для всякого  $\mu \geq \|a\|$ ;
- (iv)  $\|\mu 1 - a\| \leq \mu$  для некоторого  $\mu \geq \|a\|$ .

*Доказательство.* По доказанному, из (i) следует (ii). Кроме того, из (iii) следует (iv) по очевидным соображениям.

Покажем, что из (ii) следует (iii). По предположению,  $a = f(b)$ , где  $f(x) = x^2$ . При этом норма  $f$  на  $\text{Sp}(b)$  равна  $\|a\|$ , так что  $0 \leq \mu - x^2 \leq \mu$  при любом  $\mu \geq \|a\|$  и  $x \in \text{Sp}(b)$ . Поскольку  $\mu 1 - a = (\mu - f)(b)$ , то  $\|(\mu - f)(b)\|$  равняется норме  $\mu - f$  на  $\text{Sp}(b)$ , которая не превосходит  $\mu$ .

Покажем наконец, что из (iv) следует (i). Поскольку для некоторого  $\mu \geq \|a\|$  выполнено  $\|\mu - x\| = \sup_{x \in \text{Sp}(a)} |\mu - x| \leq \mu$ , то ни одно  $x \in \text{Sp}(a)$  не может быть отрицательным.  $\square$

**Следствие 3.9.** Если  $a$  и  $b$  положительны, то и  $a + b$  положителен.

*Доказательство.* Выберем некоторые  $\mu \geq \|a\|$ ,  $\nu \geq \|b\|$ . Тогда  $\|a + b\| \leq \mu + \nu$  и по пункту (iii) следствия 3.8

$$\|(\mu + \nu)1 - (a + b)\| = \|(\mu 1 - a) + (\nu 1 - b)\| \leq \|\mu 1 - a\| + \|\nu 1 - b\| \leq \mu + \nu.$$

Поэтому по пункту (iv) следствия 3.8,  $a + b$  положителен.  $\square$

Следующее предложение 3.11 практически очевидно для операторов в гильбертовом пространстве, но весьма нетривиально для элементов  $C^*$ -алгебры. Нам понадобится следующий результат о спектрах произведений.

**Лемма 3.10.** Если  $a, b \in A$ , то  $\text{Sp}(ab) \cup \{0\} = \text{Sp}(ba) \cup \{0\}$ .

*Доказательство.* Пусть  $0 \neq \lambda \notin \text{Sp}(ab)$ . Это значит, что  $(ab - \lambda 1) = -\lambda(1 - \lambda^{-1}ab)$  обратим, так что существует такой элемент  $u \in A$ , что  $(1 - \lambda^{-1}ab)u = 1$ . Положим  $v = 1 + \lambda^{-1}bua$ . Тогда

$$\begin{aligned} (1 - \lambda^{-1}ba)v &= (1 - \lambda^{-1}ba)(1 + \lambda^{-1}bua) = 1 - \lambda^{-1}ba + \lambda^{-1}bua - \lambda^{-2}babua = \\ &= 1 - \lambda^{-1}ba + \lambda^{-1}b(1 - \lambda^{-1}ab)ua = 1 - \lambda^{-1}ba - \lambda^{-1}ba = 1, \end{aligned}$$

так что  $\lambda \notin \text{Sp}(ba)$ .  $\square$

**Предложение 3.11.** Элемент  $a^*a$  положителен при всяком  $a \in A$ .

*Доказательство.* Поскольку  $a^*a$  самосопряжен, мы можем расписать  $a^*a = b_+ - b_-$  по следствию 3.7. Положим  $c := \sqrt{b_-}$ ,  $t := ac$ . Заметим, что  $f(0) = 0$  для  $f(x) = \sqrt{x}$ , так что  $c$  приближается многочленами от  $b_-$  без свободного члена, а значит,  $cb_+ = 0$ . Имеем:

$$-t^*t = -c(b_+ - b_-)c = b_-^2.$$

Следовательно,  $-t^*t$  положителен.

Запишем  $t$  в виде  $t = x + iy$ , где  $x$  и  $y$  самосопряженные элементы  $A$  (то есть  $x = (t + t^*)/2$ ,  $y = (t - t^*)/2i$ ). Тогда  $t^*t + tt^* = 2(x^2 + y^2)$  является положительным по следствию 3.9. По тому же следствию, видим, что элемент

$$tt^* = (t^*t + tt^*) - t^*t = (t^*t + tt^*) + b_-^2$$

также положителен, то есть  $\text{Sp}(tt^*) \subset [0, \infty)$ . По лемме 3.10,  $\text{Sp}(t^*t) \subset [0, \infty)$ , так что  $t^*t$  положителен. Но он и отрицателен, поэтому  $t^*t = 0$ . Значит,  $b_- = 0$ , поскольку положительный квадратный корень единствен.  $\square$

**Следствие 3.12.** *Если  $b \leq c$ , то  $a^*ba \leq a^*ca$  для любого  $a \in A$ .*

*Доказательство.* Поскольку  $c - b$  положителен, то  $c - b = d^2$  для некоторого самосопряженного  $d$ ; поэтому  $a^*(c - b)a = a^*d^2a = (da)^*(da) \geq 0$ .  $\square$

**Следствие 3.13.** *Если  $a$  и  $b$  обратимы и  $0 \leq a \leq b$ , то  $b^{-1} \leq a^{-1}$ .*

*Доказательство.* Рассмотрим сначала частный случай  $b = 1$ . Тогда  $\text{Sp}(a) \subseteq [0, 1]$ . По теореме об отображении спектра, мы видим, что  $\text{Sp}(a^{-1}) \subseteq [1, \infty)$ , так что  $a^{-1} \geq 1$ . Перейдем к общему случаю. Поскольку, по следствию 3.12,  $b^{-1/2}ab^{-1/2} \leq 1$ , то  $b^{1/2}a^{-1}b^{1/2} \geq 1$ . Умножая это неравенство на  $b^{-1/2}$  с обеих сторон и снова применяя следствие 3.12, получаем  $a^{-1} \geq b^{-1}$ .  $\square$

**3.2. Аппроксимативные единицы.** Пусть  $\Lambda$  — направленное множество. Семейство  $(u_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$  элементов  $C^*$ -алгебры  $A$  называется *аппроксимативной единицей*, если  $\lim_\Lambda \|xu_\lambda - x\| = 0$  для  $x \in A$  (и, следовательно,  $\lim_\Lambda \|u_\lambda x - x\| = 0$ ). Если  $A$  имеет единицу, то можно взять  $u_\lambda = 1$  для любого  $\lambda$ , так что это понятие представляет интерес только для алгебр без единицы. В определение аппроксимативной единицы также включают условия  $0 \leq u_\lambda \leq 1$  and  $u_\lambda \leq u_\mu$  при всяких  $\lambda \leq \mu$  из  $\Lambda$ .

**Теорема 3.14.** *У любой  $C^*$ -алгебры имеется аппроксимативная единица.*

*Доказательство.* Положим  $\Lambda = \{a \in A \mid a \geq 0; \|a\| < 1\}$ . Порядок на  $\Lambda$  задается  $\leq$ . Покажем, что множество элементов  $\Lambda$ , индексированное тавтологическим образом ( $a$  имеет индекс  $a$ ), является аппроксимативной единицей.

Прежде всего, надо проверить, что  $\Lambda$  является направленным множеством, то есть, что для любых двух элементов  $a, b \in \Lambda$  найдется такой  $c \in \Lambda$ , что  $a \leq c$  и  $b \leq c$ . Пусть  $f(t) := \frac{t}{1-t}$  и  $g(t) := \frac{t}{1+t}$ . При этом функция  $f$  определена на  $[0, 1)$ , функция  $g$  — на  $[0, \infty)$  и  $g(f(t)) = t$ . Положим  $x := f(a)$ ,  $y := f(a) + f(b)$ ,  $c := g(y)$ . Поскольку  $0 \leq g(t) < 1$ , то  $c \in \Lambda$ . Из неравенства  $x \leq y$  следует  $1 + x \leq 1 + y$ , так что  $(1 + x)^{-1} \geq (1 + y)^{-1}$  и

$$a = 1 - (1 + x)^{-1} \leq 1 - (1 + y)^{-1} = c.$$

Аналогично получается  $b \leq c$ , и направленность множества  $\Lambda$  проверена.

Теперь проверим, что  $\lim_{\Lambda} \|x - ax\| = 0$  для всякого  $x \in A$ . Поскольку по следствию 3.7 каждый элемент разлагается в линейную комбинацию четырех положительных

$$(6) \quad x = \frac{x + x^*}{2} + i \frac{x - x^*}{2i} = \left( \frac{x + x^*}{2} \right)_+ - \left( \frac{x + x^*}{2} \right)_- + i \left( \frac{x - x^*}{2i} \right)_+ - i \left( \frac{x - x^*}{2i} \right)_-,$$

то достаточно проверить утверждение для  $x \geq 0$ . Поскольку для  $a \in \Lambda$  имеем  $0 \leq 1 - a \leq 1$ , то по следствию 3.12,  $(1 - a)^{1/2}(1 - a)(1 - a)^{1/2} \leq (1 - a)^{1/2}(1 - a)^{1/2} = 1 - a$ . Поэтому

$$\|(1 - a)x\|^2 = \|x^*(1 - a)^2x\| \leq \|x^*(1 - a)x\|,$$

и достаточно проверить, что  $\lim_{\Lambda} \|x(1 - a)x\| = 0$  для любого  $x \geq 0$  из  $A$ , причем без ограничения общности можно считать, что  $\|x\| = 1$ .

Аналогично предыдущему рассуждению, если  $a, b \in \Lambda$  и  $a \leq b$  то  $\|x^*(1 - b)x\| \leq \|x^*(1 - a)x\|$ , так что, при  $x \geq 0$ ,

$$\sup_{b \in \Lambda, b \geq a} \|x(1 - b)x\| = \|x(1 - a)x\|.$$

Поэтому нам нужно показать, что для любого положительного  $x \in A$  нормы один и любого  $\varepsilon > 0$  найдется такой элемент  $a \in \Lambda$ , что  $\|x^*(1 - a)x\| < \varepsilon$ . Положим  $a_n := g(nx)$ ,  $n \in \mathbb{N}$  (см. начало доказательства). Тогда  $\|x(1 - a_n)x\| = \|h(x)\|$ , где  $h(t) := t^2(1 - g(nt)) = \frac{t^2}{1+nt}$ . Для любого  $t \in [0, 1]$  выполняется  $0 \leq h(t) \leq \frac{1}{n}$ , так что  $\|h(x)\| \leq \frac{1}{n}$ . Следовательно,

$$\sup_{b \in \Lambda, b \geq a_n} \|x(1 - b)x\| = \|x(1 - a_n)x\| \leq \frac{1}{n}$$

для любого  $n$ , поэтому  $\lim_{b \in \Lambda} \|x(1 - b)x\| = 0$ .  $\square$

**Определение 3.15.** Аппроксимативная единица называется *счетной*, если множество  $\Lambda$  счетно.

**Следствие 3.16.** У сепарабельной  $C^*$ -алгебры имеется счетная аппроксимативная единица.

*Доказательство.* Выберем плотную последовательность  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in  $A$ . Тогда найдется такой  $a_1 \in A$ ,  $0 \leq a_1$ ,  $\|a_1\| < 1$ , что  $\|x_1 a_1 - x_1\| \leq 1$  (см. доказательство предыдущей теоремы). Предположим по индукции, что мы уже нашли такие  $a_2, \dots, a_n$ ,  $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$ , что для всех  $k = 1, 2, \dots, n$  выполнено  $\|a_k\| < 1$  и  $\|x_i a_k - x_i\| \leq \frac{1}{k}$  при  $i = 1, 2, \dots, k$ . Теперь найдем такой элемент  $a_{n+1} \geq a_n$  с нормой  $\|a_{n+1}\| < 1$ , что  $\|x_i a_{n+1} - x_i\| \leq \frac{1}{n+1}$  при  $i = 1, 2, \dots, n+1$ . Поскольку последовательность  $(x_n)$  плотна в  $A$ , то по индукции получаем такую неубывающую последовательность  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  положительных элементов единичного шара, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x a_n - x\| = 0$  для каждого  $x \in A$ .  $\square$

**Задача 30.** Доказать, что обратное неверно: алгебра со счетной аппроксимативной единицей не обязана быть сепарабельной.