Лекция 5 (18.10.2022)

3.3. **Идеалы, факторы и гомоморфизмы.** Под *идеалом* C^*-алгебры мы всегда будем подразумевать двусторонний идеал, замкнутый по норме (для максимальных идеалов в коммутативном случае это получалось автоматически).

Лемма 3.17. *Всякий идеал I в C^*-алгебре является самосопряженным: $I = I^*$.*

Доказательство. Если $I \subset A$ — идеал, то $B := I \cap I^* \subseteq A$ является C^*-подалгеброй. При этом $B \supset I \cdot I^*$. Пусть (u_λ) — аппроксимативная единица в B, а $j \in I$. Тогда

$$\lim_{\lambda\in\Lambda} \|j^*u_\lambda - j^*\|^2 = \lim_{\lambda\in\Lambda} \|u_\lambda(jj^*u_\lambda - jj^*) - (jj^*u_\lambda - jj^*)\| \leqslant 2 \lim_{\lambda\in\Lambda} \|jj^*u_\lambda - jj^*\| = 0.$$

Поскольку $u_\lambda \in I$, то $j^*u_\lambda \in I$, так что $j^* \in I$, поскольку I замкнут. □

Лемма 3.18. *Если $x^*x \leqslant a$ в A, то существует такой $b \in A$, что $\|b\| \leqslant \|a\|^{1/4}$ и $x = ba^{1/4}$.*

Доказательство. Положим $b_n := x(a + \frac{1}{n}1)^{-1/2}a^{1/4}$ (этот элемент лежит в A, даже если у A нет единицы, но нам удобно в этом случае производить вычисления в A^+). Пусть также

$$d_{nm} := \left(a + \frac{1}{n}1\right)^{-1/2} - \left(a + \frac{1}{m}1\right)^{-1/2}, \qquad f_n(t) := t^{3/4}\left(t + \frac{1}{n}\right)^{-1/2}.$$

Тогда последовательность функций $(f_n(t))$ сходится к $f(t) := t^{1/4}$ равномерно на $[0, \|a\|]$, поскольку в силу $u^2 + v^2 \geqslant 2uv$ имеем

$$\left(t^{1/4}\left(1 - \frac{t^{1/2}}{(t+1/n)^{1/2}}\right)\right)^2 = t^{1/2}\frac{t + 1/n + t - 2t^{1/2}(t+1/n)^{1/2}}{t + 1/n} <$$

$$< t^{1/2}\frac{t + 1/n + t - 2t}{t + 1/n} = t^{1/2}\frac{1/n}{t + 1/n} = \frac{2\sqrt{t/n}}{t + 1/n} \cdot \frac{1}{2\sqrt{n}} \leqslant \frac{1}{2\sqrt{n}}.$$

Значит,

$$\begin{aligned} \|b_n - b_m\|^2 &= \|xd_{nm}a^{1/4}\|^2 = \|a^{1/4}d_{nm}x^*xd_{nm}a^{1/4}\| \leqslant \|a^{1/4}d_{nm}ad_{nm}a^{1/4}\| = \\ &= \|d_{nm}a^{3/4}\|^2 = \|f_n(a) - f_m(a)\|^2 = \sup_{t\in[0,\|a\|]} |f_n(t) - f_m(t)|. \end{aligned}$$

Таким образом, поскольку f_n — последовательность Коши, то и b_n — тоже. Положим $b := \lim_{n\to\infty} b_n$. Тогда $ba^{1/4} = \lim_{n\to\infty} b_n a^{1/4} = \lim_{n\to\infty} x(a + \frac{1}{n}1)^{-1/2}a^{1/2} = x$. □

Определение 3.19. Подалгебра $B \subset A$ называется *наследственной*, если для любых положительных $b \in B$ и $a \in A$, из условия $0 \leqslant a \leqslant b$ следует, что $a \in B$.

Задача 31. Доказать, что положительный элемент произвольной C^*-подалгебры является положительным элементом всей алгебры.

Лемма 3.20. *Пусть $I \subset A$ — идеал, а $j \in I$ — положительный элемент. Если $a^*a \leqslant j$, то $a \in I$. В частности, любой идеал — наследственная подалгебра.*

Доказательство. Разложим $a = bj^{1/4}$ в соответствии с леммой 3.18. При этом $j^{1/4} \in C^*(j) \subset I$, а значит, $a \in I$. □

Если $I \subset A$ — идеал, то можно определить банахову фактор-алгебру A/I с нормой $\|a+I\| := \inf_{j\in I}\|a+j\|$. Это — инволютивная алгебра: так как I — самосопряженный, то $\|(a+I)^*\| = \|a^*+I\| = \|a+I\|$. Для краткости будем обозначать $a+I$ через $\dot{a} \in A/I$.

Лемма 3.21. *Инволютивная алгебра A/I является C^*-алгеброй.*

Доказательство. Необходимо проверить только C^*-свойство. Пусть $(u_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ — аппроксимативная единица I (заметим, что идеалы, как правило, не имеют единицы, и уж во всяком случае, собственный идеал не содержит единицу A, даже если таковая имеется). Покажем прежде всего, что

$$\|\dot{a}\| = \lim_{\lambda\in\Lambda}\|a - au_\lambda\|. \tag{7}$$

Действительно, поскольку $u_\lambda \in I$, то $\|\dot{a}\| \le \|a-au_\lambda\|$. Для доказательства обратного неравенства выберем произвольно $\varepsilon > 0$. Тогда найдется такой элемент $j \in I$, что $\|\dot{a}\| \geqslant \|a-j\| - \varepsilon$. Имеем

$$\lim_{\lambda\in\Lambda}\|a-au_\lambda\| \leqslant \lim_{\lambda\in\Lambda}\|a-au_\lambda-(j-ju_\lambda)\| + \|j-ju_\lambda\| = \lim_{\lambda\in\Lambda}\|a-au_\lambda-(j-ju_\lambda)\|.$$

Записывая в A^+, где имеет место $a-au_\lambda-(j-ju_\lambda) = (a-j)(1-u_\lambda)$, получаем оценку $\|(a-j)(1-u_\lambda)\| \leqslant \|a-j\| < \|\dot{a}\|+\varepsilon$. В силу произвольности $\varepsilon > 0$ получаем (7).

Теперь, вычисляя в A^+, находим оценку

$$\begin{aligned}\|\dot{a}^*\dot{a}\| &= \lim_{\lambda\in\Lambda}\|a^*a(1-u_\lambda)\| \geqslant \lim_{\lambda\in\Lambda}\|(1-u_\lambda)a^*a(1-u_\lambda)\| = \\ &= \lim_{\lambda\in\Lambda}\|(a(1-u_\lambda)\|^2 = \|\dot{a}\|^2.\end{aligned}$$

Обратное неравенство $\|\dot{a}^*\dot{a}\| \le \|\dot{a}\|^2$ верно в любой инволютивной банаховой алгебре. □

Определение 3.22. Пусть A и B — C^*-алгебры. Назовем *$*$-гомоморфизмом* из A в B любой гомоморфизм φ, сохраняющий инволюцию: $\varphi(a^*) = \varphi(a)^*$. Если обе алгебры имеют единицу, то φ называется *унитальным*, если $\varphi(1_A) = 1_B$.

Задача 32. Пусть $\varphi : A \to B$ — $*$-гомоморфизм алгебр без единицы. Доказать, что существует единственный унитальный $*$-гомоморфизм $\varphi^+ : A^+ \to B^+$, продолжающий φ. Указание: единственная возможность для определения φ^+ заключается в требовании унитальности: $\varphi^+(1) = 1$.

Задача 33. Пусть $\varphi : A \to B$ — $*$-гомоморфизм алгебр, причем A без единицы, а B — с единицей. Доказать, что существует единственный унитальный $*$-гомоморфизм $\varphi^{(+)} : A^+ \to B$, продолжающий φ. Указание — то же, что и выше.

Теорема 3.23. *Пусть $\varphi : A \to B$ — ненулевой $*$-гомоморфизм. Тогда $\|\varphi\| = 1$ (в частности, он непрерывен) и $\varphi(A)$ является C^*-подалгеброй B. Если φ инъективен, то он является изометрическим (на образ).*

Доказательство. Если у алгебры A нет единицы, то будем рассматривать φ^+ из задачи 32 или $\varphi^{(+)}$ из задачи 33. Если у алгебры A есть единица, то можем считать, что и у B — тоже есть (если нет — то присоединим, не требуя унитальности гомоморфизма). При этом $\varphi(1_A) = p$ — самосопряженный идемпотент ($p^2 = p$), пространство $B_p := pBp$ — подалгебра B (см. задачу 34) с единицей $p = p \cdot 1_B \cdot p$, а φ, рассматриваемый как гомоморфизм в B_p, является унитальным.

Таким образом, при доказательстве можем ограничиться случаем унитального гомоморфизма $\varphi : A \to B$ алгебр с единицей.

Чтобы различать спектр элемента в A и B, будем записывать Sp_A (соотв., Sp_B) для спектра элементов в A (соотв., в B).

Пусть $a = a^* \in A$. Тогда $\mathrm{Sp}_B(\varphi(a)) \subset \mathrm{Sp}_A(a)$, поскольку φ является унитальным $*$-гомоморфизмом алгебр и $\|\varphi(a)\| = r(\varphi(a)) \leqslant r(a) = \|a\|$. Для элемента $a \in A$ общего вида имеем $\|\varphi(a)\|^2 = \|\varphi(a^*a)\| \leqslant \|a^*a\| = \|a\|^2$, так что $\|\varphi\| \leqslant 1$, то есть φ непрерывен и не увеличивает норму.

Предположим теперь, что φ инъективен, но не изометричен. Тогда найдется такой элемент $a \in A$, что $\|\varphi(a)\| < \|a\|$. Значит, $\|\varphi(b)\| < \|b\|$ при $b := a^*a$. Обозначим $\|\varphi(b)\| =: r$ и $\|b\| =: s$. Пусть p — непрерывная вещественная функция, который удовлетворяет условиям $p(t) = 0$ при $t \in [0, r]$ и $p(s) = 1$. Тогда $\|\varphi(p(b))\| = \|p(\varphi(b))\| = \sup_{\lambda \in \mathrm{Sp}_B(\varphi(b))} |p(\lambda)| = 0$, в то время как $\|p(b)\| = \sup_{\lambda \in \mathrm{Sp}_A(b)} |p(\lambda)| \geqslant 1$. Противоречие с инъективностью. (Условие коммутирования очевидно для многочленов, p_n, равномерно приближающих p, а в пределе получаем для p.)

В случае общего (не обязательно инъективного) $*$-гомоморфизма, заметим, что $I = \mathrm{Ker}\,\varphi$ замкнут, поскольку φ непрерывен, так что I — идеал в A. Поэтому φ индуцирует инъективный $*$-гомоморфизм $\dot\varphi : A/I \to B$ по правилу $\dot\varphi(\dot a) = \varphi(a)$. Тогда, по доказанному, $\dot\varphi$ является изометрическим, а $\varphi(A) = \dot\varphi(A/I)$ замкнута в B, так что является C^*-подалгеброй. Поскольку φ — ненулевой, то имеется $a \in A$ с $\varphi(a) \neq 0$. В силу изометричности $\dot\varphi$, имеем равенство $\|\dot a\| = \|\dot\varphi(\dot a)\| = \|\varphi(a)\|$. При этом для любого $\varepsilon > 0$ найдется такой элемент $c \in A$, что $\dot c = \dot a$ и $\|c\| < \|\dot a\| + \varepsilon$. Значит, $\|\varphi(c)\| > \|c\| - \varepsilon$. В силу произвольности ε, получаем $\|\varphi\| \geqslant 1$, так что $\|\varphi\| = 1$. □

Задача 34. Доказать, что алгебра B_p замкнута, получив предварительно равенство $pBp = \mathrm{Ker}(L_{1-p}) \cap \mathrm{Ker}(R_{1-p})$, где L_{1-p} и R_{1-p} — линейные операторы левого и правого умножения на $1-p$ в B, заданные $L_{1-p} : b \mapsto (1-p)b$ и $R_{1-p} : b \mapsto b(1-p)$.

Задача 35. Развить результат предыдущей задачи, проверив разложение в прямую сумму замкнутых подпространств $B = pBp \oplus pB(1-p) \oplus (1-p)Bp \oplus (1-p)B(1-p)$, причем, если записывать четверку (a, b, c, d), представляющую элемент данной прямой суммы в виде матрицы $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, то умножение в B перейдет при изоморфизме в умножение матриц по стандартному правилу.

Задача 36. Вывести из теоремы 3.23 утверждение $\varphi(f(a)) = f(\varphi(a))$ для любого нормального a и непрерывной на нужном множестве f (а не только для многочлена).

Задача 37. Продумать доказательство теоремы 3.23 через редукцию к отображению коммутативных подалгебр.

Следствие 3.24. *Пусть $I \subset A$ — идеал, а $B \subset A$ — C^*-подалгебра. Тогда $I + B$ совпадает с C^*-подалгеброй $C^*(I, B)$, порожденной I и B.*

Доказательство. Очевидно, что $I + B \subset C^*(I, B)$ и является инволютивной подалгеброй. Пусть $q : A \to A/I$ — $*$-гомоморфизм факторизации. Мы знаем из предыдущей теоремы, что $q(B)$ замкнут в A/I, так что $I + B = q^{-1}(q(B))$ замкнуто в A. Значит, $I + B$ является C^*-алгеброй, содержащейся в $C^*(I, B)$. □

До сих пор мы проявляли большую осторожность при рассмотрении спектра элемента в C^*-алгебре и ее C^*-подалгебре. Следующая лемма показывает, что это не так важно.

Лемма 3.25. *Пусть $B \subset A$ — C^*-подалгебра с единицей C^*-алгебры с единицей, причем $1_A = 1_B$, а $a \in B$. Тогда* $\mathrm{Sp}_B(a) = \mathrm{Sp}_A(a)$.

Доказательство. Очевидно, что если элемент имеет обратный в B, то и в A тоже, откуда $\mathrm{Sp}_A(a) \subset \mathrm{Sp}_B(a)$. Обратное включение следует из утверждения, что если a обратим в A, то его обратный принадлежит B. Чтобы доказать это, рассмотрим сначала случай $a = a^*$. Тогда C^*-алгебра $C = C^*(a, a^{-1})$, порожденная a и a^{-1}, является коммутативной унитальной C^*-подалгеброй A, а значит, она изоморфна некоторой алгебре функций $C(X)$. Пусть $\hat{a}$ обозначает образ a при этом изоморфизме. Тогда $0 \notin \mathrm{Sp}_{C(X)}(\hat{a}) \subset \mathbb{R}$. Выберем такие многочлены p_n, что $p_n(t)$ сходится равномерно к t^{-1} на $\mathrm{Sp}_{C(X)}(\hat{a})$. Тогда $\widehat{a^{-1}} = \lim_{n\to\infty} p_n(\hat{a})$, так что $a^{-1} = \lim_{n\to\infty} p_n(a) \in C^*(a) \subset B$.

Для элемента a общего вида, если a^{-1} существует в A, то $a^{-1}(a^*)^{-1} = (a^*a)^{-1} \in B$ по доказанному. Поэтому $a^{-1} = (a^*a)^{-1}a^* \in B$. □

Задача 38. Показать на примере, что без условия $1_A = 1_B$ предыдущая теорема не имеет места.