Лекция 6 (25.10.2022)

3.4. **Топологии на $\mathbb{B}(H)$ и алгебры фон Неймана.** Кроме топологии нормы, имеются и другие полезные топологии на C^*-алгебре $\mathbb{B}(H)$.

Определение 3.26. *Сильная топология* задается системой полунорм $a \to \|a\xi\|$, $\xi \in H$.

Слабая топология задается системой полунорм $a \to (a\xi, \eta)$, $\xi, \eta \in H$.

Теорема 3.27. *Для линейного функционала $\varphi : \mathbb{B}(H) \to \mathbb{C}$ следующие условия эквивалентны:*

(i) Существуют такие $\xi_k, \eta_k \in H$, $k = 1, \dots, n$, что $\varphi(a) = \sum_{k=1}^{n} (a\xi_k, \eta_k)$ для любого $a \in \mathbb{B}(H)$;

(ii) φ слабо непрерывен;

(iii) φ сильно непрерывен.

Доказательство. Очевидно, что (i)$\Longrightarrow$(ii) $\Longrightarrow$(iii). Покажем, что из (iii) следует (i).

Сильная непрерывность φ означает, что прообраз $\{a : |\varphi(a)| < 1\}$ открытого единичного диска является открытым множеством в сильной топологии, то есть найдутся такие положительные константы $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ и векторы $\xi_1, \dots, \xi_n$, что для любого $a \in \mathbb{B}(H)$ из $\|a\xi_k\| < \varepsilon_k$ (для всех $k = 1, \dots, n$) следует, что $|\varphi(a)| < 1$. Меняя при необходимости длину этих векторов, видим, что эквивалентным образом можно сказать, что существуют такие векторы $\xi_1, \dots, \xi_n$, что для любого $a \in \mathbb{B}(H)$ из $\max_k \|a\xi_k\| \leqslant 1$ следует, что $|\varphi(a)| \leqslant 1$. Тогда

$$|\varphi(a)| \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} \|a\xi_k\|^2 \right)^{1/2}. \tag{8}$$

Действительно, если $|\varphi(a)|^2 > \sum_{k=1}^{n} \|a\xi_k\|^2$ для некоторого a, то $|\varphi(a)| > \|a\xi_k\|$ для всех k, так что, так как их конечное число, можно найти такое $\alpha \in \mathbb{R}$, что $|\varphi(\alpha a)| > 1$, а $\max_k \|\alpha a\xi_k\| < 1$ (например, $\alpha^{-1} := (|\varphi(a)| + \max \|a\xi_k\|)/2$). Противоречие.

Положим $K := \oplus_{k=1}^{n} H$. Алгебра $\mathbb{B}(K)$ может быть отождествлена с алгеброй $n \times n$-матриц с элементами из $\mathbb{B}(H)$. Пусть $\rho : \mathbb{B}(H) \to \mathbb{B}(K)$ отображает $a \in \mathbb{B}(H)$ в диагональную матрицу со всеми диагональными элементами, равными a.

Обозначим $\xi := \xi_1 \oplus \dots \oplus \xi_n \in K$ и заметим, что, положив $\psi(\rho(a)\xi) = \varphi(a)$, мы получим линейный функционал на замкнутом подпространстве $L \subset K$, где L — замыкание пространства $L_0 := \{\rho(a)\xi \mid a \in \mathbb{B}(H)\}$. Действительно, сначала надо проверить корректность определения ψ на L_0: если $\rho(a)(\xi) = \rho(b)(\xi)$, то $(a-b)\xi_k = 0$ для $k = 1, \dots, n$. В частности, для сколь угодно большого $R > 0$ имеем $\|R(a-b)\xi_k\| \leqslant 1$, а значит, $|\varphi(R(a-b))| \leqslant 1$. Поэтому $|\varphi(a-b)| \leqslant 1/R$. В силу произвольности R получаем, что $\varphi(a-b) = 0$ и, тем самым, определение корректно на L_0. Из (8) видим, что $|\psi(\rho(a))| \leqslant \|\rho(a)\xi\|$, так что $|\psi(\zeta)| \leq \|\zeta\|$ для любого $\zeta \in L_0$, а значит, и L. Итак, ψ — ограниченный функционал на L. По теореме Рисса о представлении функционалов, найдется такой вектор $\eta \in L \subset K$, что $\psi(\zeta) = (\zeta, \eta)$ для всех $\zeta \in L$ (считаем эрмитово произведение линейным по первому аргументу), так что $\varphi(a) = (\rho(a)\xi, \eta)$. Разложив на компоненты $\eta = \eta_1 \oplus \dots \oplus \eta_n$, получаем $(\rho(a)\xi, \eta) = \sum_{k=1}^{n} (a\xi_k, \eta_k)$. □

Следствие 3.28. *В $\mathbb{B}(H)$ выпуклое множество замкнуто в слабой топологии тогда и только тогда, когда оно замкнуто в сильной.*

Доказательство. Это сразу следует из предыдущей теоремы, поскольку, по теореме Хана-Банаха, замкнутые выпуклые множества получаются как пересечение замкнутых полупространств, соответствующих линейным функционалам. □

Определение 3.29. *Алгеброй фон Неймана* называется C^*-подалгебра $\mathbb{B}(H)$, содержащая единицу (тождественный оператор) и замкнутая в слабой топологии.

Простейшими примерами являются $\mathbb{C}$ and $\mathbb{B}(H)$ (на самом деле, первая — частный случай второй).

Определение 3.30. Для множества $S \subseteq \mathbb{B}(H)$ обозначим через S' его *коммутант*, то есть множество всех таких операторов $a \in \mathbb{B}(H)$, что $as = sa$ для всякого $s \in S$.

Задача 39. Проверить, что

- Если S — самосопряженное, то и S' тоже.
- Коммутант любого множества — алгебра с единицей.
- Коммутант любого множества слабо замкнут.
- Таким образом, S' — алгебра фон Неймана для любого самосопряженного множества S.
- Если $S_1 \subset S_2$, то $S_1' \supset S_2'$.
- Всегда $S \subset S''$.
- Поэтому $S' = S'''$, $S'' = S''''$ и т.д.

Теорема 3.31 (фон Неймана о бикоммутанте)**.** *Пусть A — C^*-подалгебра $\mathbb{B}(H)$, содержащая единичный оператор. Тогда следующие условия эквивалентны.*

(i) $A = A''$;
(ii) A слабо замкнута;
(iii) A сильно замкнута.

Доказательство. Поскольку A является выпуклым подмножеством, то (ii) и (iii) эквивалентны по следствию 3.28. Поскольку A'' слабо замкнуто, то из (i) следует (ii). Остается показать, что из (iii) следует (i).

Для вектора $\xi \in H$ обозначим через p проекцию на замыкание V линейного подпространства, образованного векторами $a\xi$, $a \in A$.

Таким образом, $p\eta = \eta$ при $\eta \in V$. Поскольку $1 \in A$, то $\xi \in V$, так что $p\xi = \xi$. Поэтому $pap\zeta = pa\eta = a\eta = ap\zeta$ для любого $\zeta \in H$, где обозначено $\eta = p\zeta$. Так что $pap = ap$ для любого $a \in A$. Отсюда $pa = (a^*p)^* = (pa^*p)^* = pap$ и получаем $ap = pa$, то есть $p \in A'$. Пусть $b \in A''$. Тогда $pb = bp$, так что $pb\xi = bp\xi = b\xi$ и $b\xi \in V$. Таким образом, для всякого $\varepsilon > 0$ найдется элемент $a \in A$, для которого $\|(b-a)\xi\| < \varepsilon$.

Теперь рассмотрим некоторые $\xi_1, \ldots, \xi_n \in H$ и определим $\xi := \xi_1 \oplus \ldots \oplus \xi_n \in K := H \oplus \ldots \oplus H$. Пусть $\rho : \mathbb{B}(H) \to \mathbb{B}(K)$ — диагональное вложение. Легко видеть, что $\rho(A)'$ состоит из всех $n\times n$-матриц с элементами из A', а $\rho(A'') = \rho(A)''$ (задача 40). Применяя к этой ситуации первую часть доказательства, получаем, что для любого $b \in A''$ и всякого $\varepsilon > 0$ существует такой элемент $a \in A$, что $\|(\rho(b) - \rho(a))\xi\| < \varepsilon$. Это означает, что $\sum_{k=1}^{n} \|(b-a)\xi_k\|^2 = \|(\rho(b) - \rho(a))\xi\|^2 < \varepsilon^2$, так что мы можем сильно приблизить $b \in A''$ некоторым $a \in A$. □

Задача 40. Проверить, что $\rho(A)'$ состоит из всех $n\times n$-матриц с элементами из A', а $\rho(A'') = \rho(A)''$.

Следствие 3.32. *Если A — алгебра фон Неймана, то и A' — алгебра фон Неймана.*

Определение 3.33. *Центром* алгебры называется множество ее элементов, коммутирующих со всеми ее элементами.

Следствие 3.34. *Если A — алгебра фон Неймана, то и ее центр — алгебра фон Неймана.*

Доказательство. Для подалгебры $A \subseteq \mathbb{B}(H)$ имеем $Z = A \cap A'$. □

Пусть $A \subset \mathbb{B}(H)$ является C^*-алгеброй, содержащей единичный оператор. Тогда теорема о бикоммутанте утверждает, что A слабо (сильно) плотна в A''. В этом результате есть тот недостаток, что приближение происходит элементами с, вообще говоря, неконтролируемой нормой. Это преодолевается следующей теоремой, которую мы приведем без доказательства.

Теорема 3.35 (Капланского о плотности)**.** *Единичный шар A слабо (сильно) плотен в единичном шаре A''. То же самое верно для множеств положительных элементов в этих единичных шарах и для множеств унитарных элементов.*

Определение 3.36. Если центр Z алгебры фон Неймана A состоит только из скалярных операторов (то есть $Z = \mathbb{C}1$), то A называется *фактором.*

Замечание 3.37. Следует отметить, что кроме непрерывного функционального исчисления для самосопряженных операторов, имеется борелевское функциональное исчисление — вместо приближения по норме непрерывных функций полиномами тут происходит приближение полиномами борелевских функций, а соответствующие операторы будут сходиться в слабой топологии. Точнее, пусть многочлены p_i сходятся монотонно и поточечно к борелевской функции f на спектре самосопряженного оператора $a \in \mathbb{B}(H)$ Тогда $p_i(a)$ — сильно сходящаяся последовательность операторов (это утверждение из стандартного курса (см. например, Садовничий "Теория операторов" §7 и 11). Поскольку все многочлены коммутируют с коммутантом самосопряженного оператора, то для любой борелевской функции f на спектре самосопряженного оператора a, оператор $f(a)$ лежит в $\{a\}''$.

4. Представления

Определение 4.1. *Представлением* C^*-алгебры A в гильбертовом пространстве H называется $*$-гомоморфизм из A в $\mathbb{B}(H)$.

Определение 4.2. Представление C^*-алгебры A называется *алгебраически неприводимым*, если в H нет инвариантных линейных подпространств (при действии операторами из образа представления). Представление *топологически неприводимо*, если нет замкнутых инвариантных подпространств.

Скоро мы увидим, что для C^*-алгебр эти два понятия совпадают.

Лемма 4.3. *Представление π топологически неприводимо тогда и только тогда, когда $\pi(A)' = \mathbb{C}1$.*

Доказательство. Если $\pi(A)'$ содержит что-то, кроме скаляров, то оно содержит и самосопряженный нескалярный оператор (это сразу следует из разложения нескалярного оператора в линейную комбинацию двух самосопряженных $a = \frac{a+a^*}{2} + i \cdot \frac{a-a^*}{2i}$).

Применяя борелевское функциональное исчисление (см. замечание 3.37) к этому самосопряженному оператору b, можем получить собственный проектор p в $\pi(A)'$. Именно, если оператор нескалярный, то у него, по крайней мере, две различные точки в спектре, скажем, t_0 и t_1, и надо рассмотреть борелевскую функцию f, принимающую значения 0 и 1, причем $f(t_0) = 0$, $f(t_1) = 1$ (задача 41). (Можно также не применять исчисление, а просто взять подходящие спектральные проекторы из стандартной спектральной теоремы, которые по построению обладают необходимыми условиями коммутирования). Тогда pH — замкнутое инвариантное подпространство, так как $p \in \pi(A)'$.

Обратно, пусть $L \subset H$ — замкнутое $\pi(A)$-инвариантное подпространство, а $p \in \mathbb{B}(H)$ — проектор на это подпространство. Тогда $\pi(a)p = p\pi(a)p$ для любого $a \in A$. Поэтому $p\pi(a) = (\pi(a^*)p)^* = (p\pi(a^*)p)^* = p\pi(a)p = \pi(a)p$ и $p \in \pi(A)'$. При этом p не является скалярным. □

Задача 41. Проверить в доказательстве выше, что $f(b)$ — собственный проектор, поскольку $f^2 = f$ и $\mathrm{Sp}(f(b)) = \{0, 1\}$.

Задача 42. Доказать более общий факт: если самосопряженный элемент a в C^*-алгебре с единицей имеет $\mathrm{Sp}(a) = \{0, 1\}$, то a — нескалярный идемпотент.

Лемма 4.4. *Пусть π — топологически неприводимое представление C^*-алгебры A в гильбертовом пространстве H. Тогда для любых $t \in \mathbb{B}(H)$, конечномерного подпространства $L \subset H$ и $\varepsilon > 0$ существует такой элемент $a \in A$, что $\|a\| \leq \|t|_L\|$ и $\|(\pi(a) - t)|_L\| < \varepsilon$.*

Доказательство. Так как π топологически неприводимо, то по лемме 4.3 $\pi(A)'$ совпадает со скалярами, а значит, $\pi(A)'' = \mathbb{B}(H)$. Поэтому $\pi(A)$ плотно в $\mathbb{B}(H)$ в слабой (сильной) топологии. Без ограничения общности, можем считать, что $\|t|_L\| = 1$. Положим $s = tp_L$, где p_L — проектор на L. Поскольку L конечномерно, то, по теореме Капланского о плотности, найдется такой $b \in A$, что $\|\pi(b)\| \leqslant 1$ и $\|(\pi(b) - s)|_L\| < \varepsilon/2$. Тогда имеется такой элемент $c \in A$, что $\pi(c) = \pi(b)$ и $\|c\| < \|\pi(b)\|(1 + \varepsilon/2)$. Положим $a := \frac{c}{1+\varepsilon/2}$. Тогда $\|a\| \leqslant 1$ и

$$\|(\pi(a) - t)|_L\| \leqslant \|(\pi(c) - t)|_L\| + \|\pi(a) - \pi(c)\| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

□