Лекция 7 (01.11.2022)

Лемма 4.5. *Пусть π — топологически неприводимое представление C^*-алгебры A в гильбертовом пространстве H. Тогда для любых $t \in \mathbb{B}(H)$, конечномерного подпространства $L \subset H$ и $\varepsilon > 0$ найдется такой $a \in A$, что $\pi(a)|L = t|_L$ и $\|a\| \leqslant \|t\| + \varepsilon$.*

Доказательство. По предыдущей лемме, найдется такой элемент $a_0 \in A$, что $\|a_0\| \leqslant \|t\|$ и $\|(\pi(a_0) - t)|_L\| < \varepsilon/2$. По индукции можем найти для каждого n такой элемент $a_n \in A$, что $\|a_n\| \leqslant 2^{-n}\varepsilon$ и $\|(\sum_{k=0}^{n} \pi(a_n) - t)p_L|\| < 2^{-n-1}\varepsilon$. Действительно, предположим, что элементы найдены для некоторого n и всех меньших. Применяя предыдущую лемму к $s = -\sum_{k=0}^{n} \pi(a_k) + t$, тому же подпространству L и $2^{-n-2}\varepsilon$, находим такой элемент a_{n+1}, что $\|a_{n+1}\| \leqslant 2^{-n-1}\varepsilon$ и $\|(\sum_{k=1}^{n+1} \pi(a_k) - t)p_L\| < 2^{-n-2}\varepsilon$. Теперь положим $a = \sum_{k=0}^{\infty} a_k$. Тогда $a \in A$ и очевидно, что $\|a\| \leqslant \|t\| + \varepsilon$ и $a|_L = t|_L$. □

Теорема 4.6. *Всякое топологически неприводимое представление C^*-алгебры является топологически неприводимым.*

Доказательство. Предположим противное Пусть $V \subset H$ — незамкнутое инвариантное пространство, а $\overline{V}$ — его замыкание. Оно тоже является инвариантным подпространством (так как действие непрерывно), так что $\overline{V} = H$. Возьмем $\eta \in H \setminus V$, для определенности нормы 1. Пусть $\xi \in V$ — ненулевой вектор, а t — такой оператор в H, что $t\xi = \eta$. Тогда по предыдущей лемме найдется такой $a \in A$, что $\pi(a)\xi = \eta$. Противоречие с инвариантностью V. □

4.1. **Положительные линейные функционалы.**

Определение 4.7. Линейный функционал (пока не требуем непрерывности, см. лемму 4.10 ниже) φ на C^*-алгебре A называется *положительным*, если $\varphi(a) \geqslant 0$ для любого $a \geqslant 0$. Если положительный линейный функционал непрерывен и имеет норму 1, то он называется *состоянием.*

Пример 4.8. Если π — представление A в гильбертовом пространстве H, а $\xi \in H$, то функционал $\varphi(a) := (\xi, \pi(a)\xi)$ является положительным. Если у A имеется единица и $\|\xi\| = 1$, то такое φ является состоянием.

С каждым положительным линейным функционалом φ можно связать полуторалинейную форму на A, заданную формулой $\langle a, b\rangle := \varphi(a^*b)$, то есть форма $\langle \cdot, \cdot\rangle$ линейна по второму аргументу, сопряженно линейна по первому аргументу. По определению положительности функционала $\langle a, a\rangle = \varphi(a^*a) \geqslant 0$ для любого $a \in A$. Поэтому по следующей лемме она эрмитово симметрична: $\langle b, a\rangle = \overline{\langle a, b\rangle}$.

Лемма 4.9 (из курса линейной алгебры)**.** *Если у полуторалинейной формы $\langle a, a\rangle \in \mathbb{R}$ для любого a, то она эрмитово симметрична.*

Доказательство. Запишем поляризационные тождества

$$\langle a + b, a + b\rangle = \langle a, a\rangle + \langle a, b\rangle + \langle b, a\rangle + \langle b, b\rangle, \tag{9}$$

$$\langle a + ib, a + ib\rangle = \langle a, a\rangle + \langle a, ib\rangle + \langle ib, a\rangle + \langle ib, ib\rangle = \langle a, a\rangle + i(\langle a, b\rangle - \langle b, a\rangle) + \langle b, b\rangle. \tag{10}$$

Из первого получаем, что $\langle a, b\rangle + \langle b, a\rangle$ является вещественным, а из второго — что $\langle a, b\rangle - \langle b, a\rangle$ является мнимым. Значит, $\overline{\langle a, b\rangle} = \langle b, a\rangle$. □

Таким образом, $\langle a, b\rangle$ — положительная эрмитова форма и, значит, для нее выполняется неравенство Коши-(Шварца-Буняковского): $|\langle a, b\rangle|^2 \leq \langle a, a\rangle\langle b, b\rangle$, то есть $|\varphi(a^*b)|^2 \leqslant \varphi(a^*a)\varphi(b^*b)$.

Лемма 4.10. *Положительные линейные функционалы непрерывны. Если u_λ — аппроксимативная единица в A, то $\|\varphi\| = \lim_{\lambda\in\Lambda}\varphi(u_\lambda)$. В частности, если A имеет единицу, то $\|\varphi\| = \varphi(1)$.*

Доказательство. Рассмотрим сначала унитальный случай. Если $0 \leqslant a \leqslant 1$, то, поскольку φ положителен, получаем, что $0 \leqslant \varphi(a) \leqslant \varphi(1)$. Для $x \in A$ с $\|x\| \leqslant 1$ имеем $0 \leqslant x^*x \leqslant 1$, так что $|\varphi(x)|^2 = |\varphi(1\cdot x)|^2 \leqslant \varphi(1)\cdot\varphi(x^*x) \leqslant \varphi(1)$ по неравенству Коши-Шварца-Буняковского. Значит, $\|\varphi\| \leqslant \varphi(1) \leqslant \|\varphi\|$.

Теперь рассмотрим неунитальный случай. Предположим, что φ не ограничен на единичном шаре A. Тогда он не ограничен на подмножестве единичного шара, состоящем из положительных элементов (поскольку любой элемент a разлагается в линейную комбинация из четырех положительных элементов с нормами, не превосходящими $\|a\|$, см. (6)). Таким образом, для каждого $k \in \mathbb{N}$ существует такой положительный элемент $a_k \in A$, что $\|a_k\| \leq 1$ и $\varphi(a_k) > 2^k$. Положим $a := \sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_k}{2^k} \in A$. Тогда для любого $n \in \mathbb{N}$ имеем $\geqslant \sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{2^k}$ и

$$\varphi(a) \geqslant \varphi\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{2^k}\right) = \sum_{k=1}^{n}\frac{\varphi(a_k)}{2^k} > n,$$

что невозможно. Таким образом, φ ограничен и в неунитальном случае.

Положим $m := \lim_{\lambda\in\Lambda}\varphi(u_\lambda^2)$, причем предел существует, поскольку направленность является возрастающей и ограниченной $\|\varphi\|$ сверху. Тогда, для любого $x \in A$ с $\|x\| \leqslant 1$ имеем $|\varphi(x)| = \lim_{\lambda\in\Lambda}|\varphi(u_\lambda x)|$ в силу непрерывности φ. Поэтому, по неравенству Коши-Шварца-Буняковского имеем $|\varphi(x)|^2 \leqslant \varphi(u_\lambda^2)\varphi(x^*x) \leqslant m\|\varphi\|$. Для любого $\varepsilon > 0$ выберем такой элемент $x \in A$, что $\|\varphi\|^2 < |\varphi(x)|^2 + \varepsilon$. Тогда $\|\varphi\|^2 < m\|\varphi\| + \varepsilon$. Следовательно, $\|\varphi\|^2 \leqslant m\|\varphi\|$ и $\|\varphi\| \leqslant m$. Поскольку для любого $\varepsilon > 0$ имеется u_{λ_0}, для которого $\varphi(u_{\lambda_0}^2) > m + \varepsilon$, то приходим к равенству $\|\varphi\| = m$. Поскольку $m \leqslant \lim_{\lambda\in\Lambda}\varphi(u_\lambda) \leqslant \|\varphi\| = m$, то $\lim_{\lambda\in\Lambda}\varphi(u_\lambda) = \|\varphi\|$. □

Следствие 4.11. *Если φ — состояние на C^*-алгебре с единицей, то $\varphi(1) = 1$.*

Доказательство. По предыдущей лемме, $1 = \|\varphi\| = \varphi(1)$. □

4.2. **ГНС-конструкция (Гельфанд-Наймарк-Сегал).**

Определение 4.12. Вектор $\xi \in H$ называется *циклическим* для $\pi : A \to \mathbb{B}(H)$, если $\pi(A)\xi$ плотно в H.

Теорема 4.13. *Пусть φ — положительный линейный функционал на C^*-алгебре A. Тогда найдутся такие представление π_φ алгебры A в гильбертовом пространстве H и циклический вектор $\xi_\varphi \in H$, что $\|\xi_\varphi\|^2 = \|\varphi\|$ и $(\xi_\varphi, \pi_\varphi(a)\xi_\varphi) = \varphi(a)$ для всех $a \in A$.*

Доказательство. Пусть $N := \{a \in A : \varphi(a^*a) = 0\}$. Тогда $N = \{a \in A : \varphi(b^*a) = 0 \text{ for all } b \in A\}$ по неравенству Коши-Шварца-Буняковского. Поэтому N замкнуто как пересечение ядер непрерывных функционалов $a \mapsto \varphi(b^*a))$. Кроме того, N —

левый идеал, поскольку $\varphi(b^*an) = \varphi((a^*b)^*n) = 0$ для любых $a, b \in A$ при $n \in N$, так что $an \in N$.

Определим эрмитово скалярное произведение на банаховом фактор-пространстве A/N формулой $(\dot{a}, \dot{b}) = \varphi(a^*b)$, где через $\dot{a}$ обозначен класс смежности $a + N$. Это произведение корректно определено, поскольку, если $n_1, n_2 \in N$, то $\varphi((a+n_1)^*(b+n_2)) = \varphi(a^*b) + \varphi((a+n_1)^*n_2) + \overline{\varphi(b^*n_1)} = \varphi(a^*b)$. Также выполняется $(\dot{a}, \dot{a}) > 0$ при $\dot{a} \neq 0$. Пусть H — гильбертово пространстао, полученное из A/N пополнением по норме, заданной этим скалярным произведением. Обозначим через π_0 представление A в A/N (тут мы несколько расширяем понятие представления на предгильбертово пространство) по формуле $\pi_0(a)\dot{x} = (ax)^{\cdot}$, где $\dot{x} \in A/N$. Если $n \in N$, то $(a(x+n))^{\cdot} = (ax)^{\cdot}$, так что π_0 корректно определено. Оно является инволютивным, поскольку $(\pi_0(a)\dot{x}, \dot{y}) = \varphi((ax)^*y) = \varphi(x^*(a^*y)) = (\dot{x}, \pi_0(a^*)\dot{y}) = (\pi_0(a^*)^*\dot{x}, \dot{y})$ и $\pi_0(a^*)^* = \pi_0(a)$. При этом $\|\pi_0\| \leqslant 1$. Действительно,

$$\begin{aligned}
\|\pi_0(a)\|^2 &= \sup_{\|\dot{x}\| \leqslant 1} \|\pi_0(a) \cdot x\|^2 = \sup_{\|\dot{x}\| \leqslant 1} \varphi(x^*a^*ax) \\
&\leqslant \sup_{\|\dot{x}\| \leqslant 1} \|a^*a\| \varphi(x^*x) \leqslant \|a\|^2.
\end{aligned}$$

Поэтому π_0 продолжается по непрерывности до представления π_φ алгебры A в H.

Если алгебра A унитальна, то положим $\xi_\varphi := \dot{1}$. Тогда $(\xi_\varphi, \pi_\varphi(a)\xi_\varphi) = \varphi(a)$ и ξ_φ является циклическим, поскольку $\pi_\varphi(A)\xi_\varphi = A/N$ плотно в H. Наконец, $\|\varphi\| = \varphi(1) = \|\xi_\varphi\|^2$.

Для алгебры A общего вида рассмотрим ее аппроксимативную единицу u_λ. Покажем, что $\dot{u}_\lambda$ является направленностью Коши. Выберем $\varepsilon > 0$. Тогда найдется такой индекс $\alpha \in \Lambda$, что $\varphi(u_\alpha) > \|\varphi\| - \varepsilon$ (поскольку $\|\varphi\| = \lim_{\lambda \in \Lambda} \varphi(u_\lambda)$ по лемме 4.10). Теперь найдем такой индекс $\beta \in \Lambda$, что $\beta \geqslant \alpha$ и $\|u_\lambda u_\alpha - u_\alpha\| < \varepsilon$ для любого $\lambda \geqslant \beta$. Тогда

$$\mathrm{Re}(\varphi(u_\lambda u_\alpha)) = \varphi(u_\alpha) + \mathrm{Re}(\varphi(u_\lambda u_\alpha - u_\alpha)) > \|\varphi\| - 2\varepsilon.$$

Поэтому

$$\begin{aligned}
\|\dot{u}_\lambda - \dot{u}_\alpha\|^2 &= \varphi((u_\lambda - u_\alpha)^2) = \varphi(u_\lambda^2) + \varphi(u_\alpha^2) - 2\mathrm{Re}(\varphi(u_\lambda u_\alpha)) \leqslant \\
&\leqslant \varphi(u_\lambda^2) + \varphi(u_\alpha^2) - 2(\|\varphi\| - 2\varepsilon) \leqslant 4\varepsilon.
\end{aligned}$$

Значит, при $\lambda, \mu \geqslant \beta$, имеем

$$\|\dot{u}_\lambda - \dot{u}_\mu\| \leqslant \|\dot{u}_\lambda - \dot{u}_\alpha\| + \|\dot{u}_\alpha - \dot{u}_\mu\| \leqslant 4\varepsilon^{1/2}.$$

Таким образом, $\dot{u}_\lambda$ — направленность Коши. Пусть $\xi_\varphi := \lim_{\lambda \in \Lambda} \dot{u}_\lambda \in H$. Тогда $(\xi_\varphi, \pi_\varphi(a)\xi_\varphi) = \lim_{\lambda \in \Lambda} \varphi(u_\lambda a u_\lambda) = \varphi(a)$. Поскольку $\pi_\varphi(A)\xi_\varphi = A/N$, то ξ_φ — циклический. Из $\dot{a} = \pi_\varphi(a)\xi_\varphi$ следует, что

$$\lim_{\lambda \in \Lambda} \pi_\varphi(u_\lambda)\dot{a} = \lim_{\lambda \in \Lambda} \pi_\varphi(u_\lambda)\pi_\varphi(a)\xi_\varphi = \pi_\varphi(a)\xi_\varphi = \dot{a}$$

для любого $\dot{a} \in A/N$, так что направленность $\pi_\varphi(u_\lambda)$ сильно сходится к 1. Поэтому $\|\varphi\| = \lim_{\lambda \in \Lambda} \varphi(u_\lambda) = \lim_{\lambda \in \Lambda}(\xi_\varphi, \pi_\varphi(u_\lambda)\xi_\varphi) = \|\xi_\varphi\|^2$. □

4.3. **Реализация C^*-алгебр как операторных алгебр в гильбертовом пространстве.**

Следствие 4.14. *Любое состояние φ на C^*-алгебре A без единицы допускает единственное продолжение до состояния на A^+.*

Доказательство. Пусть π_φ — представление A, заданное ГНС-конструкцией. Положим $\pi_\varphi(1) = 1$. Тогда π_φ продолжается до представления A^+ и $\tilde{\varphi}(a) := (\xi_\varphi, \pi(a)\xi_\varphi)$ является состоянием. Оно единственно, поскольку должно выполняться $\tilde{\varphi}(1) = 1$ (следствие 4.11). □

Задача 43. Пусть u_λ, $\lambda \in \Lambda$, — некоторая аппроксимативная единица в унитальной алгебре. Доказать, что $1 = \lim_{\lambda\in\Lambda} u_\lambda$.

Лемма 4.15. *Пусть $\varphi : A \to \mathbb{C}$ — такой непрерывный линейный функционал, что $\|\varphi\| = 1 = \lim_{\lambda\in\Lambda} \varphi(u_\lambda)$ для некоторой аппроксимативной единицы u_λ. Тогда φ — состояние.*

Доказательство. Сначала сведем доказательство к унитальному случаю. Пусть $\tilde{\varphi}$ — некоторое продолжение (по теореме Хана-Банаха) функционала φ до непрерывного функционала на A^+. Пусть $\tilde{\varphi}(1) =: \alpha$. Поскольку $\|\tilde{\varphi}\| = 1$, то $|\alpha| \leqslant 1$. Из неравенства $\|2u_\lambda - 1\| \leqslant 1$ следует, что $|2 - \alpha| = \lim_{\lambda\in\Lambda} |\varphi(2u_\lambda - 1)| \leqslant 1$. Таким образом, $\alpha = 1$. Значит, можем считать, что A унитальна и $\varphi(1) = 1$ (если A с самого начала была унитальной, то пользуемся задачей 43).

Покажем теперь, что $\varphi(a) \in \mathbb{R}$, если $a = a^*$ (а значит, содержится в $[-\|a\|, \|a\|]$). Пусть a — самосопряженный элемент нормы 1. Тогда $\|a \pm in1\|^2 = \|a^2 + n^2 1\| = n^2 + 1$, так что $|\varphi(a) \pm in| \leqslant \sqrt{n^2+1}$ для любого $n \in \mathbb{N}$. Значит, $\varphi(a)$ содержится в пересечении всех дисков с центрами в $\pm in$ и радиусов $\sqrt{n^2+1}$. Это пересечение равно вещественному интервалу $[-1, 1]$.

Если $0 \leq a \leq 1$, то $\|2a - 1\| \leq 1$. Применяя предыдущее рассуждение к самосопряженному элементу $2a - 1$, получаем, что $-1 \leqslant 2\varphi(a) - 1 \leqslant 1$, так что $\varphi(a) \geqslant 0$ и φ является положительным. □