

### Лекция 8 (08.11.2022)

**Лемма 4.16.** Пусть  $a \in A$  — самосопряженный элемент. Тогда имеется такое состояние  $\varphi$  на  $A$ , что  $|\varphi(a)| = \|a\|$ .

*Доказательство.* Если  $A$  без единицы, то будем работать в  $A^+$ . Рассмотрим коммутативную  $C^*$ -алгебру  $C^*(a)$ . Тогда найдется такой мультипликативный линейный функционал  $\varphi_0$  на  $C^*(a)$ , что  $|\varphi_0(a)| = \|a\|$  (надо взять в качестве  $\varphi_0$  отображение взятия значения в той точке  $\text{Sp}(a)$ , где функция  $\hat{a}$  достигает своего максимума). Тогда  $\varphi_0(1) = 1 = \|\varphi_0\|$ . Рассмотрим продолжение  $\varphi_0$  по теореме Хана-Банаха до функционала  $\varphi$  на  $A^+$ . Тогда, поскольку  $\|\varphi\| = 1 = \varphi(1)$ , то  $\varphi$  — состояние по лемме 4.15.  $\square$

**Следствие 4.17.** Для любого  $a \in A$  существуют такие представление  $\pi$  и единичный вектор  $\xi$  в пространстве представления, что  $\|\pi(a)\xi\| = \|a\|$ .

*Доказательство.* По предыдущей лемме, найдем такое состояние  $\varphi$ , что  $\varphi(a^*a) = \|a\|^2$ . Пусть  $\pi = \pi_\varphi$  и  $\xi = \xi_\varphi$  получены для  $\varphi$  по ГНС-конструкции. Тогда  $\|\pi(a)\xi\|^2 = (\xi, \pi(a^*a)\xi) = \varphi(a^*a) = \|a\|^2$ .  $\square$

**Теорема 4.18** (Гельфанда-Наймарка). Любая  $C^*$ -алгебра изометрически  $*$ -изоморфна  $C^*$ -подалгебре  $\mathbb{W}(H)$  для некоторого гильбертова пространства  $H$ . Если  $A$  сепарабельна, то и  $H$  может быть выбрано сепарабельным.

*Доказательство.* Положим  $\pi = \bigoplus_\varphi \pi_\varphi$ , где прямая сумма берется по всем состояниям  $A$ . Точнее, рассматривается гильбертова прямая сумма  $H := \bigoplus_\varphi H_\varphi$  (пополнение по  $\ell_2$  норме пространства финитных отображений  $\varphi \mapsto h_\varphi \in H_\varphi$ , то есть наборов  $h = \{h_\varphi\}$ ,  $h_\varphi \in H_\varphi$ , причем лишь конечное число  $h_\varphi$  отлично от нуля, а норма определяется как  $\|h\|^2 = \sum_\varphi \|h_\varphi\|^2$ ) с диагональным действием  $\pi(a)(\{h_\varphi\}) = \{\pi_\varphi(a)(h_\varphi)\}$ . Тогда, как видно из доказательства предыдущего следствия,  $\|\pi(a)\| = \sup_\varphi \|\pi_\varphi(a)\| = \|a\|$ . Если же  $A$  сепарабельна, то достаточно брать сумму по счетному набору  $\varphi_n$ , где  $\|\pi_{\varphi_n}(a_n)\| = \|a_n\|$ , для элементов  $a_n$ , образующих плотное подмножество в  $A$ . Тогда  $\pi = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \pi_{\varphi_n}$ , а соответствующее гильбертово пространство сепарабельно, поскольку каждое  $H_{\varphi_n}$  сепарабельно (как пополнение фактора сепарабельного пространства).  $\square$

**Определение 4.19.** Построенное в теореме (в первой ее части) представление называется *универсальным представлением*  $A$ . Алгебра фон Неймана  $\pi(A)''$ , где  $\pi$  — универсальное представление, содержит  $\pi(A) \cong A$  в качестве плотного подмножества и называется *обертывающей алгеброй фон Неймана* для  $A$ .

#### 4.4. Разложение Жордана.

**Лемма 4.20.** Пусть  $\varphi$  — линейный функционал на  $A$ . Тогда  $\varphi = \psi_1 + i\psi_2$ , где  $\psi_1$  и  $\psi_2$  — самосопряженные.

*Доказательство.* Положим, как делали и для элементов алгебры,  $\psi_1(a) = (\varphi(a) + \overline{\varphi(a^*)})/2$  и  $\psi_2(a) = (\varphi(a) - \overline{\varphi(a^*)})/2i$ .  $\square$

Обозначим через  $A_{sa}$  множество всех самосопряженных элементов  $A$ . Тогда, очевидно, что  $A_{sa}$  является вещественным банаховым пространством.

**Задача 44.** Имеется естественная биекция между самосопряженными линейными функционалами на  $A$  и (вещественными) линейными функционалами на  $A_{sa}$ .

Для доказательства теоремы о разложении Жордана нам понадобится следующее утверждение, представляющее самостоятельный интерес.

**Теорема 4.21** (о продолжении положительных функционалов). *Пусть  $B \subset A$  —  $C^*$ -подалгебра, а  $\varphi : B \rightarrow \mathbb{C}$  — положительный функционал. Тогда найдется такой положительный функционал  $\varphi' : A \rightarrow \mathbb{C}$ , что  $\varphi'|_B = \varphi$  и  $\|\varphi'\| = \|\varphi\|$ .*

*Доказательство.* Возможны следующие случаи:

- a) обе алгебры имеют общую единицу,
- b)  $A$  имеет единицу, а  $B$  — нет,
- c) обе алгебры не имеют единицы,
- d)  $B$  имеет единицу, а  $A$  — нет.
- e) обе алгебры с 1, но  $1_A \neq 1_B$ .

В силу следствия 4.14, (c) и (b) сводятся присоединением единицы к (a) (для (b) нужно заметить, что  $B^+ \cong B \oplus \mathbb{C}1_A$ ). В свою очередь, (d), очевидно, сводится к (e).

В случае (a) продолжим по теореме Хана-Банаха  $\varphi$  до некоторого  $\varphi' : A \rightarrow \mathbb{C}$  той же нормы. Тогда по лемме 4.10,  $\|\varphi'\| = \|\varphi\| = \varphi(1) = \varphi'(1)$  и  $\varphi'$  — положительный по лемме 4.15.

В случае (e) рассмотрим  $C^*$ -подалгебру  $B_1 := B \oplus \mathbb{C}1_A = B \oplus \mathbb{C}(1_A - 1_B)$  и продолжим  $\varphi$  до  $\varphi_1 : B_1 \rightarrow \mathbb{C}$ , положив  $\varphi_1(1_A - 1_B) = 0$ . Тогда  $\varphi_1(a) = \varphi(1_B \cdot a)$ , где  $a \in B_1$ . Действительно, если  $a \in B$ , то  $\varphi_1(a) = \varphi(1_B \cdot a) = \varphi(a)$ , а если  $a = 1_A - 1_B$ , то  $\varphi_1(a) = \varphi(1_B(1_A - 1_B)) = \varphi(0) = 0$ . При этом единица  $B_1$  — это  $1_A$ . Кроме того,  $\|\varphi_1\| \leq \|\varphi\| \cdot \|1_B\| = \|\varphi\|$ , а  $\varphi_1(1_A) = \varphi(1_B) = \|\varphi\|$ . Значит,  $\|\varphi_1\| = \|\varphi\| = \varphi_1(1_A) = \varphi_1(1_{B_1})$  и, по лемме 4.15,  $\varphi_1$  — положительный. Таким образом, случай (e) тоже свелся к доказанному случаю (a).  $\square$

**Теорема 4.22** (Разложение Жордана). *Пусть  $\psi$  — самосопряженный линейный функционал на  $A$  с нормой, не превосходящей 1. Тогда  $\psi = \varphi_1 - \varphi_2$ , где  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  — положительные линейные функционалы на  $A$  с нормами, не превосходящими 1.*

*Доказательство.* Обозначим через  $K$  множество всех самосопряженных линейных функционалов нормы  $\leq 1$ , допускающих разложение, требуемое в формулировке леммы. Тогда  $K$  — непустое, выпуклое и ограниченное. Предположим противное:  $\psi \notin K$ . Тогда, по теореме Хана-Банаха, найдутся такие  $x \in A_{sa}$  и  $\alpha \in \mathbb{R}$ , что  $\psi(x) > \alpha$  и  $\varphi(x) \leq \alpha$  для любого  $\varphi \in K$ , в частности, для любого состояния. Поскольку  $K$  симметрично, то

$$(11) \quad |\varphi(x)| \leq \alpha \text{ для любого } \varphi \in K.$$

Тогда  $\|x\| \leq \alpha$ . Действительно, предположим противное и рассмотрим  $C^*(x) \subset A$ . Тогда

$$\|x\| = \sup\{|\varphi(x)| : \varphi \text{ мультипликативен}\} \leq \sup\{|\varphi(x)| : \|\varphi\| \leq 1, \varphi \text{ положителен}\}.$$

Значит, из нашего предположения следует, что  $|\varphi(x)| > \alpha$  для некоторого положительного функционала на  $C^*(x) \subset A$  с нормой  $\|\varphi\| \leq 1$ . По теореме 4.21, найдется продолжение  $\varphi$  до положительного функционала  $\varphi'$  на  $A$  нормы  $\leq 1$  (в частности,  $\varphi' \in K$ ), причем  $|\varphi'(x)| > \alpha$ . Это противоречит (11). Значит,  $\|x\| \leq \alpha$ . Но тогда не может быть  $\psi(x) > \alpha$ , поскольку  $\|\psi\| \leq 1$ . Таким образом, предположение о существовании такого неразложимого  $\psi$  было неверным.  $\square$

#### 4.5. Линейные топологические пространства.

**Определение 4.23.** Подмножество  $M$  линейного пространства называется *уравновешенным*, если для любого  $v \in M$  вектор  $\lambda v$  принадлежит  $M$  при любом  $|\lambda| \leq 1$ . В частности,  $M$  — звездное относительно нуля пространства.

**Определение 4.24.** Подмножество  $M$  линейного пространства называется *поглощающим*, если для любого вектора  $v$  пространства найдется такое число  $\alpha > 0$ , что  $v \in \beta M$  при  $|\beta| \geq \alpha$ .

**Определение 4.25.** Линейное пространство, снабженное топологией, называется *линейным топологическим пространством* (ЛТП), если операции линейного пространства непрерывны.

В основном курсе функционального анализа доказываются следующие несложные утверждения (см. Колмогоров и Фомин, 1982, гл. III, §5):

**Предложение 4.26.** 1). База ЛТП состоит из сдвигов окрестностей нуля.

2). Любой вектор ЛТП и не содержащее его замкнутое множество имеют непесекающиеся окрестности.

**Определение 4.27.** ЛТП  $L$  удовлетворяет *условию гомотетии*, если для любой окрестность нуля  $W$  ее гомотетия  $\lambda W$  — тоже окрестность нуля для любого  $\lambda \neq 0$  из основного поля.

**Замечание 4.28.** Очевидно, что топология нормированного пространства удовлетворяет условию гомотетии.

**Предложение 4.29.** Для любой окрестности нуля  $U$  ЛТП  $L$  с условием гомотетии существует *уравновешенная окрестность*, в ней содержащаяся.

*Доказательство.* Рассмотрим непрерывное отображение  $\mathbb{C} \times L \rightarrow L$  (умножение), отображающее  $(0, 0_L) \mapsto 0_L$ . Тогда, в силу непрерывности, найдутся такие  $\delta > 0$  и окрестность нуля  $W$ , что  $\lambda W \subseteq U$  при  $|\lambda| \leq \delta$  (добиться нестрогого неравенства можно, уменьшив  $\delta$  из стандартного определения). Положим  $W' := \cup_{0 < |\lambda| \leq 1} \lambda W$ . В силу 4.27, это  $W'$  — искомое.  $\square$

**Замечание 4.30.** На самом деле, можно доказать, что базу окрестностей нуля ЛТП  $L$  можно выбрать из поглощающих уравновешенных множеств, а также, что условие гомотетии фактически не является условием, но нам это не понадобится.

Нам понадобится следующий важный результат.

**Теорема 4.31.** Пусть  $L$  — конечномерное пространство,  $\dim L = n$ . Тогда любая отделимая топология  $\tau$ , превращающая  $L$  в линейное топологическое пространство  $L_\tau$  с условием гомотетии, совпадает с топологией евклидовой нормы  $\|v\|^2 = \sum_{i=1}^n |v^i|^2$ , где  $e_1, \dots, e_n$  — некоторый базис  $L$ , а  $v = v^1 e_1 + \dots + v^n e_n$ .

*Доказательство.* Пространство  $L$  с евклидовой (или унитарной) топологией будем обозначать  $L_u$ , а окрестности нуля двух топологий — через  $T$  и  $U$ , соответственно.

Рассмотрим произвольную  $T$ . Тогда найдется такая окрестность  $T_0$ , что  $T_0 + \dots + T_0 \subset T$  ( $n$  слагаемых) в силу непрерывности операции сложения. Для каждого  $k$  найдется такое  $\varepsilon_k > 0$ , что  $v^k e_k \in T_0$  при  $|v_k| < \varepsilon_k$  ( $k = 1, \dots, n$ ). Пусть  $\varepsilon := \min_k \varepsilon_k$ , а

$U := \{v \in L \mid \|v\| < \varepsilon\}$ . Тогда  $v^k e_k \in T_0$  для любого  $v \in U$  и любого  $k = 1, \dots, n$ . Значит,  $U \subset T$ . Из доказанного, в частности, следует, что тождественное отображение  $\iota : L_u \rightarrow L_\tau$  является непрерывным.

Обратно, пусть  $U$  — произвольная окрестность, можно считать, что  $U = B(0, \varepsilon)$  — открытый шар радиуса  $\varepsilon$  с границей (сферой)  $S$ , являющейся компактным множеством. Тогда  $S = \iota(S)$  компактно в  $L_\tau$ . Значит, оно замкнуто, поскольку топология отделима. Тогда найдется звездная окрестность нуля  $T$  (например, уравновешенная), не пересекающаяся с  $S$  в силу предложений 4.26 и 4.29. При этом  $T \subseteq U$ , поскольку иначе существует такой вектор  $v \in T$ , что  $\|v\| \geq \varepsilon$ , и если положить  $\alpha := \varepsilon/\|v\|$ ,  $w := \alpha v$ , то  $\alpha \leq 1$ , так что  $w \in T$  в силу звездности. Но  $\|w\| = \varepsilon$ , так что  $w \in T \cap S$ . Противоречие.  $\square$