

Лекция 9 (15.11.2022)

4.6. Конечномерные C^* -алгебры. Рассмотрим $*$ -слабую топологию на A , задаваемую системой полунорм $a \mapsto |\varphi(a)|$ для всех линейных функционалов φ . Из леммы 4.20 и теоремы 4.22 следует, что ту же топологию можно получить, ограничиваясь только полунормами, связанными с состояниями.

Заметим также, что соответствующее ЛТП обладает свойством гомотетии 4.27.

Лемма 4.32. *Конечномерная C^* -алгебра всегда имеет единицу.*

Доказательство. Если A конечномерна, то топология нормы совпадает с $*$ -слабой топологией по теореме 4.31. Пусть u_n — аппроксимативная единица алгебры A . Тогда для любого состояния φ последовательность $\varphi(u_n)$ является неубывающей и ограниченной. Поэтому u_n сходится в $*$ -слабой топологии, а значит, и по норме. Таким образом, имеется предел $\lim_n u_n = a$. Тогда $ax = xa = x$ для любого $x \in A$, так что $a = 1$. \square

Лемма 4.33. *Пусть $I \subset A$ — идеал в конечномерной C^* -алгебре A . Тогда $I = Ap$ для некоторого центрального проектора (=идемпотента из центра) p .*

Доказательство. Поскольку I конечномерен, то унитарен по лемме 4.32. Пусть $p \in I$ — единица I . Тогда для всякого $x \in A$ выполняется $xp \in I$, так что $p(xp) = xp$. Поэтому $px^*p = x^*p$ для любого $x \in A$, откуда $xp = pxp = px$ и p принадлежит центру A . Очевидно, что $p^2 = p$. \square

Лемма 4.34. *Простая конечномерная C^* -алгебра A изометрически $*$ -изоморфна матричной алгебре M_n для некоторого n .*

Доказательство. Прежде всего, заметим, что $aAb \neq 0$ для любых ненулевых $a, b \in A$. Действительно, AaA является ненулевым идеалом (так как A с единицей и $0 \neq a = 1 \cdot a \cdot 1 \in A$), так что в силу простоты, $AaA = A$. Поэтому $1 = \sum_i x_i a y_i$ и $b = \sum_i x_i a y_i b$. Поэтому, если $a y b = 0$ для любого $y \in A$, то $b = \sum_i x_i (a y_i b) = 0$, что противоречит предположению.

Пусть B — некоторая максимальная коммутативная подалгебра A . Тогда она может быть отождествлена с $C(X) = \mathbb{C}^n = \mathbb{C} \cdot e_1 \oplus \dots \oplus \mathbb{C} \cdot e_n$ для некоторого n , где X состоит из n точек, а $e_i \in B$ обозначает элемент, соответствующий характеристической функции в точке i . При этом e_i являются проекторами с соотношениями $e_i e_j = 0$ для $i \neq j$ и $\sum_{i=1}^n e_i = 1$. Поскольку $e_i A e_i \cdot e_j = e_j \cdot e_i A e_i = 0$ а B максимальная, то $e_i A e_i \subset B$. Поэтому $e_i A e_i = \mathbb{C} \cdot e_i$ (поскольку, очевидно, $0 \neq e_i A e_i \ni e_i$, или можно воспользоваться утверждением из начала доказательства).

Для любых i, j найдется такой $x \in A$, что $x = e_i x e_j \neq 0$, $\|x\| = 1$. Действительно, в силу утверждения из начала доказательства, $e_i A e_j \neq 0$, так что имеется $x = e_i y e_j$ с $\|x\| = 1$. При этом $e_i x e_j = e_i e_i y e_j e_j = e_i y e_j = x$. Тогда $x^* x = e_j x^* e_i e_i x e_j \in e_j A e_j$, а значит, по доказанному, имеет вид αe_j , $\alpha \in \mathbb{C}$. Так как $x^* x$ — положительный элемент, по норме равный единице, то $\alpha = 1$, так что $x^* x = e_j$. Аналогично, $x x^* = e_i$. Обозначим такой x для $j = 1$ через u_i , так что $u_i^* u_i = e_1$, $u_i u_i^* = e_i$, $i = 1, \dots, n$. Положим $u_{ij} := u_i u_j^*$. При этом $u_i e_1 u_i^* = u_i u_i^* u_i u_i^* = e_i e_i = e_i$, так что $u_{ij} u_{ji} = u_i u_j^* u_j u_i^* = u_i e_1 u_i^* = e_i$. Также $e_j u_{ji} = u_j u_j^* u_j u_i^* = u_j e_1 u_i^* = u_j u_i^* u_i u_i^* = u_j e_i$, и $e_i u_{ij} = u_i u_i^* u_i u_j^* = u_i e_1 u_j^* = u_i u_j^* u_j u_j^*$

Если $x \in e_i A e_j$, то есть $x = e_i a e_j$, то $x u_{ji} = e_i a e_j u_{ji} = e_i a u_{ji} e_i \in e_i A e_i$, так что $x u_{ji} = \lambda e_i$ для некоторого $\lambda \in \mathbb{C}$. Тогда $x = x e_j = x u_{ji} u_{ij} = \lambda e_i u_{ij} = \lambda u_{ij}$, так что для любого $x \in A$ существует такое число $\lambda_{ij}(x) \in \mathbb{C}$, что $e_i x e_j = \lambda_{ij}(x) u_{ij}$. Таким образом, $x = \sum_{i,j} e_i x e_j = \sum_{i,j} \lambda_{ij}(x) u_{ij}$. Соответствие $x \mapsto (\lambda_{ij}(x))$ определяет изоморфизм $\kappa : A \rightarrow M_n$ (задача 45). \square

Задача 45. Проверить биективность и необходимые алгебраические свойства κ .

Теорема 4.35. Если A конечномерна, то $A = \bigoplus_k A p_k$, где p_k — центральные проекторы, а каждая $A p_k$ — матричная алгебра $M_{n(k)}$.

Доказательство. Для простой алгебры результат следует из леммы 4.34. Если A не является простой, то $I = A p$ по лемме 4.33, где p — центральный проектор. Тогда $A = I \oplus J$, где $J := A(1 - p)$. Тогда J — тоже идеал, поскольку $(1 - p)$ — тоже центральный проектор, так что $A(1 - p)A = AA(1 - p) \subseteq A(1 - p)$. При этом центр A , будучи конечномерной коммутативной алгеброй, изоморфен \mathbb{C}^m (функциям на конечном множестве), а проекторам соответствуют характеристические функции. Далее рассуждаем по индукции, уменьшая размерность, пока не придем к сумме простых алгебр. \square

4.7. Невырожденные представления.

Определение 4.36. Пусть π — представление C^* -алгебры A в гильбертовом пространстве H . Обозначим через $\pi(A)H$ (возможно незамкнутое) линейное пространство конечных линейных комбинаций вида $\sum_i \pi(a_i) \xi_i$, где $a_1, \dots, a_n \in A$, $\xi_1, \dots, \xi_n \in H$. Представление π называется *невырожденным*, если $\pi(A)H$ плотно в H .

Задача 46. Если у A есть единица, то π является невырожденным тогда и только тогда, когда $\pi(1) = 1$.

Лемма 4.37. Пусть $I \subset A$ — идеал, а π — невырожденное представление I в гильбертовом пространстве H . Тогда существует и единственно продолжение π до представления $\tilde{\pi}$ всей алгебры A в H .

Доказательство. Определим $\tilde{\pi}$ сначала на векторах из плотного подпространства $\pi(I)H \subset H$ формулой

$$(12) \quad \tilde{\pi}(a) \left(\sum_i \pi(j_i) \xi_i \right) := \sum_i \pi(a j_i) \xi_i.$$

Определение корректно, поскольку, если $\sum_i \pi(j_i) \xi_i = \sum_i \pi(j'_i) \xi'_i$, то

$$\tilde{\pi}(a) \left(\sum_i \pi(j_i) \xi_i \right) = \lim_{\lambda \in \Lambda} \tilde{\pi}(a) \left(\sum_i \pi(u_\lambda j_i) \xi_i \right) = \lim_{\lambda \in \Lambda} \pi(a u_\lambda) \left(\sum_i \pi(j_i) \xi_i \right)$$

и, аналогично, $\tilde{\pi}(a) \left(\sum_i \pi(j'_i) \xi'_i \right) = \lim_{\lambda \in \Lambda} \pi(a u_\lambda) \left(\sum_i \pi(j'_i) \xi'_i \right)$, где $u_\lambda \in I$ — аппроксимативная единица I . Заметим, что существование последних пределов в цепочке следует из существования предпоследних — то есть, тем самым, для каждого из двух

случаев обосновывается отдельно. Поскольку

$$\begin{aligned} \left\| \tilde{\pi}(a) \left(\sum_i \pi(j_i) \xi_i \right) \right\| &= \lim_{\lambda \in \Lambda} \left\| \pi(au_\lambda) \left(\sum_i \pi(j_i) \xi_i \right) \right\| \leq \sup_{\lambda \in \Lambda} \|\pi(au_\lambda)\| \cdot \left\| \sum_i \pi(j_i) \xi_i \right\| \leq \\ &\leq \|a\| \cdot \sup_{\lambda \in \Lambda} \|u_\lambda\| \cdot \left\| \sum_i \pi(j_i) \xi_i \right\| = \|a\| \cdot \left\| \sum_i \pi(j_i) \xi_i \right\|, \end{aligned}$$

так что $\tilde{\pi}$ ограничено, а значит, $\tilde{\pi}(a)$ продолжается до ограниченного оператора в H .

При этом, как легко проверить, $\tilde{\pi}(ab) = \tilde{\pi}(a)\tilde{\pi}(b)$ и $\tilde{\pi}(a^*) = \tilde{\pi}(a)^*$ для любых $a, b \in A$, так что $\tilde{\pi}$ является представлением A . Единственность следует из того, что любое продолжение π должно удовлетворять (12). \square

Лемма 4.38. *В условиях леммы 4.37 представление π неприводимо тогда и только тогда, когда $\tilde{\pi}$ неприводимо.*

Доказательство. Пусть π приводится собственным инвариантным подпространством $L \subset H$. Тогда, в силу невырожденности, $H = \overline{\pi(I)(L + L^\perp)} \subseteq \overline{\pi(I)L} + \overline{\pi(I)L^\perp}$. Поскольку L^\perp тоже инвариантно, то $\pi(I)L^\perp \subset L^\perp$, так что $\overline{\pi(I)L} = L$. Then $\tilde{\pi}(A)L = \overline{\tilde{\pi}(A)\pi(I)L} = \overline{\pi(I)L} = L$ и L приводит $\tilde{\pi}$. В обратную сторону утверждение тривиально. \square

Лемма 4.39. *Пусть π — представление A в гильбертовом пространстве H , а $I \subset A$ — идеал. Тогда ортогональный проектор p на $\overline{\pi(I)H}$ лежит в центре $\pi(A)''$. Если π неприводимо и $\pi(I) \neq 0$, то $\pi|_I$ также неприводимо.*

Доказательство. Поскольку $\pi(A)\pi(I)H = \pi(I)H$, то $\overline{\pi(I)H}$ инвариантное пространство для $\pi(A)$, а значит, $p \in \pi(A)'$ (см. конец доказательства леммы 4.3). Если $x \in \pi(I)'$, то $x\pi(j)\xi = \pi(j)x\xi \in \pi(I)H$ для любых $j \in I$, $\xi \in H$, так что pH — инвариантное подпространство $\pi(I)'$ и, значит, $p \in \pi(I)''$. Поэтому

$$p \in \pi(I)'' \cap \pi(A)' \subset \pi(A)'' \cap \pi(A)',$$

что является центром $\pi(A)''$.

Если π неприводимо, то p — скалярный оператор (то есть 0 или 1), а поскольку $\pi(I) \neq 0$, то $p = 1$. Значит, $\pi|_I$ является невырожденным. Значит, по лемме 4.38 оно неприводимо. \square

5. СПЕЦИАЛЬНЫЕ КЛАССЫ C^* -АЛГЕБР

5.1. C^* -алгебра компактных операторов. Мы рассмотрим в этом параграфе C^* -подалгебры C^* -алгебры $\mathbb{K}(H)$ компактных операторов в гильбертовом пространстве H . Мы будем говорить, что C^* -подалгебра алгебры $\mathbb{B}(H)$ неприводима, если ее тождественное представление неприводимо.

Определение 5.1. Проектор p называется *минимальным*, если не существует такого проектора $q \neq 0$, $q \neq p$, что $qp = q$. Другими словами, p не доминирует никакого нетривиального проектора.

Лемма 5.2. *Любая ненулевая C^* -алгебра A компактных операторов содержит минимальный проектор e и $eAe = \mathbb{C} \cdot e$. Если A неприводима, то e — проектор ранга 1 (как проектор в гильбертовом пространстве).*

Доказательство. Поскольку A ненулевая, то она содержит ненулевой положительный оператор (см. (6)), который (как известно из основного курса) имеет дискретный спектр (кроме 0) с собственными значениями конечных кратностей. Рассмотрим проектор на ненулевую точку спектра. Поскольку характеристическая функция этой изолированной точки является непрерывной на спектре, то этот проектор принадлежит A . Тогда среди доминируемых им ненулевых проекторов имеется некоторый проектор $e \in A$ минимального ранга среди доминируемых (поскольку у них конечные ранги). Тогда e — минимальный (единственность минимального и даже равенство рангов у разных минимальных не утверждается). Если eAe состоит не только из $\mathbb{C} \cdot e$, то тем же способом мы сможем построить проектор, доминируемый e и прийти к противоречию.

Предположим теперь, что A неприводима, но ранг e больше 1. Выберем пару ненулевых ортогональных векторов ξ, η в образе e . Поскольку для любого a существует такое число $\lambda \in \mathbb{C}$, что $ea e = \lambda e$, то $(\xi, a\eta) = (e\xi, ae\eta) = (\xi, ea e\eta) = \lambda(\xi, \eta)$, то есть $a\eta \perp \xi$ для любого $a \in A$. Рассматривая все ξ из образа e , перпендикулярные η , видим, что подпространство $A\eta$ является собственным инвариантным подпространством. Противоречие. \square

Лемма 5.3. *Единственной неприводимой C^* -подалгеброй $\mathbb{K}(H)$ является она сама.*

Доказательство. Пусть A — неприводимая C^* -подалгебра $\mathbb{K}(H)$, а $e \in A$ — минимальный проектор ранга 1. Тогда найдется такой вектор $\xi \in H$ единичной длины, что $e\eta = \xi(\xi, \eta)$ для любого η (берем ξ из образа e). В силу неприводимости, для любых $\eta, \zeta \in H$ найдутся такие элементы $a, b \in A$, что $a\xi = \eta$, $b\xi = \zeta$. При этом $A \ni aeb^*$ и $aeb^*(\kappa) = a\xi(\xi, b^*\kappa) = \eta(\zeta, \kappa)$, $\kappa \in H$. Таким образом, A содержит все операторы ранга 1. Такие операторы порождают $\mathbb{K}(H)$ (любой компактный приближается конечномерными), так что $A = \mathbb{K}(H)$. \square

Следствие 5.4. *Алгебра $\mathbb{K}(H)$ является простой.*

Доказательство. Поскольку $\mathbb{K}(H)$ неприводима, то любой ее ненулевой идеал тоже неприводим (по лемме 4.39), так что он совпадает с $\mathbb{K}(H)$ (по лемме 5.3). \square

Следствие 5.5. *Пусть A — неприводимая C^* -подалгебра $\mathbb{B}(H)$, содержащая ненулевой компактный оператор. Тогда $\mathbb{K}(H) \subseteq A$.*

Доказательство. Поскольку $A \cap \mathbb{K}(H)$ — ненулевой идеал A , то он неприводим по лемме 4.39. По лемме 5.3 эта подалгебра $\mathbb{K}(H)$ должна совпадать со всей $\mathbb{K}(H)$. \square