

Лекция 12 (06.12.2022)

5.4. Гильбертовы C^* -модули.

Определение 5.26. Пусть M — банахово пространство (с нормой $\|\cdot\|$), которое в то же время является правым модулем над C^* -алгеброй A (действие A на M предполагается непрерывным). Пусть $\langle \cdot, \cdot \rangle : M \times M \rightarrow A$ — полуторалинейная форма (называемая *скалярным произведением*) со свойствами:

- (1) $\langle m, na \rangle = \langle m, n \rangle a$ для всех $m, n \in M, a \in A$;
- (2) $\langle m, n \rangle = \langle n, m \rangle^*$ для всех $m, n \in M$;
- (3) $\langle m, m \rangle \in A$ положителен для всех $m \in M$, а если он равен 0, то $m = 0$.

Мы называем M *гильбертовым C^* -модулем*, если $\|m\|^2 = \|\langle m, m \rangle\|$ для всякого $m \in M$.

Пример 5.27. Алгебра A является гильбертовым C^* -над A , если мы определим скалярное произведение формулой $\langle a, b \rangle := a^*b, a, b \in A$.

Пример 5.28. Модуль A^n — гильбертов C^* -модуль над A со скалярным произведением, заданным формулой $\langle (a_1, \dots, a_n), (b_1, \dots, b_n) \rangle := \sum_{i=1}^n a_i^* b_i$.

Лемма 5.29 (неравенство Коши(-Шварца-Буняковского)). $\|\langle n, m \rangle\|^2 \leq \|n\|^2 \|m\|^2$ для любых $n, m \in M$.

Доказательство. Для всех $A \in A$ мы имеем $\langle m - na, m - na \rangle \geq 0$, поэтому $\langle m, m \rangle - a^* \langle n, m \rangle - \langle m, n \rangle a + a^* \langle n, n \rangle \geq 0$. Возьмем $a = \frac{1}{\|n\|^2} \langle n, m \rangle$. Тогда $\langle m, m \rangle - \frac{2}{\|n\|^2} \langle m, n \rangle \langle n, m \rangle + \frac{1}{\|n\|^4} \langle m, n \rangle \langle n, n \rangle \langle n, m \rangle \geq 0$. Поскольку $\|n\|^2 = \|\langle n, n \rangle\| \geq \langle n, n \rangle$, то получаем, что $\langle m, m \rangle - \frac{1}{\|n\|^2} \langle m, n \rangle \langle n, m \rangle \geq 0$, так что $\langle m, n \rangle \langle n, m \rangle \leq \|n\|^2 \langle m, m \rangle$. Отсюда получаем требуемое неравенство. \square

Пример 5.30. Пусть M состоит из всех последовательностей $(a_i), a_i \in A$, для которых ряд $\sum_{i=1}^{\infty} a_i^* a_i$ сходится в A (по норме). Скалярное произведение задается формулой by $\langle (a_i), (b_i) \rangle := \sum_{i=1}^{\infty} a_i^* b_i$. По предыдущей лемме, этот ряд сходится. Данный гильбертов C^* -модуль очень важен для приложений. Он обычно обозначается через $l_2(A)$ и называется *стандартным гильбертовым C^* -модулем*.

Отображение $T : M \rightarrow M$ называется (ограниченным) *оператором* в гильбертовом C^* -модуле M , если оно линейно и A -линейно (то есть, $T(ma) = T(m)a$ для любых $m \in M, a \in A$). Если $M = A$, то это определение совпадает с определением левых централизаторов.

Определение 5.31. Оператор T называется *допускающим сопряженный*, если имеется такой оператор S , что $\langle m, T(n) \rangle = \langle S(m), n \rangle$ для любых $m, n \in M$. В этом случае S называется *сопряженным оператором* для T и обозначается T^\star . Обозначим через $\mathbb{W}_A^\star(M)$ множество операторов, допускающих сопряженный.

В отличие от гильбертовых пространств, в гильбертовых C^* -модулях имеются ограниченные операторы, не допускающие сопряженного.

Задача 58. Построить пример оператора, не допускающего сопряженного.

Задача 59. Доказать, что $\|x\| = \sup_{y \in B_1(M)} \langle x, y \rangle$, где $B_1(M) \subset M$ — единичный шар.

Теорема 5.32. Алгебра $\mathbb{W}_A^\star(M)$ является C^* -алгеброй.

Набросок доказательства. Ключевыми являются следующие моменты.

1) Инволюция $\star : \mathbb{W}_A^\star(M) \rightarrow \mathbb{W}_A^\star(M)$ является изометрией. Действительно, в силу задачи 59,

$$\begin{aligned} \|T\| &= \sup_{x \in B_1(M)} \|Tx\| = \sup_{x, y \in B_1(M)} \|\langle Tx, y \rangle\| = \\ &= \sup_{x, y \in B_1(M)} \|\langle x, T^\star y \rangle\| = \sup_{y \in B_1(M)} \|T^\star y\| = \|T^\star\|. \end{aligned}$$

2) Для нормы выполнено C^* -свойство. Это следует из оценки

$$\|T^\star T\| \geq \sup_{x \in B_1(M)} \|\langle T^\star T x, x \rangle\| = \sup_{x \in B_1(M)} \|\langle T x, T x \rangle\| = \|T\|^2$$

(в обратную сторону — это общее свойство операторной нормы с учетом пункта один).

3) Алгебра $\mathbb{W}_A^\star(M)$ замкнута как подалгебра банаховой алгебры B всех ограниченных C -линейных операторов $M \rightarrow M$ (с операторной нормой). Действительно, прежде всего, заметим, что банахова алгебра $\mathbb{W}_A(M)$ всех операторов замкнута в B как пересечение по всем $x \in M$, $a \in A$, замкнутых множеств $\text{Ker}(f_{x,a})$, где $f_{x,a} : B \rightarrow M$, $f_{x,a}(T) = T(xa) - T(x)a$, — ограниченное линейное отображение, $\|f_{x,a}\| \leq 2\|x\| \|a\|$. Пусть направленность элементов $T_\alpha \in \mathbb{W}_A^\star(M)$ сходится к $T \in \mathbb{W}_A(M)$, в частности, является направленностью Коши. По пункту 1), направленность T_α^\star тоже является направленностью Коши, а значит, имеет предел $S \in \mathbb{W}_A(M)$. Легко видеть, что $S = T^\star$ и $T \in \mathbb{W}_A^\star(M)$. \square

Задача 60. Завершить доказательство теоремы 5.32.

Если $M = A$, то определение оператора, допускающего сопряженный совпадает с определением двойного централизатора.

Определение 5.33. Оператор $\theta_{x,y}$, определенный формулой $\theta_{x,y}(z) = x\langle y, z \rangle$, называется *элементарным*.

Задача 61. Доказать, что $\theta_{x,y} \in \mathbb{W}_A^\star(M)$, предъявив явную формулу для сопряженного.

Определение 5.34. Замыкание множества C -линейных комбинаций элементарных операторов обозначается через $\mathbb{K}_A(M)$. Его элементы называются *A -компактными операторами*.

Задача 62. Доказать, что $\mathbb{K}_A(M)$ — идеал в $\mathbb{W}_A^\star(M)$.

Задача 63. Доказать, что $\mathbb{K}_A(A) = A$. Заметим, что если A без единицы, то $\mathbb{K}_A(A) = A \neq \mathbb{W}_A^\star(A) = DC(A)$ (алгебра двойных централизаторов).

5.5. Алгебра Калкина. Если гильбертово пространство H не является сепарабельным, то $\mathbb{W}(H)$ может быть достаточно сложным, в частности, иметь не только один собственный идеал. Например, идеалом является множество операторов с сепарабельным образом. Этого не происходит в случае сепарабельного H , которым мы обычно будем ограничиваться.

Определение 5.35. Фактор- C^* -алгебра $Q(H) = \mathbb{B}(H)/\mathbb{K}(H)$ называется *алгеброй Калкина*.

Определение 5.36. Фактор- C^* -алгебра $M(A)/A$ называется *алгеброй внешних мультипликаторов*, или *обобщенной алгеброй Калкина*.

Лемма 5.37. *Алгебра Калкина является простой.*

Доказательство. Надо доказать, что $\mathbb{K}(H)$ — единственный идеал $\mathbb{B}(H)$. Пусть идеал $I \subset \mathbb{B}(H)$ содержит хотя бы один некомпактный оператор. Можно считать, что этот оператор положительный (так как любой оператор представляет собой линейную комбинацию четырех положительных). Обозначим его через t . Заметим, что поскольку $\mathbb{K}(H)$ — простая (по следствию 5.4), то либо $\mathbb{K}(H) \subseteq I$, либо $\mathbb{K}(H) \cap I = \{0\}$. Поскольку $t \notin \mathbb{K}(H)$, то можно считать, что найдется такое число $\alpha > 0$, что оба спектральных проектора $p_1 = p_{[0,\alpha)}$ и $p_2 = p_{[\alpha,\infty)}$ бесконечного ранга. Действительно, если p_2 с указанным свойством не найдется, то t является компактным вопреки предположению. Если при этом $p_1 = 0$, то t обратим, а значит, $I = \mathbb{B}(H)$, как и требовалось. Если $p_1 \neq 0$, но ранг его конечный, то имеем конечное число собственных значений, меньших α , так что для некоторой функции f , непрерывной на спектре, имеем $0 \neq f(t) \in \mathbb{K}(H)$. Значит, $\mathbb{K}(H) \subseteq I$. Поэтому $p_1 \in I$ и $t + p_1 \in I$ — обратимый и $I = \mathbb{B}(H)$. Итак, оба проектора p_1 и p_2 — бесконечного ранга. Пусть $H_i = \text{Im } p_i$, $i = 1, 2$. Тогда $H_1 \perp H_2$ и $H = H_1 \oplus H_2$. Поскольку H_1 и H_2 изоморфны в силу сепарабельности H , то имеется такая частичная изометрия $w \in \mathbb{B}(H)$, что $w|_{H_2} = 0$ и $w|_{H_1}$ отображает H_1 изометрически на H_2 . Поскольку спектральные проекторы коммутируют с t , то $tp_2 \geq \alpha \cdot 1_{H_2}$, где 1_{H_2} — тождественный оператор в H_2 . Кроме того, $w^*tw \geq \alpha \cdot 1_{H_1}$, а значит, $tp_2 + w^*tw \geq \alpha \cdot 1$. Поэтому $tp_2 + w^*tw \in I$ обратим, так что $I = \mathbb{B}(H)$. \square