

Лекция 13 (13.12.2022)

Обсуждение программы и списка задач

Программа:

1. C^* -алгебры – определение и примеры.
2. Присоединение единицы к C^* -алгебре.
3. Спектр элемента C^* -алгебры, его свойства.
4. Коммутативные C^* -алгебры. Пространство максимальных идеалов. Преобразование Гельфанда.
5. Теорема Гельфанда о коммутативных C^* -алгебрах.
6. Теорема Стоуна-Вейерштрасса.
7. C^* -алгебра, порожденная нормальным элементом. Функциональное исчисление для нормальных операторов.
8. Положительные элементы, их свойства.
9. Аппроксимативные единицы, их существование.
10. Идеалы, фактор-алгебры, наследственные подалгебры.
11. Автоматическая непрерывность $*$ -гомоморфизмов.
12. Алгебры фон Неймана. Теорема о бикоммутанте.
13. Топологически неприводимые представления.
14. Положительные функционалы, состояния.
15. ГНС-конструкция.
16. Реализация C^* -алгебр как операторных алгебр (теорема Гельфанда-Наймарка).
17. Разложение Жордана.
18. Конечномерные линейные топологические пространства, единственность отдельной топологии.
19. Конечномерные C^* -алгебры, их унитарность и структура.
20. Невырожденные представления.
21. Алгебра компактных операторов и ее свойства.
22. AF-алгебры, описание гомоморфизмов конечномерных алгебр, диаграммы Браттели.
23. Алгебры мультипликаторов и централизаторов.
24. Гильбертовы C^* -модули и алгебры, с ними связанные.
25. Алгебра Калкина и ее свойства.

Дополнительный список задач (к сформулированным на лекциях)

- (1) Пусть A — C^* -алгебра, $a \in A$, $p, q \in A$ — ортогональные проекторы (т.е. самосопряженные идемпотенты, удовлетворяющие $pq = 0$). Показать, что если a положителен и $rap = 0$, то $raq = 0$.
- (2) Пусть A — C^* -алгебра, $a \in A$. Обозначим через aAa множество всех элементов вида aba , где $b \in A$, а через \overline{aAa} — замыкание этого множества. C^* -подалгебра $B \subset A$ наследственна, если из условий $0 \leq a \leq b$ и $b \in B$ следует, что $a \in B$.
 - (а) Проверить, что \overline{aAa} — C^* -подалгебра для любого $a \in A$.
 - (б) Пусть $p \in A$ — проектор. Проверить, что pAp замкнуто.
 - (в) Показать, что \overline{pAp} наследственна для любого проектора p .
 - (г) Показать, что \overline{aAa} наследственна для любого положительного $a \in A$.
- (3) Пусть $X \subset \mathbb{R}$ — множество точек $1, 1/2, 1/3, \dots$ и 0 . Пусть $C(X, M_2)$ — множество всех непрерывных функций на X со значениями в матричной алгебре

M_2 . Положим $B_1 = \{f \in C(X, M_2) : f(0) \text{ диагональна}\}$, $B_2 = \{f \in C(X, M_2) : f(0) \text{ имеет вид } \begin{pmatrix} * & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\}$.

(а) Показать, что $C(X, M_2)$, B_1 , B_2 — C^* -алгебры.

(б) Найти все (двухсторонние, замкнутые) идеалы в $C(X)$, $C(X, M_2)$, B_1 , B_2 .

(4) Пусть A — C^* -алгебра, $J \subset A$ — идеал, $a \in A$ — самосопряженный элемент. Показать, что существует такой $j \in J$, что $\|[a]\| = \|a - j\|$, где $[a] \in A/J$ — класс $a + J$ элемента a . Указание: разложить $a - \|[a]\| \cdot 1 = a_+ - a_-$ с положительными a_+ , a_- и показать, что $a_+ \in J$.

(5) Пусть A — C^* -алгебра, $a \in A$ — самосопряженный элемент. Показать, что если спектр $\sigma(a)$ — бесконечное множество, то A бесконечномерна.

(6) Описать ГНС-конструкцию для C^* -алгебры $C[0, 1]$ и для положительного линейного функционала φ

(а) $\varphi(f) = f(0)$,

(б) $\varphi(f) = \frac{1}{2}(f(0) + f(1))$,

(с) $\varphi(f) = \int_0^1 f(x) dx$,

где $f \in C[0, 1]$.

(7) Описать ГНС-конструкцию для C^* -алгебры M_n комплексных $n \times n$ -матриц и для положительного линейного функционала φ

(а) $\varphi(A) = a_{11}$,

(б) $\varphi(A) = \text{tr}(A)$,

где $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n \in M_n$.

(8) Пусть π, σ — представления C^* -алгебры A в гильбертовых пространствах H_π и H_σ , и пусть частичная изометрия $U : H_\pi \rightarrow H_\sigma$ удовлетворяет равенству $\sigma(a)U = U\pi(a)$ для любого $a \in A$. Показать, что образ (соотв. ортогональное дополнение к ядру) U является инвариантным подпространством для $\sigma(A)$ (соотв. для $\pi(A)$). (U — частичная изометрия, если U^*U и UU^* являются проекторами)

(9) (а) Пусть $M_n(A)$ — множество всех $n \times n$ -матриц с коэффициентами из C^* -алгебры A . Показать, что на $M_n(A)$ существует C^* -норма.

(б) Пусть A — C^* -алгебра с нормой $\|\cdot\|$, и пусть $\|\cdot\|'$ — другая норма на A , эквивалентная первой норме. Показать, что если $\|\cdot\|'$ — C^* -норма, то обе нормы совпадают. Вывести из этого единственность C^* -нормы на $M_n(A)$.

(10) Пусть φ — состояние на C^* -алгебре A . Предположим, что для некоторого самосопряженного элемента $a \in A$ выполнено равенство $\varphi(a^2) = \varphi(a)^2$. Показать, что из этого следует, что $\varphi(ab) = \varphi(ba) = \varphi(a)\varphi(b)$ для любого $b \in A$.

(11) Пусть $A = c$ — C^* -алгебра сходящихся последовательностей комплексных чисел, $c = \{(a_n)_{n \in \mathbb{N}} : a_n \in \mathbb{C}; \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \text{ существует}\}$. Рассмотрим ее как C^* -подалгебру алгебры $\mathbb{B}(l_2)$ ограниченных операторов гильбертова пространства l_2 суммируемых с квадратом последовательностей. Найти первый и второй коммутант, A' и A'' , и (независимо) слабое замыкание A в $\mathbb{B}(l_2)$.

(12) (а) Показать, что слабая топология строго слабее сильной топологии.

(б) Пусть $P \subset \mathbb{B}(H)$ — множество всех (самосопряженных) проекторов в гильбертовом пространстве. Показать, что ограничения слабой и сильной топологии на P совпадают.

(с) Показать, что сильный предел последовательности (самосопряженных) проекторов является проектором.

- (13) Пусть $H_n \subset H$ — подпространство гильбертова пространства H , порожденное первыми n векторами ортонормированного базиса. В множестве всех последовательностей (m_1, m_2, \dots) , где $m_k \in \mathbb{B}(H_n) \subset \mathbb{B}(H)$, рассмотрим подмножество A всех таких последовательностей, что

- $\sup_k \|m_k\| < \infty$;
- последовательности (m_1, m_2, \dots) и (m_1^*, m_2^*, \dots) являются сходящимися в сильной топологии.

Показать, что A — C^* -алгебра, и что отображение $(m_1, m_2, \dots) \mapsto s\text{-}\lim_{k \rightarrow \infty} m_k \in \mathbb{B}(H)$ является сюръективным $*$ -гомоморфизмом $A \rightarrow \mathbb{B}(H)$.

- (14) Пусть A — коммутативная C^* -алгебра, π — ее неприводимое представление в гильбертовом пространстве H . Показать, что $\dim H = 1$.
- (15) Пусть $\{e_i\}_{i=1}^\infty$ — ортонормированный базис гильбертова пространства H , и пусть операторы a, b задаются равенствами $ae_i = e_{2i}$; $be_i = e_{2i-1}$. Пусть $E = C^*(a, b) \subset \mathbb{B}(H)$ — C^* -алгебра, порожденная a и b .

(а) Проверить ограниченность a и b и доказать равенства $a^*a = b^*b = 1$, $aa^* + bb^* = 1$.

(б) Доказать, что E не изоморфна полной групповой C^* -алгебре $C^*(G)$ ни для какой группы G .

- (16) Рассмотрим $C[0, 1]$ как C^* -подалгебру в $\mathbb{B}(H)$, где $H = L^2([0, 1])$ (непрерывные функции действуют на H умножением).

- (а) Проверить, что $C[0, 1] \cap \mathbb{K}(H) = 0$;
- (б) Пусть φ — линейный функционал на $C[0, 1]$, определенный равенством $\varphi(f) = f(0)$, $f \in C[0, 1]$. Найти такую слабо сходящуюся к нулю в H последовательность $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ векторов единичной длины, что выполняется $\varphi(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle fe_n, e_n \rangle$ для любой функции $f \in C[0, 1]$.

- (17) Операторы a, b в гильбертовом пространстве H называются *компалентными*, если существует такой унитарный оператор $u \in \mathbb{B}(H)$, что $u^*au - b \in \mathbb{K}(H)$. Показать, что самосопряженные операторы a, b компалентны тогда и только тогда, когда совпадают их существенные спектры.

- (18) Показать, что любая АФ C^* -алгебра без единицы имеет аппроксимативную единицу, состоящую из возрастающей последовательности проекторов.

- (19) (а) Показать, что $C[0, 1]$ не является АФ-алгеброй.
- (б) Построить инъективный $*$ -гомоморфизм $C[0, 1]$ в АФ-алгебру $C(K)$ непрерывных функций на Канторовом множестве K . Указание: построить функцию f на K , принимающую все рациональные значения из $[0, 1]$ и показать, что $C^*(f)$ изометрично $*$ -изоморфна $C(\text{Sp}(f)) = C[0, 1]$.

- (20) Пусть $A_n = M_{2^n}(\mathbb{C}) \oplus M_{2^n}(\mathbb{C})$, а вложение $\alpha_n : A_n \rightarrow A_{n+1}$ задано формулой

$$\alpha_n : \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a_1 & 0 & | & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & | & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & | & a_1 & 0 \\ 0 & 0 & | & 0 & a_2 \end{pmatrix}, \text{ где } a_1, a_2 \in M_{2^n}(\mathbb{C}).$$

(а) Определить диаграмму Браттели для АФ-алгебры $A = \overline{\bigcup_{n=1}^\infty A_n}$;

(б) Выяснить, есть ли в A единица.

- (21) Найти $M(A)$, где $A = \{f \in C([0, 1]; M_2) : f(0)_{11} = f(0)_{12} = f(0)_{21} = 0; f(1) = 0\}$ (здесь M_2 — алгебра двумерных матриц).