

Глава 1

C^* -алгебры

| |
|----------|
| Лекция 1 |
|----------|

1.1 Определение и первые примеры

Определение 1.1. Алгеброй A (над полем \mathbb{K}) называется кольцо, являющееся линейным пространством над \mathbb{K} , причем сложение в определении кольца и в определении линейного пространства одно и то же, а умножения связаны соотношением $\lambda(ab) = (\lambda a)b$ для всяких $\lambda \in \mathbb{K}$, $a, b \in A$.

Мы будем рассматривать алгебры только над полем комплексных чисел \mathbb{C} .

Определение 1.2. Алгебра A над \mathbb{C} называется *банаховой алгеброй*, если подлежащее линейное пространство является банаховым пространством и $\|ab\| \leq \|a\|\|b\|$ для любых $a, b \in A$.

Задача 1 (легкая). Покажите, что в этом случае умножение непрерывно (как отображение $A \times A \rightarrow A$).

Определение 1.3. Отображение $*$: $A \rightarrow A$, $a \mapsto a^*$ называется *инволюцией*, если

1. $(a^*)^* = a$;
2. $(a + b)^* = a^* + b^*$;
3. $(\lambda a)^* = \bar{\lambda} a^*$;
4. $(ab)^* = b^* a^*$;
5. $\|a^*\| = \|a\|$

для любых $a, b \in A$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Банахова алгебра с инволюцией называется *инволютивной банаховой алгеброй*.

Определение 1.4. Инволютивная банахова алгебра A называется C^* -алгеброй, если инволюция удовлетворяет равенству $\|a^*a\| = \|a\|^2$ для всех $a \in A$ (это равенство называется C^* -свойством).

Задача 2. Привести пример инволютивной банаховой алгебры, не являющейся C^* -алгеброй.

Задача 3 (легкая). Показать, что свойство (5) определения 1.3 следует из свойств (1 – 4) и C^* -свойства.

Определение 1.5. Элемент $1 \in A$ называется (левым) *единичным*, если $1a = a$ для любого $a \in A$. C^* -алгебра A называется *унитальной* или *алгеброй с единицей*, если у нее имеется (левый) единичный элемент.

Задача 4. Показать, что левый единичный элемент является и правым, что $1^* = 1$, что единичный элемент единствен и что $\|1\| = 1$. Он называется *единицей алгебры*.

Задача 5. Проверьте, что алгебра $C(X)$, образованная всеми непрерывными комплекснозначными функциями на компактном пространстве X и алгебра $C_0(X)$ всех непрерывных комплекснозначных функций на локально компактном пространстве X , стремящихся к 0 на бесконечности (то есть таких $f : X \rightarrow \mathbb{C}$, что для любого $\varepsilon > 0$ существует такой компакт $K \subseteq X$, что $\sup\{|f(x)| \mid x \in K\} < \varepsilon$) являются коммутативными C^* -алгебрами, если в качестве нормы берется *супремум-норма*: $\|f\| = \sup_{x \in X} |f(x)|$, а в качестве умножения — поточечное умножение. При этом алгебра $C(X)$ имеет единицу.

Задача 6. Проверьте, что алгебра $\mathbb{B}(H)$ всех ограниченных операторов, действующих в гильбертовом пространстве H , является C^* -алгеброй с единицей. Здесь в качестве нормы берется *операторная норма* $\|a\| = \sup_{h \in H, \|h\| \leq 1} \|a(h)\|$, а умножение — композиция операторов.

Эти примеры C^* -алгебр являются важнейшими, как мы увидим дальше.

1.2 Унитализация, или присоединение единицы

Если у инволютивной банаховой алгебры A нет единицы, то ее можно вложить в инволютивную банахову алгебру A с единицей следующим образом. Положим $A^+ = A \oplus \mathbb{C}$ как линейное пространство (прямая сумма линейных пространств). Определим структуру инволютивной банаховой алгебры на A^+ формулами

$$\begin{aligned} (a, \lambda)(b, \mu) &= (ab + \lambda b + \mu a, \lambda\mu), \\ (a, \lambda)^* &= (a^*, \bar{\lambda}), \\ \|(a, \lambda)\| &= \|a\| + |\lambda| \end{aligned} \tag{1.1}$$

для любых $(a, \lambda), (b, \mu) \in A \oplus \mathbb{C}$.

Далее считаем, что исходная алгебра A является C^* -алгеброй.

Задача 7. Показать, что эта норма превращает A^+ в инволютивную банахову алгебру, но не C^* -алгебру. (Для проверки полноты воспользуйтесь полной подпространства $A \subset A^+$ конечной (единичной) коразмерности, что следует из задачи 337(б) в [3].)

Определение 1.6. Подмножество $B \subseteq A$ называется *подалгеброй* (банаховой) алгебры A , если B является алгеброй относительно операций (и нормы) A .

Подмножество $B \subseteq A$ называется *(C^* -)подалгеброй* C^* -алгебры A , если B является C^* -алгеброй относительно операций и нормы A . В частности, B замкнута в A .

Определение 1.7. Подалгебра $I \subseteq A$ называется (двусторонним) *идеалом*, если $aI \subseteq I$ и $Ia \subseteq I$ для любого $a \in A$.

Задача 8. Доказать, что A — идеал в A^+ .

Лемма 1.8. На A^+ имеется норма, которая

- 1) эквивалентна определенной выше;
- 2) на A совпадает с исходной нормой;
- 3) является C^* -нормой.

Доказательство. Для $b = (b', \lambda) \in A^+$ рассмотрим линейное отображение $L_b : A \rightarrow A$ по формуле $L_b(a) = ba$, $a \in A$. Для L_b , таким образом, можно определить операторную норму: $\|L_b\| := \sup_{a \in A, \|a\| \leq 1} \|L_b(a)\|$. Если $b \in A$, то $\|L_b\| \leq \|b\|$. Поскольку $\|L_b(b^*)\| = \|bb^*\| = \|b\|^2$, то $\|L_b\| = \|b\|$. Для всякого $b = (b', \lambda) \in A^+$ положим $\|b\|_{new} = \|L_b\|$. Заметим, что проведенное рассуждение показывает, что $\|\cdot\|_{new}$ удовлетворяет условию 2) из формулировки леммы.

Прежде всего, проверим $\|\cdot\|_{new}$ является нормой. Очевидно, что аксиомы линейности и треугольника выполнены (то есть это — *полунорма*, или *преднорма*), так что остается проверить невырожденность. Пусть $\|b\|_{new} = 0$ для некоторого $b = (b', \lambda) \in A^+$. Это означает, что $(b', \lambda) \cdot (a, 0) = (b'a + \lambda a, 0) = (0, 0)$ для любого $a \in A$, так что $-\frac{1}{\lambda}b' \cdot a = a$ и $-\frac{1}{\lambda}b'$ является единицей A . Но у A нет единицы. Значит, $\|\cdot\|_{new}$ — норма. Как всякая операторная норма, новая норма — норма на банаховой алгебре, то есть

$$\|bc\|_{new} \leq \|b\|_{new}\|c\|_{new} \quad (1.2)$$

для любых $b, c \in A^+$ (Легкая задача: проверьте это). Пока мы не утверждаем, что инволюция является изометрией.

Эта новая норма эквивалентна определенной ранее норме на A^+ , поскольку $A \subset A^+$ является подпространством коразмерности 1. Действительно, по неравенству треугольника, имеем $\|(a, \lambda)\|_{new} \leq \|a\| + |\lambda| = \|(a + \lambda)\|$, так что достаточно показать, что найдется такая константа $c > 0$, что $\|(a, \lambda)\|_{new} \geq c\|(a, \lambda)\|$. Предположим противное: существуют такие пары (a_n, λ_n) и числа $c_n > 0$, что $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 0$ и

$$\|(a_n, \lambda_n)\|_{new} \leq c_n\|(a_n, \lambda_n)\|.$$

Поскольку ни одно λ_n не равно нулю, мы можем предположить (поделив, при необходимости, обе стороны на $\lambda_n \neq 0$), что $\lambda_n = 1$. Снова применяя неравенство треугольника, получаем

$$\|a_n\| - 1 \leq \|(a_n, 1)\|_{new} \leq c_n(\|a_n\| + 1),$$

откуда $\|a_n\| \leq \frac{1+c_n}{1-c_n}$, и для достаточно больших n имеем $\|a_n\| < 2$. Но тогда для этих n имеем $\|(a_n, 1)\|_{new} \leq 3c_n$, так что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n, 1) = 0. \quad (1.3)$$

Теперь вспомним, что $A^+/A \cong \mathbb{C}$, а все нормы на \mathbb{C} эквивалентны (более того, они отличаются лишь постоянным множителем). Таким образом, фактор-норма на A^+/A , задаваемая $\|(a, \lambda) + A\|_{new} := \inf_{a \in A} \|(a, \lambda)\|_{new}$ эквивалентна обычной норме на \mathbb{C} . Значит, $\inf_{a \in A} \|(a, 1)\|_{new} = \alpha > 0$, что противоречит (1.3).

Теперь нам надо проверить C^* -свойство. По определению, для любого $b \in A^+$ и любого $\varepsilon > 0$ найдется такой элемент $a \in A$, что $\|a\| = 1$ и

$$\|L_b(a)\| \geq (1 - \varepsilon)\|L_b\|, \quad \text{то есть} \quad \|ba\|_{new} = \|ba\| \geq (1 - \varepsilon)\|b\|_{new}.$$

Также имеем

$$\|b^*b\|_{new} \geq \|a^*(b^*b)a\|_{new} = \|a^*(b^*b)a\| = \|(ba)^*(ba)\| = \|ba\|^2 \geq (1 - \varepsilon)^2\|b\|_{new}^2$$

(где первое неравенство выполнено в силу (1.2), следующее равенство — в силу того, что A является идеалом в A^+ , а дальше применяем C^* -свойство в A). Переходя к пределу при ε , стремящемся к нулю, получаем $\|b^*b\|_{new} \geq \|b\|_{new}^2$. В частности, $\|b^*\|_{new} \cdot \|b\|_{new} \geq \|b^*b\|_{new} \geq \|b\|_{new}^2$, так что $\|b^*\|_{new} \geq \|b\|_{new}$. Поэтому $\|b\|_{new} = \|(b^*)^*\|_{new} \geq \|b^*\|_{new}$. Таким образом, инволюция является изометрией и, по (1.2), $\|b^*b\|_{new} \leq \|b^*\|_{new}\|b\|_{new} = \|b\|_{new}^2$. Значит, это — C^* -норма. \square

Определение 1.9. Элемент $a \in A$ называется *самосопряженным*, если $a^* = a$, *унитарным*, если $a^*a = aa^* = 1$ (тут алгебра A предполагается унитарной), *нормальным*, если $a^*a = aa^*$.

Определение 1.10. В унитарной C^* -алгебре элемент a называется *обратимым*, если существует такой элемент $a' \in A$, что $aa' = a'a = 1$. Элемент a' с таким свойством единствен (проверьте!), он называется *обратным к a* и обозначается через a^{-1} . Множество обратимых элементов $G(A)$ является группой.

Задача 9. Проверьте это.

Лемма 1.11. Если $\|1 - a\| < 1$, то a^{-1} существует и равен $a' = \sum_{n=0}^{\infty} (1 - a)^n$, причем ряд сходится по норме.

Доказательство. Сходимость сразу следует из оценки через геометрическую прогрессию. Далее вычисляем: $a'a = aa' = -(1 - a)a' + a' = -\sum_{n=1}^{\infty} (1 - a)^n + \sum_{n=0}^{\infty} (1 - a)^n = 1$. \square

Задача 10. Доказать аналогичным образом, что если $a_0 \in A$ обратим и $\|a - a_0\| < \frac{1}{\|a_0^{-1}\|}$, то a тоже обратим, причем $a^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} [a_0^{-1}(a_0 - a)]^n a_0^{-1}$.

Следствие 1.12. Подмножество $G(A) \subset A$ является открытым множеством. Взятие обратного элемента $a \mapsto a^{-1}$ является непрерывным отображением $G(A)$ в себя.

Задача 11. Докажите следствие, используя установленные выше формулы.