Лекция 10

3.2 AF-алгебры

Определение 3.6. Назовем C^*-алгебру *AF-алгеброй* (аппроксимативно конечномерной), если она является замыканием объединения возрастающей по вложению последовательности своих конечномерных C^*-подалгебр.

Задача 49. Доказать, что матричная алгебра M_n является простой при любом n (это не следует из леммы 2.34, из которой можно вывести, что M_n является простой при некотором n). *Указание:* для любого идеала $I \neq \{0\}$ рассмотрим матрицу из него с $a_{ij} \neq 0$. Путем умножения слева и справа на матрицы с 1 на одном месте и нулями на остальных, получите матрицу из I с единственным ненулевым элементом a_{ij}. Умножая на матрицы перестановок, получите аналогичные матрицы со всеми возможными i, j. Их линейные комбинации дают всю алгебру M_n.

Задача 50. Вывести из задачи 49 и леммы 2.34, что образ матричной алгебры M_n при $*$-гомоморфизме — либо нулевая алгебра, либо алгебра, изоморфная M_n.

Задача 51. Доказать следующий почти очевидный факт: если p и q — проекторы одинакового ранга в M_n, то существует такая унитарная матрица u, что $q = u^*pu$.

Лемма 3.7. *Пусть $\varphi : M_n \to M_k$ — ненулевой $*$-гомоморфизм, так что $p := \varphi(1_n)$ — самосопряженный проектор, где 1_n — единица M_n. Тогда $\mathrm{rk}(p) = \mathrm{Trace}(p)$ делится на $n = \mathrm{rk}(1_n) = \mathrm{Trace}(1_n)$.*

Доказательство. Рассмотрим одномерный ортогональный (самосопряженный) проектор $e \in M_n$. Тогда $\varphi(e)$ — самосопряженный проектор в M_k. Его ранг не зависит от выбора e, поскольку любой другой e' равен u^*eu (по задаче 51), где u — унитарный, так что

$$\mathrm{Trace}(\varphi(e')) = \mathrm{Trace}(\varphi(u^*eu)) = \mathrm{Trace}(\varphi(u^*)\varphi(e)\varphi(u)) =$$

$$= \mathrm{Trace}(\varphi(u)\varphi(u^*)\varphi(e)) = \mathrm{Trace}(\varphi(uu^*e)) = \mathrm{Trace}(\varphi(e)).$$

Если бы этот (один для всех) ранг был бы нулевой, то φ был бы нулевым. Значит, он равен $c \geqslant 1$. Рассмотрим теперь ортонормированный базис $e_1, \dots, e_n$ (например, канонический) в $\mathbb{C}^n$ и обозначим соответствующие одномерные ортопроекторы через $[e_i]$, так что $[e_j]\,[e_i] = 0$ при $i \neq j$. Тогда, поскольку $\varphi([e_i])\varphi([e_j]) = \varphi([e_i e_j]) = 0$ при $i \neq j$, получаем

$$\mathrm{Trace}(p) = \mathrm{rk}(\varphi(1_n)) = \mathrm{rk}(\varphi([e_1] \oplus \dots \oplus [e_n])) = \mathrm{rk}(\varphi([e_1])) + \dots + \mathrm{rk}(\varphi([e_n])) = cn.$$

□

Определение 3.8. Отношение $c := \frac{\mathrm{rk}(p)}{n}$ назовем *кратностью* φ.

Наряду со стандартным левым действием M_n на $\mathbb{C}^n$ рассмотрим левое действие M_n на себе умножением, так что каноническое разложение

$$M_n \cong \underbrace{\mathbb{C}^n \oplus \cdots \oplus \mathbb{C}^n}_{n \text{ раз}} = M_n[e_1] \oplus \cdots \oplus M_n[e_n]$$

является разложением на простые модули (=неприводимые представления), где $[e_i] \in M_n$ — ортогональный проектор на базисный вектор e_i стандартного базиса. По-другому можно записать $[e_i] = e_i \otimes e_i^*$ (рассматривая матрицы как эндоморфизмы), где e^* — эрмитово сопряженный функционал для e, так что $[e_i]v = (e_i \otimes e_i^*)v = e_i(e_i, v)$. Для разных векторов получаем матричную единицу $e_{ij} = e_i \otimes (e_j)^*$, так что $[e_i] = e_{ii}$.

Лемма 3.9. *Любой неприводимый левый модуль M в M_n имеет вид $M_n(g \otimes f^*) = \mathbb{C}^n \otimes f^*$, где g, f — единичные (можно взять) векторы.*

Доказательство. Для левого действия модуль $M_n(g \otimes f^*) = \mathbb{C}^n \otimes f^*$ изоморфен $\mathbb{C}^n$ со стандартным действием, а значит, неприводим. Поэтому, если $g \otimes f^* \in M$, то $M = M_n(g \otimes f^*)$. Остается показать, что M содержит элемент вида $g \otimes f^*$. Но это — любой оператор ранга 1. Действительно, если a — оператор ранга 1, то надо взять в качестве f единичный вектор, перпендикулярный его ядру, а $g = a(f)$. Наконец, если M — ненулевой, и $0 \neq b \in M$, то выберем $f \neq 0$ из его образа. Тогда $(f \otimes f^*)b$ — оператор ранга 1 из M. $\square$

Теорема 3.10. *Пусть φ — (унитальный) $*$-автоморфизм C^*-алгебры M_n. Тогда он является внутренним: $\varphi(a) = vav^*$ для любого a, где $v \in M_n$ — унитарный.*

Доказательство. Заметим, что φ является изоморфизмом между M_n, рассматриваемым как левый модуль над M_n со стандартным действием $a \cdot x$, и M_n, рассматриваемым как модуль с действием $a * x = \varphi(a) \cdot x$, поскольку $\varphi(a \cdot x) = \varphi(a) \cdot \varphi(x) = a * \varphi(x)$. Так как $\varphi(M_n) = M_n$, то инвариантные и неприводимые модули для обоих действий одни и те же (последние описываются леммой 3.9), и $\varphi(\mathbb{C} \otimes e_i) = \mathbb{C} \otimes h_i$, причем, поскольку автоморфизм переводит прямую сумму в прямую сумму, то h_i образуют базис в $\mathbb{C}^n$ и, таким образом, определен изоморфизм $u : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$, $u : e_i \to h_i$ (даже если считать $\|h_i\| = 1$, то u определен однозначно только с точностью до умножения на диагональную матрицу из комплексных чисел, по модулю равных единице). Таким образом, $\varphi(e_{ij}) = r_{ij} \otimes h_j$, где $r_{ij} \in \mathbb{C}^n$ — некоторые элементы. Аналогичное рассуждение с правыми модулями показывает, что $\varphi(e_{ij}) = g_i \otimes (s_{ij})^*$, где $v : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$, $v : e_i \to g_i$ — изоморфизм, а $s_{ij} \in \mathbb{C}^n$ — некоторые элементы. Из этих двух соотношений получаем, что $\varphi(e_{ij}) = \lambda_{ij} g_i \otimes (h_j)^*$, где λ_{ij} — некоторые числа. При этом (см. доказательство леммы 3.7) $\varphi([e_i]) = \lambda_{ii} g_i \otimes (h_i)^*$ является самосопряженным проектором, так что $h_i = \mu g_i$ и $g_i = (\lambda_{ij}\overline{\mu})(g_i \otimes (g_i)^*)(g_i) = (\lambda_{ij}\overline{\mu}) g_i$ и $\lambda_{ij}\overline{\mu} = 1$. Таким образом, можно считать, что $h_i = g_i$, $u = v$ и (новые) λ_{ij} удовлетворяют $\lambda_{ii} = 1$ для любого i. При этом g_i образуют ортонормированный базис (см. доказательство леммы 3.7), так что $u : e_i \mapsto g_i$ является унитарным. Из сохранения равенств $e_{ij} e_{ji} = e_{ii} = [e_i]$ и $e_{ij}^* = e_{ji}$ при гомоморфизме φ получаем, что $\lambda_{ij}\lambda_{ji} = 1$, $\overline{\lambda_{ij}} = \lambda_{ji}$, так что, в частности, λ_{ij} — комплексные числа, по модулю равные 1.

Рассмотрим матрицу $\Lambda = \|\lambda_{ij}\|$. Переходя, если нужно, от векторов g_i к $(\lambda_{1i})^{-1}g_i = \overline{\lambda_{1i}}g_i$ при $i = 2, \ldots, n$, можем считать $\lambda_{1i} = \lambda_{i1} = 1$ при $i = 2, \ldots, n$. При этом образ $\varphi(a)$ матрицы $a = \|a_{ij}\|$ записывается относительно ортонормированного базиса $\{g_i\}$ как $\|\lambda_{ij}a_{ij}\|$, а если матрица a была унитарная, то $\varphi(a)$ тоже должна быть унитарной. Пусть некоторое $\lambda_{ij} \neq 1$ (что возможно только при $i \neq j$, $i \neq 1$). Беря для этих i, j унитарную матрицу a с $a_{1i} = 1/\sqrt{2}$, $a_{1j} = 1/\sqrt{2}$, $a_{ii} = 1/\sqrt{2}$, $a_{ij} = -1/\sqrt{2}$ (и остальные в этих строках и столбцах, конечно, — нули), получим условие ортогональности этих строк в виде $0 = (1/\sqrt{2} \cdot 1)(\overline{1/\sqrt{2} \cdot 1}) + (-1/\sqrt{2} \cdot \lambda_{ij})(\overline{1/\sqrt{2} \cdot 1}) = (1 - \lambda_{ij})/2$, так что $\lambda_{ij} = 1$. Противоречие.

Итак, для любых i, j получаем, что $\varphi(e_i \otimes (e_j)^*) = v(e_i) \otimes (v(e_j))^* = v \cdot (e_i \otimes (e_j)^*) \cdot v^*$. Поскольку любая матрица является линейной комбинацией таких матричных единиц, то по линейности получаем требуемое равенство $\varphi(a) = vav^*$. □

Лемма 3.11. *Пусть в условиях леммы 3.7 гомоморфизм φ является унитальным. Тогда φ определяется кратностью с точностью до унитарной эквивалентности (сопряжения) в M_k.*

Доказательство. Пусть $f_i^1, \ldots, f_i^c$ — ортонормированный базис в образе проектора $\varphi(e_i)$, $s = 1, \ldots, n$. Обозначив через $[f_i^j]$ соответствующие одномерные попарно ортогональные проекторы, имеем $\varphi(e_i) = [f_i^1] + \cdots + [f_i^c]$. Тогда $\{f_i^j\}$, $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, c$, — ортобазис $\mathbb{C}^k$, $1_k = \sum_{i,j}[f_i^j]$. Если $u \in M_k$ — унитарная матрица, переводящая $\{f_i^j\}$ в канонический базис $\mathbb{C}^k$, причем $uf_i^j = e_{(i-1)n+j}$, то

$$[e_{(i-1)n+j}]x = e_{(i-1)n+j}(e_{(i-1)n+j}, x) = uf_i^j(uf_i^j, x) = uf_i^j(f_i^j, u^*x) = u[f_i^j]u^*x \tag{3.1}$$

для любого $x \in \mathbb{C}^k$. Поэтому

$$\varphi([e_i]) = [f_i^1] + \cdots + [f_i^c] = \sum_{j=1}^{c} u^*[e_{(i-1)n+j}]u = u^*\left(\sum_{j=1}^{c}[e_{(i-1)n+j}]\right)u. \tag{3.2}$$

Таким образом,

$$u\varphi(a)u^* = \begin{pmatrix} \varphi_1(a) & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \varphi_c(a) \end{pmatrix} \text{ (блочно-диагональная матрица)}, \tag{3.3}$$

где $\varphi_i : M_n \to M_n$ — ненулевой гомоморфизм, а значит, изоморфизм ($i = 1, \ldots, c$). Поэтому к нему можно применить теорему 3.10 и найти такой унитарный $v_i \in M_n$, что $\varphi_i(a) = v_i^*av^i$. Обозначив $v = v_1 \oplus \cdots \oplus v_c$ (унитарный элемент из M_k), получаем, что Тогда $vu\varphi(a)u^*v^* = S_c(a)$ для любого $a \in M_n$, где $S_c : M_n \to M_k$, $k = cn$, — стандартный гомоморфизм кратности c:

$$S_c(a) = \begin{pmatrix} a & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & a \end{pmatrix} \text{ (блочно-диагональная матрица с } c \text{ блоками, равными } a),$$

что и требовалось доказать. □

Лемма 3.12. *Пусть φ — унитальный $*$-гомоморфизм конечномерной C^*-алгебры $A = M_{n_1} \oplus \ldots \oplus M_{n_k}$ в конечномерную C^*-алгебру $B = M_{m_1} \oplus \ldots \oplus M_{m_l}$. Тогда φ задается (с точностью до унитарной эквивалентности в B) некоторой $l \times k$-матрицей $C = (c_{ij})$ с неотрицательными элементами, причем $\sum_{j=1}^{k} c_{ij} n_j = m_i$.*

Доказательство. Пусть $\epsilon_i : B \to M_{m_i}$ — канонический эпиморфизм, а $\sigma_j : M_{n_j} \to A$ — каноническое вложение, $i = 1, \ldots, l$, $j = 1, \ldots, k$. Тогда $\epsilon_i \circ \varphi$ — унитальный гомоморфизм A в M_{m_i}. Пусть c_{ij} — кратность $\varphi_{ij} = \epsilon_i \circ \varphi \circ \sigma_j : M_{n_j} \to M_{m_i}$ в смысле определения 3.8.

Заметим, что $\sigma_j(1_{n_j})$ — попарно ортогональные самосопряженные проекторы в A, в сумме дающие единицу, так что $p_{ij} := \varphi_{ij}(1_{n_j})$ — попарно ортогональные самосопряженные проекторы в M_{m_i}, в сумме также дающие единицу. Поэтому, как и ранее, их прямая сумма унитарно эквивалентна при помощи u_i в M_{m_i} сумме соответствующих диагональных проекторов $u_i p_{ij} u_i^*$. Применяя лемму 3.11 к каждому из $a \mapsto u_i \varphi_{ij}(a) u_i^*$, получаем, что $\epsilon_i \circ \varphi$ унитарно эквивалентен (в M_{m_i}) гомоморфизму $\mathrm{id}_{n_1}^{c_{i1}} \oplus \ldots \oplus \mathrm{id}_{n_k}^{c_{ik}} = S_{c_{i1}} \oplus \cdots \oplus S_{c_{ik}}$. Сравнение размерностей дает равенство $\sum_{j=1}^{k} c_{ij} n_j = m_i$. Поскольку φ определяется прямой суммой $\epsilon_i \circ \varphi$, $i = 1, \ldots, l$, то утверждение доказано. $\square$

Задача 52. Предположим, что в предыдущей лемме мы отказались от требования унитальности. Доказать аналог леммы в этом случае. Именно, взять вместо B подалгебру $\varphi(A) = p\varphi(A)p$ в B, где $p = \varphi(1_A)$, применить предыдущую лемму к $\varphi : A \to \varphi(A)$ и получить утверждение леммы с неравенствами $\sum_{j=1}^{k} c_{ij} n_j \leqslant m_i$ вместо равенств.