Лекция 10

2.7 Конечномерные C^*-алгебры

Рассмотрим $*$-слабую топологию на A, задаваемую системой полунорм $a \mapsto |\varphi(a)|$ для всех линейных функционалов φ. Из леммы 2.20 и теоремы 2.22 следует, что ту же топологию можно получить, ограничиваясь только полунормами, связанными с состояниями.

Заметим также, что соответствующее ЛТП обладает свойством гомотетии 2.27.

Лемма 2.32. *Конечномерная C^*-алгебра всегда имеет единицу.*

Доказательство. Если A конечномерна, то топология нормы совпадает с $*$-слабой топологией по теореме 2.31. Пусть u_n — аппроксимативная единица алгебры A. Тогда для любого состояния φ последовательность $\varphi(u_n)$ является неубывающей и ограниченной и поэтому имеет предел.. Переходя к линейным комбинациям, получаем сходимость для любого функционала на конечномерном пространстве A, в частности, для функционалов $\varphi_1, \dots \varphi_k$ двойственного базиса к некоторому базису $a_1, \dots, a_k$. Тогда имеется элемент $a \in A$ с $\varphi_i(a) = \lim_n \varphi_i(u_n)$. Рассматривая линейные комбинации φ_i, получаем, что $\varphi(a) = \lim_n \varphi(u_n)$ для любого φ. Поэтому u_n сходится к a в $*$-слабой топологии, а значит, и по норме. Тогда $ax = xa = x$ для любого $x \in A$, так что $a = 1$. $\square$

Лемма 2.33. *Пусть $I \subset A$ — идеал в конечномерной C^*-алгебре A. Тогда $I = Ap$ для некоторого центрального проектора (=идемпотента из центра) p.*

Доказательство. Поскольку I конечномерен, то унитален по лемме 2.32. Пусть $p \in I$ — единица I. Тогда для всякого $x \in A$ выполняется $xp \in I$, так что $p(xp) = xp$. Поэтому $px^*p = x^*p$ для любого $x \in A$, откуда $xp = pxp = px$ и p принадлежит центру A. Очевидно, что $p^2 = p$. $\square$

Лемма 2.34. *Простая конечномерная C^*-алгебра A изометрически $*$-изоморфна матричной алгебре M_n для некоторого n.*

Доказательство. Прежде всего, заметим, что $aAb \neq 0$ для любых ненулевых $a, b \in A$. Действительно, AaA является ненулевым идеалом (так как A с единицей и $0 \neq a = 1 \cdot a \cdot 1 \in A$), так что в силу простоты, $AaA = A$. Поэтому $1 = \sum_i x_i a y_i$ и $b = \sum_i x_i a y_i b$. Поэтому, если $ayb = 0$ для любого $y \in A$, то $b = \sum_i x_i(ay_i b) = 0$, что противоречит предположению.

Пусть B — некоторая максимальная коммутативная подалгебра A. Тогда она может быть отождествлена с $C(X) = \mathbb{C}^n = \mathbb{C} \cdot e_1 \oplus \ldots \oplus \mathbb{C} \cdot e_n$ для некоторого n, где X состоит из n точек, а $e_i \in B$ обозначает элемент, соответствующий характеристической функции в точке i. При этом e_i являются проекторами с соотношениями $e_i e_j = 0$ для $i \neq j$ и $\sum_{i=1}^n e_i = 1$. Поскольку $e_i A e_i \cdot e_j = e_j \cdot e_i A e_i = 0$ а B максимальная, то $e_i A e_i \subset B$. Поэтому $e_i A e_i = \mathbb{C} \cdot e_i$ (поскольку, очевидно, $0 \neq e_i A e_i \ni e_i$, или можно воспользоваться утверждением из начала доказательства).

Для любых i, j найдется такой $x = x_{ij} \in A$, что $x = e_i x e_j \neq 0$, $\|x\| = 1$. Действительно, в силу утверждения из начала доказательства, $e_i A e_j \neq 0$, так что имеется $x = e_i y e_j$ с $\|x\| = 1$. При этом $e_i x e_j = e_i e_i y e_j e_j = e_i y e_j = x$. Тогда $x^* x = e_j x^* e_i e_i x e_j \in e_j A e_j$, а значит, по доказанному, имеет вид αe_j, $\alpha \in \mathbb{C}$. Так как $x^* x$ — положительный элемент, по норме равный единице, то $\alpha = 1$, так что $x^* x = e_j$. Аналогично, $x x^* = e_i$. Обозначим такой $x = x_{ij}$ для $j = 1$ через u_i, так что $u_i = e_i x e_1 = e_i u_i e_1$. Тогда $u_i^* u_i = e_1$, $u_i u_i^* = e_i$, $i = 1, \ldots, n$. Положим $u_{ij} := u_i u_j^*$. При этом $u_i e_1 u_i^* = u_i u_i^* u_i u_i^* = e_i e_i = e_i$, так что $u_{ij} u_{ji} = u_i u_j^* u_j u_i^* = u_i e_1 u_i^* = e_i$. Также $e_j u_{ji} = u_j u_j^* u_j u_i^* = u_j e_1 u_i^* = u_j u_i^* u_i u_i^* = u_{ji} e_i$, и $e_i u_{ij} = u_i u_i^* u_i u_j^* = u_i e_1 u_j^* = u_i u_j^* u_j u_j^*$.

Если $x \in e_i A e_j$, то есть $x = e_i a e_j$, то $x u_{ji} = e_i a e_j u_{ji} = e_i a u_{ji} e_i \in e_i A e_i$, так что $x u_{ji} = \lambda e_i$ для некоторого $\lambda \in \mathbb{C}$. Тогда $x = x e_j = x u_{ji} u_{ij} = \lambda e_i u_{ij} = \lambda u_{ij}$, так что для любого $x \in A$ существует такое число $\lambda_{ij}(x) \in \mathbb{C}$, что $e_i x e_j = \lambda_{ij}(x) u_{ij}$. Таким образом, $x = \sum_{i,j} e_i x e_j = \sum_{ij} \lambda_{ij}(x) u_{ij}$. Соответствие $x \mapsto (\lambda_{ij}(x))$ определяет изоморфизм $\kappa : A \to M_n$ (задача 47). □

Задача 47. Проверить биективность и необходимые алгебраические свойства κ.

Теорема 2.35. *Если A конечномерна, то $A = \oplus_k A p_k$, где p_k — центральные проекторы, а каждая $A p_k$ — матричная алгебра $M_{n(k)}$.*

Доказательство. Для простой алгебры результат следует из леммы 2.34. Если A не является простой, то $I = Ap$ по лемме 2.33, где p — центральный проектор. Тогда $A = I \oplus J$, где $J := A(1-p)$. Тогда J — тоже идеал, поскольку $(1-p)$ — тоже центральный проектор, так что $A(1-p)A = AA(1-p) \subseteq A(1-p)$. При этом центр A, будучи конечномерной коммутативной алгеброй, изоморфен $\mathbb{C}^m$ (функциям на конечном множестве), а проекторам соответствуют характеристические функции. Далее рассуждаем по индукции, уменьшая размерность, пока не придем к сумме простых алгебр. □

2.8 Невырожденные представления

Определение 2.36. Пусть π — представление C^*-алгебры A в гильбертовом пространстве H. Обозначим через $\pi(A)H$ (возможно незамкнутое) линейное пространство конечных линейных комбинаций вида $\sum_i \pi(a_i)\xi_i$, где $a_1, \ldots, a_n \in A$, $\xi_1, \ldots, \xi_n \in H$. Представление π называется *невырожденным*, если $\pi(A)H$ плотно в H.

Задача 48. Если у A есть единица, то π является невырожденным тогда и только тогда, когда $\pi(1) = 1$.