Лекция 11

Лемма 2.37. *Пусть $I \subset A$ — идеал, а π — невырожденное представление I в гильбертовом пространстве H. Тогда существует и единственно продолжение π до представления $\tilde{\pi}$ всей алгебры A в H.*

Доказательство. Определим $\tilde{\pi}$ сначала на векторах из плотного подпространства $\pi(I)H \subset H$ формулой

$$\tilde{\pi}(a)\left(\sum_i \pi(j_i)\xi_i\right) := \sum_i \pi(aj_i)\xi_i. \tag{2.3}$$

Определение корректно, поскольку, если $\sum_i \pi(j_i)\xi_i = \sum_i \pi(j_i')\xi_i'$, то

$$\tilde{\pi}(a)\left(\sum_i \pi(j_i)\xi_i\right) = \lim_{\lambda\in\Lambda} \tilde{\pi}(a)\left(\sum_i \pi(u_\lambda j_i)\xi_i\right) = \lim_{\lambda\in\Lambda} \pi(au_\lambda)\left(\sum_i \pi(j_i)\xi_i\right)$$

и, аналогично, $\tilde{\pi}(a)(\sum_i \pi(j_i')\xi_i') = \lim_{\lambda\in\Lambda} \pi(au_\lambda)(\sum_i \pi(j_i')\xi_i')$, где $u_\lambda \in I$ — аппроксимативная единица I. Заметим, что существование последних пределов в цепочке следует из существования предпоследних — то есть, тем самым, для каждого из двух случаев обосновывается отдельно. Поскольку

$$\begin{aligned}\left\|\tilde{\pi}(a)\left(\sum_i \pi(j_i)\xi_i\right)\right\| &= \lim_{\lambda\in\Lambda}\left\|\pi(au_\lambda)\left(\sum_i \pi(j_i)\xi_i\right)\right\| \leqslant \sup_{\lambda\in\Lambda}\|\pi(au_\lambda)\|\cdot\left\|\sum_i \pi(j_i)\xi_i\right\| \leqslant \\ &\leqslant \|a\|\cdot\sup_{\lambda\in\Lambda}\|u_\lambda\|\cdot\left\|\sum_i \pi(j_i)\xi_i\right\| = \|a\|\cdot\left\|\sum_i \pi(j_i)\xi_i\right\|,\end{aligned}$$

то $\tilde{\pi}$ ограничено, а значит, $\tilde{\pi}(a)$ продолжается до ограниченного оператора в H.

При этом, как легко проверить, $\tilde{\pi}(ab) = \tilde{\pi}(a)\tilde{\pi}(b)$ и $\tilde{\pi}(a^*) = \tilde{\pi}(a)^*$ для любых $a, b \in A$, так что $\tilde{\pi}$ является представлением A. Единственность следует из того, что любое продолжение π должно удовлетворять (2.3). □

Лемма 2.38. *В условиях леммы 2.37 представление π неприводимо тогда и только тогда, когда $\tilde{\pi}$ неприводимо.*

Доказательство. Пусть π приводится собственным инвариантным подпространством $L \subset H$. Тогда, в силу невырожденности, $H = \overline{\pi(I)(L + L^\perp)} \subseteq \overline{\pi(I)L} + \overline{\pi(I)L^\perp}$. Поскольку $L^\perp$ тоже инвариантно, то $\pi(I)L^\perp \subset L^\perp$, так что $\overline{\pi(I)L} = L$. Then $\overline{\tilde{\pi}(A)L} = \overline{\tilde{\pi}(A)\pi(I)L} = \overline{\pi(I)L} = L$ и L приводит $\tilde{\pi}$. В обратную сторону утверждение тривиально. □

Лемма 2.39. *Пусть π — представление A в гильбертовом пространстве H, а $I \subset A$ — идеал. Тогда ортогональный проектор p на $\overline{\pi(I)H}$ лежит в центре $\pi(A)''$. Если π неприводимо и $\pi(I) \neq 0$, то $\pi|_I$ также неприводимо.*

Доказательство. Поскольку $\pi(A)\pi(I)H = \pi(I)H$, то $\overline{\pi(I)H}$ инвариантное пространство для $\pi(A)$, а значит, $p \in \pi(A)'$ (см. конец доказательства леммы 2.3). Если $x \in \pi(I)'$, то $x\pi(j)\xi = \pi(j)x\xi \in \pi(I)H$ для любых $j \in I$, $\xi \in H$, так что pH — инвариантное подпространство $\pi(I)'$ и, значит, $p \in \pi(I)''$. Поэтому

$$p \in \pi(I)'' \cap \pi(A)' \subset \pi(A)'' \cap \pi(A)',$$

что является центром $\pi(A)''$.

Если π неприводимо, то p — скалярный оператор (то есть 0 или 1) (см. лемму 2.3), а поскольку $\pi(I) \neq 0$, то $p = 1$. Значит, $\pi|_I$ является невырожденным. Значит, по лемме 2.38 оно неприводимо. $\square$

Глава 3

Специальные классы C^*-алгебр

3.1 C^*-алгебра компактных операторов

Мы рассмотрим в этом параграфе C^*-подалгебры C^*-алгебры $\mathbb{K}(H)$ компактных операторов в гильбертовом пространстве H. Мы будем говорить, что C^*-подалгебра алгебры $\mathbb{B}(H)$ *неприводима*, если ее тождественное представление неприводимо.

Определение 3.1. Проектор p называется *минимальным*, если не существует такого проектора $q \neq 0$, $q \neq p$, что $qp = q$. Другими словами, p не *доминирует* никакого нетривиального проектора.

Лемма 3.2. *Любая ненулевая C^*-алгебра A, состоящая из компактных операторов, содержит минимальный проектор e и $eAe = \mathbb{C} \cdot e$. Если A неприводима, то e — проектор ранга 1 (как проектор в гильбертовом пространстве).*

Доказательство. Поскольку A ненулевая, то она содержит ненулевой положительный оператор (см. (1.7)), который (как известно из основного курса функционального анализа (см. [9, теорема 1, стр. 360]) , имеет дискретный спектр (кроме 0) с собственными значениями конечных кратностей. Рассмотрим спектральный проектор, соответствующий ненулевой точке спектра. Поскольку характеристическая функция этой изолированной точки является непрерывной на спектре, то этот проектор принадлежит A. Тогда среди доминируемых им ненулевых проекторов имеется некоторый проектор $e \in A$ минимального ранга среди доминируемых (поскольку у них конечные ранги). Тогда e — минимальный (единственность минимального и даже равенство рангов у разных минимальных не утверждается). Если eAe состоит не только из $\mathbb{C} \cdot e$, то тем же способом мы сможем построить проектор, доминируемый e и прийти к противоречию.

Предположим теперь, что A неприводима, но ранг e больше 1. Выберем пару ненулевых ортогональных векторов ξ, η в образе e. Поскольку для любого a существует такое число $\lambda \in \mathbb{C}$, что $eae = \lambda e$, то $(\xi, a\eta) = (e\xi, ae\eta) = (\xi, eae\eta) = \lambda(\xi, \eta)$, то есть $a\eta \perp \xi$ для любого $a \in A$. Рассматривая все ξ из образа e, перпендикулярные η, видим, что подпространство $\overline{A\eta}$ является собственным инвариантным подпространством. Противоречие. $\square$