Лекция 12

Лемма 3.3. *Единственной неприводимой C^*-подалгеброй $\mathbb{K}(H)$ является она сама.*

Доказательство. Пусть A — неприводимая C^*-подалгебра $\mathbb{K}(H)$, а $e \in A$ — минимальный проектор ранга 1. Тогда найдется такой вектор $\xi \in H$ единичной длины, что $e\eta = \xi(\xi, \eta)$ для любого η (берем ξ из образа e). В силу неприводимости, для любых $\eta, \zeta \in H$ найдутся такие элементы $a, b \in A$, что $a\xi = \eta$, $b\xi = \zeta$ (см. лемму 2.5). При этом $A \ni aeb^*$ и $aeb^*(\kappa) = a\xi(\xi, b^*\kappa) = \eta(\zeta, \kappa)$, $\kappa \in H$. Таким образом, A содержит все операторы ранга 1. Такие операторы порождают $\mathbb{K}(H)$ (любой компактный приближается конечномерными), так что $A = \mathbb{K}(H)$. □

Следствие 3.4. *Алгебра $\mathbb{K}(H)$ является простой.*

Доказательство. Поскольку $\mathbb{K}(H)$ неприводима, то любой ее ненулевой идеал тоже неприводим (по лемме 2.39), так что он совпадает с $\mathbb{K}(H)$ (по лемме 3.3). □

Следствие 3.5. *Пусть A — неприводимая C^*-подалгебра $\mathbb{B}(H)$, содержащая ненулевой компактный оператор. Тогда $\mathbb{K}(H) \subseteq A$.*

Доказательство. Поскольку $A \cap \mathbb{K}(H)$ — ненулевой идеал A, то он неприводим по лемме 2.39. По лемме 3.3 эта подалгебра $\mathbb{K}(H)$ должна совпадать со всей $\mathbb{K}(H)$. □

3.2 AF-алгебры

Определение 3.6. Назовем C^*-алгебру *AF-алгеброй* (аппроксимативно конечномерной), если она является замыканием объединения возрастающей по вложению последовательности своих конечномерных C^*-подалгебр.

Задача 49. Доказать, что матричная алгебра M_n является простой при любом n (это не следует из леммы 2.34, из которой можно вывести, что M_n является простой при некотором n). *Указание:* для любого идеала $I \neq \{0\}$ рассмотрим матрицу из него с $a_{ij} \neq 0$. Путем умножения слева и справа на матрицы с 1 на одном месте и нулями на остальных, получите матрицу из I с единственным ненулевым элементом a_{ij}. Умножая на матрицы перестановок, получите аналогичные матрицы со всеми возможными i, j. Их линейные комбинации дают всю алгебру M_n.

Задача 50. Вывести из задачи 49 и леммы 2.34, что образ матричной алгебры M_n при $*$-гомоморфизме — либо нулевая алгебра, либо алгебра, изоморфная M_n.

Задача 51. Доказать следующий почти очевидный факт: если p и q — проекторы одинакового ранга в M_n, то существует такая унитарная матрица u, что $q = u^*pu$.

Лемма 3.7. *Пусть $\varphi : M_n \to M_k$ — ненулевой $*$-гомоморфизм, так что $p := \varphi(1_n)$ — самосопряженный проектор, где 1_n — единица M_n. Тогда $\mathrm{rk}(p) = \mathrm{Trace}(p)$ делится на $n = \mathrm{rk}(1_n) = \mathrm{Trace}(1_n)$.*

Доказательство. Рассмотрим одномерный ортогональный (самосопряженный) проектор $e \in M_n$. Тогда $\varphi(e)$ — самосопряженный проектор в M_k. Его ранг не зависит от выбора e, поскольку любой другой e' равен u^*eu (по задаче 51), где u — унитарный, так что

$$\mathrm{Trace}(\varphi(e')) = \mathrm{Trace}(\varphi(u^*eu)) = \mathrm{Trace}(\varphi(u^*)\varphi(e)\varphi(u)) =$$

$$= \mathrm{Trace}(\varphi(u)\varphi(u^*)\varphi(e)) = \mathrm{Trace}(\varphi(uu^*e)) = \mathrm{Trace}(\varphi(e)).$$

Если бы этот (один для всех) ранг был бы нулевой, то φ был бы нулевым. Значит, он равен $c \geqslant 1$. Рассмотрим теперь ортонормированный базис $e_1, \ldots, e_n$ (например, канонический) в $\mathbb{C}^n$ и обозначим соответствующие одномерные ортопроекторы через $[e_i]$, так что $[e_j]\,[e_i] = 0$ при $i \neq j$. Тогда, поскольку $\varphi([e_i])\varphi([e_j]) = \varphi([e_i e_j]) = 0$ при $i \neq j$, получаем

$$\mathrm{Trace}(p) = \mathrm{rk}(\varphi(1_n)) = \mathrm{rk}(\varphi([e_1] \oplus \cdots \oplus [e_n])) = \mathrm{rk}(\varphi([e_1])) + \cdots + \mathrm{rk}(\varphi([e_n])) = cn.$$

□

Определение 3.8. Отношение $c := \frac{\mathrm{rk}(p)}{n}$ назовем *кратностью* φ.

Наряду со стандартным левым действием M_n на $\mathbb{C}^n$ рассмотрим левое действие M_n на себе умножением, так что каноническое разложение

$$M_n \cong \underbrace{\mathbb{C}^n \oplus \cdots \oplus \mathbb{C}^n}_{n \text{ раз}} = M_n[e_1] \oplus \cdots \oplus M_n[e_n]$$

является разложением на простые модули (=неприводимые представления), где $[e_i] \in M_n$ — ортогональный проектор на базисный вектор e_i стандартного базиса. По-другому можно записать $[e_i] = e_i \otimes e_i^*$ (рассматривая матрицы как эндоморфизмы), где e^* — эрмитово сопряженный функционал для e, так что $[e_i]v = (e_i \otimes e_i^*)v = e_i(e_i, v)$. Для разных векторов получаем матричную единицу $e_{ij} = e_i \otimes (e_j)^*$, так что $[e_i] = e_{ii}$.

Лемма 3.9. *Любой неприводимый левый модуль M в M_n имеет вид $M_n(g \otimes f^*) = \mathbb{C}^n \otimes f^*$, где g, f — единичные (можно взять) векторы.*

Доказательство. Для левого действия модуль $M_n(g \otimes f^*) = \mathbb{C}^n \otimes f^*$ изоморфен $\mathbb{C}^n$ со стандартным действием, а значит, неприводим. Поэтому, если $g \otimes f^* \in M$, то $M = M_n(g \otimes f^*)$. Остается показать, что M содержит элемент вида $g \otimes f^*$. Но это — любой оператор ранга 1. Действительно, если a — оператор ранга 1, то надо взять в качестве f единичный вектор, перпендикулярный его ядру, а $g = a(f)$. Наконец, если M — ненулевой, и $0 \neq b \in M$, то выберем $f \neq 0$ из его образа. Тогда $(f \otimes f^*)b$ — оператор ранга 1 из M. □

Теорема 3.10. *Пусть φ — (унитальный) $*$-автоморфизм C^*-алгебры M_n. Тогда он является внутренним: $\varphi(a) = vav^*$ для любого a, где $v \in M_n$ — унитарный.*

Доказательство. Заметим, что φ является изоморфизмом между M_n, рассматриваемым как левый модуль над M_n со стандартным действием $a \cdot x$, и M_n, рассматриваемым как модуль с действием $a * x = \varphi(a) \cdot x$, поскольку $\varphi(a \cdot x) = \varphi(a) \cdot \varphi(x) = a * \varphi(x)$. Так как $\varphi(M_n) = M_n$, то инвариантные и неприводимые модули для обоих действий одни и те же (последние описываются леммой 3.9), и $\varphi(\mathbb{C} \otimes e_i) = \mathbb{C} \otimes h_i$, причем, поскольку автоморфизм переводит прямую сумму в прямую сумму, то h_i образуют базис в $\mathbb{C}^n$ и, таким образом, определен изоморфизм $u : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$, $u : e_i \to h_i$ (даже если считать $\|h_i\| = 1$, то u определен однозначно только с точностью до умножения на диагональную матрицу из комплексных чисел, по модулю равных единице). Таким образом, $\varphi(e_{ij}) = r_{ij} \otimes h_j$, где $r_{ij} \in \mathbb{C}^n$ — некоторые элементы. Аналогичное рассуждение с правыми модулями показывает, что $\varphi(e_{ij}) = g_i \otimes (s_{ij})^*$, где $v : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$, $v : e_i \to g_i$ — изоморфизм, а $s_{ij} \in \mathbb{C}^n$ — некоторые элементы. Из этих двух соотношений получаем, что $\varphi(e_{ij}) = \lambda_{ij} g_i \otimes (h_j)^*$, где λ_{ij} — некоторые числа. При этом (см. доказательство леммы 3.7) $\varphi([e_i]) = \lambda_{ii} g_i \otimes (h_i)^*$ является самосопряженным проектором, так что $h_i = \mu g_i$ и $g_i = (\lambda_{ij}\overline{\mu})(g_i \otimes (g_i)^*)(g_i) = (\lambda_{ij}\overline{\mu}) g_i$ и $\lambda_{ij}\overline{\mu} = 1$. Таким образом, можно считать, что $h_i = g_i$, $u = v$ и (новые) λ_{ij} удовлетворяют $\lambda_{ii} = 1$ для любого i. При этом g_i образуют ортонормированный базис (см. доказательство леммы 3.7), так что $u : e_i \mapsto g_i$ является унитарным. Из сохранения равенств $e_{ij} e_{ji} = e_{ii} = [e_i]$ и $e_{ij}^* = e_{ji}$ при гомоморфизме φ получаем, что $\lambda_{ij}\lambda_{ji} = 1$, $\overline{\lambda_{ij}} = \lambda_{ji}$, так что, в частности, λ_{ij} — комплексные числа, по модулю равные 1.

Рассмотрим матрицу $\Lambda = \|\lambda_{ij}\|$. Переходя, если нужно, от векторов g_i к $(\lambda_{1i})^{-1} g_i = \overline{\lambda_{1i}} g_i$ при $i = 2, \ldots, n$, можем считать $\lambda_{1i} = \lambda_{i1} = 1$ при $i = 2, \ldots, n$. При этом образ $\varphi(a)$ матрицы $a = \|a_{ij}\|$ записывается относительно ортонормированного базиса $\{g_i\}$ как $\|\lambda_{ij} a_{ij}\|$, а если матрица a была унитарная, то $\varphi(a)$ тоже должна быть унитарной. Пусть некоторое $\lambda_{ij} \neq 1$ (что возможно только при $i \neq j$, $i \neq 1$). Беря для этих i, j унитарную матрицу a с $a_{1i} = 1/\sqrt{2}$, $a_{1j} = 1/\sqrt{2}$, $a_{ii} = 1/\sqrt{2}$, $a_{ij} = -1/\sqrt{2}$ (и остальные в этих строках и столбцах, конечно, — нули), получим условие ортогональности этих строк в виде $0 = (1/\sqrt{2} \cdot 1)\overline{(1/\sqrt{2} \cdot 1)} + (-1/\sqrt{2} \cdot \lambda_{ij})\overline{(1/\sqrt{2} \cdot 1)} = (1 - \lambda_{ij})/2$, так что $\lambda_{ij} = 1$. Противоречие.

Итак, для любых i, j получаем, что $\varphi(e_i \otimes (e_j)^*) = v(e_i) \otimes (v(e_j))^* = v \cdot (e_i \otimes (e_j)^*) \cdot v^*$. Поскольку любая матрица является линейной комбинацией таких матричных единиц, то по линейности получаем требуемое равенство $\varphi(a) = vav^*$. $\square$