Лекция 13

Обсуждение программы и списка задач

Программа:

1. C*-алгебры – определение и примеры.
2. Присоединение единицы к C*-алгебре.
3. Спектр элемента C*-алгебры, его свойства.
4. Коммутативные C*-алгебры. Пространство максимальных идеалов. Преобразование Гельфанда.
5. Теорема Гельфанда о коммутативных C*-алгебрах.
6. Теорема Стоуна-Вейерштрасса.
7. C*-алгебра, порожденная нормальным элементом. Функциональное исчисление для нормальных операторов.
8. Положительные элементы, их свойства.
9. Аппроксимативные единицы, их существование.
10. Идеалы, фактор-алгебры, наследственные подалгебры.
11. Автоматическая непрерывность *-гомоморфизмов.
12. Алгебры фон Неймана. Теорема о бикоммутанте.
13. Топологически неприводимые представления.
14. Положительные функционалы, состояния.
15. ГНС-конструкция.
16. Реализация C*-алгебр как операторных алгебр (теорема Гельфанда-Наймарка).
17. Разложение Жордана.
18. Конечномерные линейные топологические пространства, единственность отделимой топологии.
19. Конечномерные C*-алгебры, их унитальность и структура.
20. Невырожденные представления.
21. Алгебра компактных операторов и ее свойства.

22. AF-алгебры, описание гомоморфизмов конечномерных алгебр, диаграммы Браттели.

23. Алгебры мультипликаторов и централизаторов.

24. Гильбертовы C*-модули и алгебры, с ними связанные.

25. Алгебра Калкина и ее свойства.

Дополнительный список задач (к сформулированным на лекциях)

1. Пусть A — C^*-алгебра, $a \in A$, $p, q \in A$ — ортогональные проекторы (т.е. самосопряженные идемпотенты, удовлетворяющие $pq = 0$). Показать, что если a положителен и $pap = 0$, то $paq = 0$.

2. Пусть A — C^*-алгебра, $a \in A$. Обозначим через aAa множество всех элементов вида aba, где $b \in A$, а через $\overline{aAa}$ — замыкание этого множества. C^*-подалгебра $B \subset A$ *наследственна*, если из условий $0 \leq a \leq b$ и $b \in B$ следует, что $a \in B$.

   (a) Проверить, что $\overline{aAa}$ — C^*-подалгебра для любого $a \in A$.

   (b) Пусть $p \in A$ — проектор. Проверить, что pAp замкнуто.

   (c) Показать, что pAp наследственна для любого проектора p.

   (d) Показать, что $\overline{aAa}$ наследственна для любого положительного $a \in A$.

3. Пусть $X \subset \mathbb{R}$ — множество точек $1, 1/2, 1/3, \dots$ и 0. Пусть $C(X, M_2)$ — множество всех непрерывных функций на X со значениями в матричной алгебре M_2. Положим $B_1 = \{f \in C(X, M_2) : f(0)$ диагональна$\}$, $B_2 = \{f \in C(X, M_2) :$ $f(0)$ имеет вид $\left(\begin{smallmatrix} * & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)\}$.

   (a) Показать, что $C(X, M_2)$, B_1, B_2 — C^*-алгебры.

   (b) Найти все (двухсторонние, замкнутые) идеалы в $C(X)$, $C(X, M_2)$, B_1, B_2.

4. Пусть A — C^*-алгебра, $J \subset A$ — идеал, $a \in A$ — самосопряженный элемент. Показать, что существует такой $j \in J$, что $\|[a]\| = \|a - j\|$, где $[a] \in A/J$ — класс $a + J$ элемента a. Указание: разложить $a - \|[a]\| \cdot 1 = a_+ - a_-$ с положительными a_+, a_- и показать, что $a_+ \in J$.

5. Пусть A — C^*-алгебра, $a \in A$ — самосопряженный элемент. Показать, что если спектр $\sigma(a)$ — бесконечное множество, то A бесконечномерна.

6. Описать ГНС-конструкцию для C^*-алгебры $C[0, 1]$ и для положительного линейного функционала φ

   (a) $\varphi(f) = f(0)$,

   (b) $\varphi(f) = \frac{1}{2}(f(0) + f(1))$,

   (c) $\varphi(f) = \int_0^1 f(x)\, dx$,

где $f \in C[0,1]$.

7. Описать ГНС-конструкцию для C^*-алгебры M_n комплексных $n \times n$-матриц и для положительного линейного функционала φ

   (a) $\varphi(A) = a_{11}$,

   (b) $\varphi(A) = \mathrm{tr}(A)$,

   где $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n \in M_n$.

8. Пусть π, σ — представления C^*-алгебры A в гильбертовых пространствах H_π и H_σ, и пусть частичная изометрия $U : H_\pi \to H_\sigma$ удовлетворяет равенству $\sigma(a)U = U\pi(a)$ для любого $a \in A$. Показать, что образ (соотв. ортогональное дополнение к ядру) U является инвариантным подпространством для $\sigma(A)$ (соотв. для $\pi(A)$). (U — частичная изометрия, если U^*U и UU^* являются проекторами)

9. (a) Пусть $M_n(A)$ — множество всех $n \times n$-матриц с коэффициентами из C^*-алгебры A. Показать, что на $M_n(A)$ существует C^*-норма.

   (b) Пусть A — C^*-алгебра с нормой $\| \cdot \|$, и пусть $\| \cdot \|'$ — другая норма на A, эквивалентная первой норме. Показать, что если $\| \cdot \|'$ — C^*-норма, то обе нормы совпадают. Вывести из этого единственность C^*-нормы на $M_n(A)$.

10. Пусть φ — состояние на C^*-алгебре A. Предположим, что для некоторого самосопряженного элемента $a \in A$ выполнено равенство $\varphi(a^2) = \varphi(a)^2$. Показать, что из этого следует, что $\varphi(ab) = \varphi(ba) = \varphi(a)\varphi(b)$ для любого $b \in A$.

11. Пусть $A = c$ — C^*-алгебра сходящихся последовательностей комплексных чисел, $c = \{(a_n)_{n \in \mathbb{N}} : a_n \in \mathbb{C}; \lim_{n \to \infty} a_n \text{ существует}\}$. Рассмотрим ее как C^*-подалгебру алгебры $\mathbb{B}(l_2)$ ограниченных операторов гильбертова пространства l_2 суммируемых с квадратом последовательностей. Найти первый и второй коммутант, A' и A'', и (независимо) слабое замыкание A в $\mathbb{B}(l_2)$.

12. (a) Показать, что слабая топология строго слабее сильной топологии.

    (b) Пусть $P \subset \mathbb{B}(H)$ — множество всех (самосопряженных) проекторов в гильбертовом пространстве. Показать, что если $p_\lambda \to p$ слабо сходится, где $p_\lambda \in P$ и $p \in P$, то $p_\lambda \to p$ сильно сходится.

    (c) Показать, что сильный предел последовательности (самосопряженных) проекторов является проектором.

    (d) Найти пример слабо сходящейся направленности $p_\lambda \to p$ с $p_\lambda \in P$ и $p \notin P$.

13. Пусть $H_n \subset H$ — подпространство гильбертова пространства H, порожденное первыми n векторами ортонормированного базиса. В множестве всех последовательностей $(m_1, m_2, \ldots)$, где $m_k \in \mathbb{B}(H_n) \subset \mathbb{B}(H)$, рассмотрим подмножество A всех таких последовательностей, что

- $\sup_k \|m_k\| < \infty$;
- последовательности $(m_1, m_2, \ldots)$ и $(m_1^*, m_2^*, \ldots)$ являются сходящимися в сильной топологии.

Показать, что A — C^*-алгебра, и что отображение $(m_1, m_2, \ldots) \mapsto$ $s\text{-}\lim_{k\to\infty} m_k \in \mathbb{B}(H)$ является сюръективным $*$-гомоморфизмом $A \to \mathbb{B}(H)$.

14. Пусть A — коммутативная C^*-алгебра, π — ее неприводимое представление в гильбертовом пространстве H. Показать, что $\dim H = 1$.

15. Пусть $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ — ортонормированный базис гильбертова пространства H, и пусть операторы a, b задаются равенствами $ae_i = e_{2i}$; $be_i = e_{2i-1}$. Пусть $E = C^*(a, b) \subset \mathbb{B}(H)$ — C^*-алгебра, порожденная a и b.

    (a) Проверить ограниченность a и b и доказать равенства $a^*a = b^*b = 1$, $aa^* + bb^* = 1$.

    (b) Доказать, что E не изоморфна полной групповой C^*-алгебре $C^*(G)$ ни для какой группы G.

16. Рассмотрим $C[0,1]$ как C^*-подалгебру в $\mathbb{B}(H)$, где $H = L^2([0,1])$ (непрерывные функции действуют на H умножением).

    (a) Проверить, что $C[0,1] \cap \mathbb{K}(H) = 0$;

    (b) Пусть φ — линейный функционал на $C[0,1]$, определенный равенством $\varphi(f) = f(0)$, $f \in C[0,1]$. Найти такую слабо сходящуюся к нулю в H последовательность $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ векторов единичной длины, что выполняется $\varphi(f) = \lim_{n\to\infty}\langle fe_n, e_n\rangle$ для любой функции $f \in C[0,1]$.

17. Операторы a, b в гильбертовом пространстве H называются *компалентными*, если существует такой унитарный оператор $u \in \mathbb{B}(H)$, что $u^*au - b \in \mathbb{K}(H)$. Показать, что если самосопряженные операторы a, b компалентны, то совпадают их существенные спектры.

18. Показать, что любая AF C^*-алгебра без единицы имеет аппроксимативную единицу, состоящую из возрастающей последовательности проекторов.

19. (a) Показать, что $C[0,1]$ не является AF-алгеброй.

    (b) Построить инъективный $*$-гомоморфизм $C[0,1]$ в AF-алгебру $C(K)$ непрерывных функций на Канторовом множестве K. Указание: построить функцию f на K, принимающую все рациональные значения из $[0,1]$ и показать, что $C^*(f)$ изометрично $*$-изоморфна $C(\mathrm{Sp}(f)) = C[0,1]$.

20. Пусть $A_n = M_{2^n}(\mathbb{C}) \oplus M_{2^n}(\mathbb{C})$, а вложение $\alpha_n : A_n \to A_{n+1}$ задано формулой $\alpha_n : \left(\begin{smallmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{smallmatrix}\right) \mapsto \left(\begin{array}{cc|cc} a_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & a_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_2 \end{array}\right)$, где $a_1, a_2 \in M_{2^n}(\mathbb{C})$.

(a) Определить диаграмму Браттели для AF-алгебры $A = \overline{\cup_{n=1}^{\infty} A_n}$;

(b) Выяснить, есть ли в A единица.

21. Найти $M(A)$, где $A = \{f \in C([0,1]; M_2) : f(0)_{11} = f(0)_{12} = f(0)_{21} = 0; f(1) = 0\}$ (здесь M_2 — алгебра двумерных матриц).