Лекция 3

1.5 Преобразование Гельфанда

Определение 1.22. Для коммутативной банаховой алгебры A определим *преобразование Гельфанда* $\Gamma : A \to C_0(M_A)$ соотношением $\Gamma(a) = \hat{a}$, где $\hat{a}(\varphi) := \varphi(a)$ (необходимые условия будут проверены в следующей лемме).

Лемма 1.23. *Преобразование Гельфанда является нестрого сжимающим гомоморфизмом алгебр и образ A разделяет точки M_A, то есть для любых двух точек M_A найдется функция из образа, принимающая в этих точках разные значения.*

Доказательство. Функции $\hat{a}$ непрерывны по определению $*$-слабой топологии. Отображение является сжимающим, поскольку

$$\|\Gamma(a)\| = \sup_{\varphi \in M_A} |\varphi(a)| \leq \sup_{\varphi \in M_A} \|\varphi\| \cdot \|a\| = \sup_{\varphi \in M_A} \|a\| = \|a\|.$$

Разделение точек очевидно, поскольку два (мультипликативных) функционала различны тогда и только тогда, когда различны их значения на каком-то элементе a. Если у A нт единицы, то заметим, что $\hat{a}(\tilde{0}) = 0(a) = 0$, где $M_{A^+} = M_A \cup \tilde{0}$. Поэтому $\hat{a} \in C_0(M_A)$. □

Задача 22. Если у алгебры есть единица, то $\Gamma(1) = 1$.

Следствие 1.24. *Пусть A — коммутативная банахова алгебра с единицей. Тогда $a \in A$ обратим тогда и только тогда, когда $\hat{a}$ обратим, и тогда и только тогда, когда $\hat{a}(\varphi) \neq 0$ для любого $\varphi \in M_A$. Поэтому* $\mathrm{Sp}(a) = \mathrm{Sp}(\hat{a}) = \{\varphi(a) : \varphi \in M_A\}$ *и* $\|\hat{a}\| = r(a)$.

Доказательство. Если a обратим, то $\hat{a}$ обратим по задаче 22. Если же a не является обратимым, то рассмотрим идеал $I = \overline{aA}$. Как обсуждалось выше (см. доказательство леммы 1.19), этот идеал не может содержать 1, поэтому является собственным. Пусть I_M — максимальный идеал, содержащий I (см. задачу 23 ниже), а φ — соответствующий I_M мультипликативный функционал. Тогда $\varphi(a) = 0$ и $\hat{a}$ не является обратимым в $C(M_A)$.

Остальные утверждения сразу получаются из доказанного. □

Задача 23. Любой идеал I коммутативной банаховой алгебры с единицей содержится в некотором максимальном идеале. Указание: рассмотреть объединение J всех собственных идеалов I_α, содержащих I, частично упорядоченное по включению. Для каждой цепи (вполне упорядоченной подсистемы) I_{α_τ} воспользовавшись, как и выше, тем, что 1 не принадлежит каждому I_{α_τ}, убедиться, что она не принадлежит $\cup_\tau I_{\alpha_\tau}$, так что это — собственный идеал. Затем применить лемму Цорна.

Теорема 1.25. *Пусть A — коммутативная C^*-алгебра. Тогда преобразование Гельфанда является изометрическим $*$-изоморфизмом A на $C_0(M_A)$.*

Доказательство. Докажем теорему для алгебры с единицей. Необходимая адаптация для случая без единицы оставляется читателю в качестве задачи 24.

Пусть $\varphi \in M_A$. Рассмотрим сначала самосопряженный элемент $a^* = a \in A$. Положим $u_t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ita)^n}{n!}$, $t \in \mathbb{R}$. Легко проверить, рассматривая частичную сумму и переходя к пределу, что $u_t^* = u_t^{-1}$, так что $u_t \in A$ — унитарный (см. лемму 1.16). Тогда

$$1 \geq |\varphi(u_t)| = |\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(it\varphi(a))^n}{n!}| = |e^{it\varphi(a)}| = e^{-t\operatorname{Im}\varphi(a)}.$$

В силу произвольности $t \in \mathbb{R}$ в этой оценке, заключаем, что $\operatorname{Im}\varphi(a) = 0$, то есть $\varphi(a) \in \mathbb{R}$.

Произвольный элемент $c \in A$ запишем в виде $c = a + ib$, где $a = (c + c^*)/2$ и $b = (c - c^*)/2i$ являются самосопряженными. По доказанному, $\varphi(a), \varphi(b) \in \mathbb{R}$, а значит, $\varphi(c^*) = \varphi(a) - i\varphi(b) = \overline{\varphi(c)}$, так что преобразование Гельфанда сохраняет инволюцию и, таким образом, является $*$-гомоморфизмом.

Для самосопряженного элемента ($a = a^*$) имеем $\|a\|^2 = \|a^*a\| = \|a^2\|$, поэтому

$$\|\hat{a}\| = r(a) = \lim_{n\to\infty} \|a^{2^n}\|^{1/2^n} = \lim_{n\to\infty} (\|a\|^{2^n})^{1/2^n} = \|a\|.$$

Для элемента $b \in A$ общего вида имеем $\|b\|^2 = \|b^*b\| = \|\widehat{b^*b}\| = \|\hat{b}^*\hat{b}\| = \|\hat{b}\|^2$, так что преобразование Гельфанда является изометрией (на образ).

Поэтому $\Gamma(A)$ является замкнутой по норме инволютивной подалгеброй с единицей в $C(M_A)$, разделяющей точки. По теореме Стоуна-Вейерштрасса[1], $\Gamma(A) = C(M_A)$. □

Задача 24. Доказать теорему для алгебры без единицы.

Таким образом, в частности, существует обратное отображение для преобразования Гельфанда, которое так же является изометрическим $*$-изоморфизмом.

Пусть $a \in A$ — нормальный элемент. Обозначим через $C^*(1, a)$ (соотв., $C^*(a)$) C^*-алгебру, порожденную 1 и a (соотв., только a). В силу нормальности, эти алгебры коммутативны, причем первое определение подразумевает, что A имеет единицу.

Уточним, что *C^*-алгеброй, порожденной множеством,* мы называем минимальную C^*-подалгебру A, содержащую множество, то есть пересечение всех C^*-подалгебр A, содержащих это множество.

Задача 25. Проверьте, что C^*-алгебра, порожденная множеством, — действительно C^*-алгебра.

Задача 26. Если a — обратимый элемент, то алгебра $C^*(a)$ имеет единицу. В этом случае $C^*(a) = C^*(1, a)$.

Следствие 1.26. *Если $a^* = a$, то $\operatorname{Sp}(a) \subset \mathbb{R}$.*

[1] Теорема не всегда рассказывается в стандартном курсе функционального анализа, поэтому мы приводим ее доказательство в параграфе 1.6.

Доказательство. Как мы установили, $\mathrm{Sp}(a) = \mathrm{Sp}(\widehat{a})$, причем по доказанному $\widehat{a}^* = \widehat{a}$. Но самосопряженная функция — это функция, принимающая вещественные значения, в то время как спектр функции — это множество ее значений. □

Следствие 1.27. *Алгебра $C^*(1,a)$ изометрически $*$-изоморфна алгебре $C(\mathrm{Sp}(a))$ при отображении, переводящем a в функцию $z(t) = t$, $z : \mathrm{Sp}(a) \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Алгебра $C^*(a)$ отображается на $C_0(\mathrm{Sp}(a) \setminus \{0\})$.*

Доказательство. Для коммутативной C^*-алгебры $C^*(1,a)$ найдем $X = M_{C^*(1,a)}$. Любой мультипликативный функционал $\varphi \in X$ определяется его значением $\varphi(a) = \lambda$ на a. При этом в силу мультипликативности $\varphi(p(a,a^*)) = p(\lambda,\bar{\lambda})$ для любого многочлена p. Таким образом, X отождествляется с множеством возможных значений λ, которые принимает $\varphi(a) = \hat{a}(\varphi)$ при $\varphi \in X$. По следствию 1.24, имеем $\hat{a}(X) = \mathrm{Sp}(a)$. Получаем отождествление $\mathrm{Sp}(a) \cong X$ при помощи соответствия $\mathrm{Sp}(a) \ni \lambda \mapsto \varphi_\lambda \in X$, где φ_λ определяется условием $\varphi_\lambda(a) = \lambda$.

Это отождествление переносится на функции: каждая непрерывная функция на X отождествляется с непрерывной функцией на $\mathrm{Sp}(a)$, именно, функции $\hat{b} = \hat{b}(\varphi)$ сопоставляется функция аргумента $\lambda \in \mathrm{Sp}(a)$, заданная как $\lambda \mapsto \varphi_\lambda(b)$. Например, если мы возьмем многочлен $p(a,a^*) = b$, то соответствующей функцией будет $\lambda \mapsto \varphi_\lambda(p(a,a^*)) = p(\lambda,\bar{\lambda})$. В частности, функция $\hat{a}$ переходит в $\lambda \mapsto \varphi_\lambda(a) = \lambda$, так что преобразование Гельфанда отождествляет $\hat{a}$ с тождественным отображением $X \subset \mathbb{C}$. По теореме 1.25, это отображение — изометрический $*$-изоморфизм.

Если a обратим, то по задаче 26, $C^*(a)$ изометрически $*$-изоморфно $C(\mathrm{Sp}(a))$. Если же a не является обратимым, то $C^*(a)$ не имеет единицы (см. задачу 27). Она соответствует при построенном отображении для $C^*(1,a) \cong C^*(a)^+$ идеалу $C(\mathrm{Sp}'(a))$, состоящему из функций, обнуляющихся в 0. □

Задача 27. Доказать, что если a не является обратимым, то $C^*(a)$ не имеет единицы. Указание: если 1 имеется, то она должна приближаться многочленом от a и a^*, который не может быть обратимым элементом.

Следствие 1.28 (непрерывное функциональное исчисление)**.** *Пусть a — нормальный элемент C^*-алгебры A с единицей, а f — непрерывная функция на $\mathrm{Sp}(a)$. Тогда элемент $f(a) \in A$ определяется как прообраз f при преобразовании Гельфанда: $\Gamma = \Gamma_a : C^*(1,a) \to C(\mathrm{Sp}(a))$, $f(a) := (\Gamma_a)^{-1}(f)$. Если $0 \in \mathrm{Sp}(a)$ и $f(0) = 0$, то $f(a) \in C^*(a)$. Кроме того, $f(\mathrm{Sp}(a)) = \mathrm{Sp}(f(a))$ и если g — непрерывная функция на $f(\mathrm{Sp}(a))$, то $g(f(a)) = (g \circ f)(a)$.*

Доказательство. Всё уже было доказано, кроме последнего утверждения. Рассмотрим сначала многочлен $p(\lambda,\bar{\lambda})$ в качестве $f = f(\lambda)$. Тогда $\Gamma(p(a,a^*))$ — функция $\lambda \mapsto p(\lambda,\bar{\lambda})$, так что $\mathrm{Sp}(p(a,a^*))$ совпадает с множеством значений этой функции, $\{\mu : \mu = p(\lambda,\bar{\lambda}), \lambda \in \mathrm{Sp}(a)\}$. Приближая f многочленами, получаем $f(\mathrm{Sp}(a)) = \mathrm{Sp}(f(a))$ (задача 28).

Аналогично, рассмотрим многочлен $q(\lambda,\bar{\lambda})$ в качестве g. Легко увидеть, что

$$q(f(a)) = \lim_\alpha (q(p_\alpha(a)) = \lim_\alpha (q \circ p_\alpha)(a) = (q \circ f)(a).$$

Теперь приближаем g многочленами и пользуемся изометричностью обратного преобразования Гельфанда. $\square$

Задача 28. Доказать, что $f(\mathrm{Sp}(a)) = \mathrm{Sp}(f(a))$ в доказательстве выше, приближая f многочленами, и правильно сформулировав, что значит, что образ непрерывен при равномерном приближении, и пользуясь изометричностью преобразования Гельфанда.

Следствие 1.29. *Если a — нормальный элемент, то $\|a\| = r(a)$.*

Доказательство. $\|a\| = \|\hat{a}\| = \sup_{\varphi \in M_A} |\hat{a}(\varphi)| = \sup_{\lambda \in \mathrm{Sp}(a)} |\lambda| = r(a)$. $\square$

1.6 Дополнение: теорема Стоуна-Вейерштрасса

Рассмотрим сначала алгебру $C_{\mathbb{R}}(X)$ над $\mathbb{R}$, образованную всеми непрерывными вещественнозначными функциями на компактном хаусдорфовом пространстве X.

Теорема 1.30. *Пусть $A \subseteq C_{\mathbb{R}}(X)$, где X — компактное хаусдорфово пространство, является такой замкнутой подалгеброй*[2]*, что A разделяет точки X и содержит $1 \in C_{\mathbb{R}}(X)$ (а значит, и все постоянные функции). Тогда $A = C_{\mathbb{R}}(X)$.*

Доказательство. Прежде всего, заметим, что условие разделения точек можно усилить, а именно: для любых x и y из X и любых u и v из $\mathbb{R}$ существует такая функция $g \in A$, что $g(x) = u$ и $g(y) = v$. Действительно, поскольку имеется $f \in A$ со свойством $u' = f(x) \neq f(y) = v'$, то g можно взять равной

$$g = \frac{u - v}{u' - v'} \cdot f + \frac{u'v - v'u}{u' - v'} \cdot 1.$$

Для $f, g \in A$ определим непрерывные функции $f \vee g$, $f \wedge g$, $\gamma(g)$ как

$$(f \vee g)(s) = \max\{f(s), g(s)\}, \qquad (f \wedge g)(s) = \min\{f(s), g(s)\}, \qquad \gamma(g)(s) = |g(s)|.$$

По теореме Вейерштрасса о приближении непрерывных функций многочленами, найдется такая последовательность многочленов p_n, что

$$|\,|\lambda| - p_n(\lambda)| \leqslant \frac{1}{n} \qquad \text{при } -n \leqslant \lambda \leqslant n.$$

Тогда

$$|\,|g(s)| - p_n(g)(s)| = |\,|g(s)| - p_n(g(s))| \leqslant \frac{1}{n} \qquad \text{при } -n \leqslant g(s) \leqslant n.$$

Значит, $\gamma(g) \in A$. Поэтому и $f \vee g \in A$, $f \wedge g \in A$, поскольку

$$f \vee g = \frac{f + g}{2} + \frac{\gamma(f - g)}{2}, \qquad f \wedge g = \frac{f + g}{2} - \frac{\gamma(f - g)}{2}.$$

[2] это условие можно ослабить

Рассмотрим теперь произвольную $F \in C_{\mathbb{R}}(X)$ и по замечанию из начала доказательства, найдем для произвольных $x, y \in X$ такую $f_{x,y} \in A$, что $f_{x,y}(x) = F(x)$ и $f_{x,y}(y) = F(y)$. Зафиксировав временно y, найдем для каждого $x \in X$ такую его окрестность U_x, что $f_{x,y}(u) > F(u) - \varepsilon$ при $u \in U_x$. Выберем конечное подпокрытие $U_{x_1}, \dots U_{x_p}$ и определим $f_y = f_{x_1,y} \vee \dots \vee f_{x_p,y}$. Тогда $f_y(u) > F(u) - \varepsilon$ при любом $u \in X$. Поскольку $f_{x_i,y}(y) = F(y)$ для любого $i = 1, \dots, p$, то $f_y(y) = F(y)$. Значит, найдется такая окрестность V_y точки y, что $f_y(u) < F(u) + \varepsilon$ при $u \in V_y$. Выберем конечное подпокрытие $V_{y_1}, \dots, V_{y_q}$ и определим $f := f_{y_1} \wedge \dots \wedge f_{y_q}$. Так как каждое $f_{y_i}(u) > F(u) - \varepsilon$ при любом $u \in X$, то и $f(u) > F(u) - \varepsilon$ при любом $u \in X$. С другой стороны, для любого $u \in X$ найдется $V_{y_i} \ni u$, так что $f(u) < f_{y_i}(u) < F(u) + \varepsilon$. Объединяя неравенства, получаем, что $|f(u) - F(u)| < \varepsilon$ при любом $u \in X$. В силу произвольности ε получаем требуемый результат. $\square$

Теорема 1.31. *Пусть $A \subseteq C(X)$, где X — компактное хаусдорфово пространство, является такой замкнутой инволютивной подалгеброй, что A разделяет точки X и содержит $1 \in C(X)$ (а значит, и все постоянные функции). Тогда $A = C(X)$.*

Доказательство. Инволюция имеет вид $f^*(x) = \overline{f(x)}$. Пусть A_R состоит из вещественнозначных функций, принадлежащих A. Заметим, что это — подалгебра алгебры $C_{\mathbb{R}}(X)$, содержащая единицу. Поскольку A_R совпадает с ядром непрерывного $\mathbb{R}$-линейного отображения $f \mapsto f - f^*$, то она замкнута в A, а значит, и в $C(X)$. Поэтому $A_R = A \cap C_{\mathbb{R}}(X)$ замкнута в $C_{\mathbb{R}}(X)$. Наконец, A_R разделяет точки X. Действительно, если $f(x) \neq f(y)$, где $f \in A$, то $f = f_1 + if_2$ при $f_1 = (f + f^*)/2 \in A_R$, $f_1 = (f - f^*)/2i \in A_R$, так что хотя бы одна из f_1, f_2 разделяет x и y.

Поэтому по предыдущей теореме, $C_{\mathbb{R}}(X) = A_R \subset A$. Снова пользуясь представлением $f = f_1 + if_2$, но уже для всей $C(X)$, видим, что $\mathbb{C}$-линейные комбинации элементов $C_{\mathbb{R}}(X)$ дают $C(X)$ и, в то же время, дают A в силу доказанного. Значит, $A = C(X)$. $\square$