

Лекция 6

1.10 Топологии на $\mathbb{B}(H)$ и алгебры фон Неймана

Кроме топологии нормы, имеются и другие полезные топологии на C^* -алгебре $\mathbb{B}(H)$.

Определение 1.54. *Сильная топология* задается системой полунорм $a \rightarrow \|a\xi\|$, $\xi \in H$.

Слабая топология задается системой полунорм $a \rightarrow (a\xi, \eta)$, $\xi, \eta \in H$.

Теорема 1.55. *Для линейного функционала $\varphi : \mathbb{B}(H) \rightarrow \mathbb{C}$ следующие условия эквивалентны:*

- (i) *Существуют такие $\xi_k, \eta_k \in H$, $k = 1, \dots, n$, что $\varphi(a) = \sum_{k=1}^n (a\xi_k, \eta_k)$ для любого $a \in \mathbb{B}(H)$;*
- (ii) *φ слабо непрерывен;*
- (iii) *φ сильно непрерывен.*

Доказательство. Очевидно, что (i) $\implies$ (ii) $\implies$ (iii). Покажем, что из (iii) следует (i).

Сильная непрерывность φ означает, что прообраз $\{a : |\varphi(a)| < 1\}$ открытого единичного диска является открытым множеством в сильной топологии, то есть найдутся такие положительные константы $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ и векторы $\xi_1, \dots, \xi_n$, что для любого $a \in \mathbb{B}(H)$ из $\|a\xi_k\| < \varepsilon_k$ (для всех $k = 1, \dots, n$) следует, что $|\varphi(a)| < 1$. Меняя при необходимости длину этих векторов, видим, что эквивалентным образом можно сказать, что существуют такие векторы $\xi_1, \dots, \xi_n$, что для любого $a \in \mathbb{B}(H)$ из $\max_k \|a\xi_k\| \leq 1$ следует, что $|\varphi(a)| \leq 1$. Тогда

$$|\varphi(a)| \leq \left(\sum_{k=1}^n \|a\xi_k\|^2 \right)^{1/2}. \quad (1.9)$$

Действительно, если $|\varphi(a)|^2 > \sum_{k=1}^n \|a\xi_k\|^2$ для некоторого a , то $|\varphi(a)| > \|a\xi_k\|$ для всех k , так что, так как их конечное число, можно найти такое $\alpha \in \mathbb{R}$, что $|\varphi(\alpha a)| > 1$, а $\max_k \|\alpha a\xi_k\| < 1$ (например, $\alpha^{-1} := (|\varphi(a)| + \max_k \|a\xi_k\|)/2$). Противоречие.

Положим $K := \oplus_{k=1}^n H$. Алгебра $\mathbb{B}(K)$ может быть отождествлена с алгеброй $n \times n$ -матриц с элементами из $\mathbb{B}(H)$. Пусть $\rho : \mathbb{B}(H) \rightarrow \mathbb{B}(K)$ отображает $a \in \mathbb{B}(H)$ в диагональную матрицу со всеми диагональными элементами, равными a .

Обозначим $\xi := \xi_1 \oplus \dots \oplus \xi_n \in K$ и заметим, что, положив $\psi(\rho(a)\xi) = \varphi(a)$, мы получим линейный функционал на замкнутом подпространстве $L \subset K$, где L — замыкание пространства $L_0 := \{\rho(a)\xi \mid a \in \mathbb{B}(H)\}$. Действительно, сначала надо проверить корректность определения ψ на L_0 : если $\rho(a)(\xi) = \rho(b)(\xi)$, то $(a-b)\xi_k = 0$ для $k = 1, \dots, n$. В частности, для сколь угодно большого $R > 0$ имеем $\|R(a-b)\xi_k\| \leq 1$, а значит, $|\varphi(R(a-b))| \leq 1$. Поэтому $|\varphi(a-b)| \leq 1/R$. В силу произвольности R получаем, что $\varphi(a-b) = 0$ и, тем самым, определение корректно на L_0 . Из (1.9) видим, что $|\psi(\rho(a))| \leq \|\rho(a)\xi\|$, так что $|\psi(\zeta)| \leq \|\zeta\|$ для любого $\zeta \in L_0$, а значит, и L . Итак, ψ

— ограниченный функционал на L . По теореме Рисса о представлении функционалов, найдется такой вектор $\eta \in L \subset K$, что $\psi(\zeta) = (\zeta, \eta)$ для всех $\zeta \in L$ (считаем эрмитово произведение линейным по первому аргументу), так что $\varphi(a) = (\rho(a)\xi, \eta)$. Разложив на компоненты $\eta = \eta_1 \oplus \dots \oplus \eta_n$, получаем $(\rho(a)\xi, \eta) = \sum_{k=1}^n (a\xi_k, \eta_k)$. $\square$

Следствие 1.56. *Выпуклое множество в $\mathbb{B}(H)$ замкнуто в слабой топологии тогда и только тогда, когда оно замкнуто в сильной.*

Доказательство. Это сразу следует из предыдущей теоремы, поскольку, по теореме Хана-Банаха, замкнутые выпуклые множества получаются как пересечение замкнутых полупространств, соответствующих линейным функционалам. $\square$

Определение 1.57. *Алгеброй фон Неймана называется C^* -подалгебра $\mathbb{B}(H)$, содержащая единицу (тождественный оператор) и замкнутая в слабой топологии.*

Простейшими примерами являются $\mathbb{C}$ и $\mathbb{B}(H)$ (на самом деле, первая алгебра — частный случай второй).

Определение 1.58. Для множества $S \subseteq \mathbb{B}(H)$ обозначим через S' его *коммутант*, то есть множество всех таких операторов $a \in \mathbb{B}(H)$, что $as = sa$ для всякого $s \in S$.

Задача 42. Проверить, что

- Если S — самосопряженное, то и S' тоже.
- Коммутант любого множества — алгебра с единицей.
- Коммутант любого множества слабо замкнут.
- Таким образом, S' — алгебра фон Неймана для любого самосопряженного множества S .
- Если $S_1 \subset S_2$, то $S'_1 \supset S'_2$.
- Всегда $S \subset S''$.
- Поэтому $S' = S'''$, $S'' = S''''$ и т.д.

Теорема 1.59 (фон Неймана о бикоммутанте). *Пусть A — C^* -подалгебра $\mathbb{B}(H)$, содержащая единичный оператор. Тогда следующие условия эквивалентны.*

- (i) $A = A''$;
- (ii) A слабо замкнута;
- (iii) A сильно замкнута.

Доказательство. Поскольку A является выпуклым подмножеством, то (ii) и (iii) эквивалентны по следствию 1.56. Поскольку A'' слабо замкнуто, то из (i) следует (ii). Остается показать, что из (iii) следует (i).

Для вектора $\xi \in H$ обозначим через p проекцию на замыкание V линейного подпространства, образованного векторами $a\xi$, $a \in A$. Заметим, что V является a -инвариантным для любого $a \in A$. Действительно, общий элемент $\eta \in V$ имеет вид $\eta = \lim_{\alpha} a_{\alpha}\xi$ для некоторой направленности. Тогда для любого $a \in A$ в силу непрерывности действия A на H ,

$$a\eta = a \lim_{\alpha} a_{\alpha}\xi = \lim_{\alpha} aa_{\alpha}\xi \in V.$$

Таким образом, $p\eta = \eta$ при $\eta \in V$. Поскольку $1 \in A$, то $\xi \in V$, так что $p\xi = \xi$. Поэтому $rap\zeta = ra\eta = a\eta = ar\zeta$ для любого $\zeta \in H$, где обозначено $\eta = p\zeta \in V$. Так что $rap = ar$ для любого $a \in A$. Отсюда $pa = (a^*p)^* = (pa^*p)^* = rap$ и получаем $ap = pa$, то есть $p \in A'$. Пусть $b \in A''$. Тогда $pb = bp$, так что $pb\xi = bp\xi = b\xi$ и $b\xi \in V$. Таким образом, для всякого $\varepsilon > 0$ найдется элемент $a \in A$, для которого $\|(b - a)\xi\| < \varepsilon$.

Теперь рассмотрим некоторые $\xi_1, \dots, \xi_n \in H$ и определим $\xi := \xi_1 \oplus \dots \oplus \xi_n \in K := H \oplus \dots \oplus H$. Пусть $\rho : \mathbb{B}(H) \rightarrow \mathbb{B}(K)$ — диагональное вложение. Легко видеть, что $\rho(A)'$ состоит из всех $n \times n$ -матриц с элементами из A' , а $\rho(A'') = \rho(A)''$ (задача 43). Применяя к этой ситуации первую часть доказательства, получаем, что для любого $b \in A''$ и всякого $\varepsilon > 0$ существует такой элемент $a \in A$, что $\|(\rho(b) - \rho(a))\xi\| < \varepsilon$. Это означает, что $\sum_{k=1}^n \|(b - a)\xi_k\|^2 = \|(\rho(b) - \rho(a))\xi\|^2 < \varepsilon^2$, так что мы можем сильно приблизить $b \in A''$ некоторым $a \in A$. $\square$

Задача 43. Проверить, что $\rho(A)'$ состоит из всех $n \times n$ -матриц с элементами из A' , а $\rho(A'') = \rho(A)''$.

Следствие 1.60. Если A — алгебра фон Неймана, то и A' — алгебра фон Неймана.

Определение 1.61. Центром алгебры называется множество ее элементов, коммутирующих со всеми ее элементами.

Следствие 1.62. Если A — алгебра фон Неймана, то и ее центр — алгебра фон Неймана.

Доказательство. Для подалгебры $A \subseteq \mathbb{B}(H)$ имеем $Z = A \cap A'$. $\square$

Пусть $A \subset \mathbb{B}(H)$ является C^* -алгеброй, содержащей единичный оператор. Тогда теорема о бикоммутанте утверждает, что A слабо (сильно) плотна в A'' . В этом результате есть тот недостаток, что приближение происходит элементами s , вообще говоря, неконтролируемой нормой. Это преодолевается следующей теоремой, которую мы приведем без доказательства, которое можно найти в [7, § 4.3].

Теорема 1.63 (Капланского о плотности). *Единичный шар A слабо (сильно) плотен в единичном шаре A'' . То же самое верно для множеств положительных элементов в этих единичных шарах и для множеств унитарных элементов.*

Определение 1.64. Если центр Z алгебры фон Неймана A состоит только из скалярных операторов (то есть $Z = \mathbb{C}1$), то A называется *фактором*.

Замечание 1.65. Следует отметить, что кроме непрерывного функционального исчисления для самосопряженных операторов, имеется борелевское функциональное исчисление — вместо приближения по норме непрерывных функций полиномами тут происходит приближение полиномами борелевских функций, а соответствующие операторы будут сходиться в слабой топологии. Точнее, пусть многочлены p_i сходятся монотонно и поточечно к борелевской функции f на спектре самосопряженного оператора $a \in \mathbb{B}(H)$. Тогда $p_i(a)$ — сильно сходящаяся последовательность операторов (это утверждение из стандартного курса, см. например, (см. [5, глава V, теорема 5]). Поскольку все многочлены коммутируют с коммутантом самосопряженного оператора, то для любой борелевской функции f на спектре самосопряженного оператора a , оператор $f(a)$ лежит в $\{a\}''$.