

Глава 2

Представления C^* -алгебр

Лекция 7

2.1 Определение и основные свойства

Определение 2.1. *Представлением C^* -алгебры A в гильбертовом пространстве H называется $*$ -гомоморфизм из A в $\mathbb{B}(H)$.*

Определение 2.2. Представление C^* -алгебры A называется *алгебраически неприводимым*, если в H нет собственных инвариантных линейных подпространств (при действии операторами из образа представления). Представление *топологически неприводимо*, если нет замкнутых собственных инвариантных подпространств.

Скоро мы увидим, что для C^* -алгебр эти два понятия совпадают.

Лемма 2.3. *Представление π топологически неприводимо тогда и только тогда, когда $\pi(A)' = \mathbb{C}1$.*

Доказательство. Если $\pi(A)'$ содержит что-то, кроме скаляров, то оно содержит и самосопряженный нескаларный оператор (это сразу следует из разложения нескаларного оператора в линейную комбинацию двух самосопряженных $a = \frac{a+a^*}{2} + i \cdot \frac{a-a^*}{2i}$, которые тоже принадлежат коммутанту, и хотя бы один из них не является скалярным). Применяя борелевское функциональное исчисление (см. замечание 1.65) к этому самосопряженному оператору b , можем получить собственный проектор p в $\pi(A)'$. Именно, если оператор нескаларный, то у него, по крайней мере, две различные точки в спектре, скажем, t_0 и t_1 , и надо рассмотреть борелевскую функцию f , принимающую значения 0 и 1, причем $f(t_0) = 0$, $f(t_1) = 1$ (задача 44). (Можно также не применять исчисление, а просто взять подходящие спектральные проекторы из стандартной спектральной теоремы, которые по построению обладают необходимыми условиями коммутирования). Тогда pH — замкнутое инвариантное подпространство, так как $p \in \pi(A)'$.

Обратно, пусть $L \subset H$ — замкнутое $\pi(A)$ -инвариантное подпространство, а $p \in \mathbb{B}(H)$ — проектор на это подпространство. Тогда $\pi(a)p = p\pi(a)p$ для любого $a \in A$.

Поэтому $p\pi(a) = (\pi(a^*)p)^* = (p\pi(a^*)p)^* = p\pi(a)p = \pi(a)p$ и $p \in \pi(A)'$. При этом p не является скалярным. $\square$

Задача 44. Проверить в доказательстве выше, что $f(b)$ — собственный проектор, поскольку $f^2 = f$ и $\text{Sp}(f(b)) = \{0, 1\}$.

Задача 45. Доказать более общий факт: если самосопряженный элемент a в C^* -алгебре с единицей имеет $\text{Sp}(a) = \{0, 1\}$, то a — нескаларный идемпотент.

Лемма 2.4. Пусть π — топологически неприводимое представление C^* -алгебры A в гильбертовом пространстве H . Тогда для любых $t \in \mathbb{B}(H)$, конечномерного подпространства $L \subset H$ и $\varepsilon > 0$ существует такой элемент $a \in A$, что $\|a\| \leq \|t|_L\|$ и $\|(\pi(a) - t)|_L\| < \varepsilon$.

Доказательство. Так как π топологически неприводимо, то по лемме 2.3 $\pi(A)'$ совпадает со скалярами, а значит, $\pi(A)'' = \mathbb{B}(H)$. Поэтому $\pi(A)$ плотно в $\mathbb{B}(H)$ в слабой (сильной) топологии. Без ограничения общности, можем считать, что $\|t|_L\| = 1$. Положим $s = tp_L$, где p_L — проектор на L . Поскольку L конечномерно, то, по теореме Капланского о плотности, найдется такой $b \in A$, что $\|\pi(b)\| \leq 1$ и $\|(\pi(b) - s)|_L\| < \varepsilon/2$. Тогда имеется такой элемент $c \in A$, что $\pi(c) = \pi(b)$ и $\|c\| < \|\pi(b)\|(1 + \varepsilon/2)$. Положим $a := \frac{c}{1 + \varepsilon/2}$ (см. теорему 1.51). Тогда $\|a\| \leq 1$ и

$$\|(\pi(a) - t)|_L\| \leq \|(\pi(c) - t)|_L\| + \|\pi(a) - \pi(c)\| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

$\square$

Лемма 2.5. Пусть π — топологически неприводимое представление C^* -алгебры A в гильбертовом пространстве H . Тогда для любых $t \in \mathbb{B}(H)$, конечномерного подпространства $L \subset H$ и $\varepsilon > 0$ найдется такой $a \in A$, что $\pi(a)|_L = t|_L$ и $\|a\| \leq \|t\| + \varepsilon$.

Доказательство. По предыдущей лемме, найдется такой элемент $a_0 \in A$, что $\|a_0\| \leq \|t\|$ и $\|(\pi(a_0) - t)|_L\| < \varepsilon/2$. По индукции можем найти для каждого n такой элемент $a_n \in A$, что $\|a_n\| \leq 2^{-n}\varepsilon$ и $\|(\sum_{k=0}^n \pi(a_k) - t)p_L\| < 2^{-n-1}\varepsilon$. Действительно, предположим, что элементы найдены для некоторого n и всех меньших. Применяя предыдущую лемму к $s = -\sum_{k=0}^n \pi(a_k) + t$, тому же подпространству L и $2^{-n-2}\varepsilon$, находим такой элемент a_{n+1} , что $\|a_{n+1}\| \leq 2^{-n-1}\varepsilon$ и $\|(\sum_{k=1}^{n+1} \pi(a_k) - t)p_L\| < 2^{-n-2}\varepsilon$. Теперь положим $a = \sum_{k=0}^{\infty} a_k$. Тогда $a \in A$ и очевидно, что $\|a\| \leq \|t\| + \varepsilon$ и $a|_L = t|_L$. $\square$

Теорема 2.6. Всякое топологически неприводимое представление C^* -алгебры является алгебраически неприводимым.

Доказательство. Предположим противное. Пусть $V \subset H$ — незамкнутое инвариантное пространство, а $\bar{V}$ — его замыкание. Оно тоже является инвариантным подпространством (так как действие непрерывно), так что $\bar{V} = H$. Возьмем $\eta \in H \setminus V$, для определенности нормы 1. Пусть $\xi \in V$ — ненулевой вектор, а t — такой оператор в H , что $t\xi = \eta$. Тогда по предыдущей лемме найдется такой $a \in A$, что $\pi(a)\xi = \eta$. Противоречие с инвариантностью V . $\square$

2.2 Положительные линейные функционалы

Определение 2.7. Линейный функционал (пока не требуем непрерывности, см. лемму 2.10 ниже) φ на C^* -алгебре A называется *положительным*, если $\varphi(a) \geq 0$ для любого $a \geq 0$. Если положительный линейный функционал непрерывен и имеет норму 1, то он называется *состоянием*.

Пример 2.8. Если π — представление A в гильбертовом пространстве H , а $\xi \in H$, то функционал $\varphi(a) := (\xi, \pi(a)\xi)$ является положительным. Если у A имеется единица и $\|\xi\| = 1$, то такое φ является состоянием.

С каждым положительным линейным функционалом φ можно связать полуторалинейную форму на A , заданную формулой $\langle a, b \rangle := \varphi(a^*b)$, то есть форма $\langle \cdot, \cdot \rangle$ линейна по второму аргументу, сопряженно линейна по первому аргументу. По определению положительности функционала $\langle a, a \rangle = \varphi(a^*a) \geq 0$ для любого $a \in A$. Поэтому по следующей лемме она эрмитово симметрична: $\langle b, a \rangle = \overline{\langle a, b \rangle}$.

Лемма 2.9 (из курса линейной алгебры). *Если у полуторалинейной формы $\langle a, a \rangle \in \mathbb{R}$ для любого a , то она эрмитово симметрична.*

Доказательство. Запишем поляризационные тождества

$$\langle a + b, a + b \rangle = \langle a, a \rangle + \langle a, b \rangle + \langle b, a \rangle + \langle b, b \rangle, \quad (2.1)$$

$$\langle a + ib, a + ib \rangle = \langle a, a \rangle + \langle a, ib \rangle + \langle ib, a \rangle + \langle ib, ib \rangle = \langle a, a \rangle + i(\langle a, b \rangle - \langle b, a \rangle) + \langle b, b \rangle. \quad (2.2)$$

Из первого получаем, что $\langle a, b \rangle + \langle b, a \rangle$ является вещественным, а из второго — что $\langle a, b \rangle - \langle b, a \rangle$ является мнимым. Значит, $\overline{\langle a, b \rangle} = \langle b, a \rangle$. $\square$

Таким образом, $\langle a, b \rangle$ — положительная эрмитова форма и, значит, для нее выполняется неравенство Коши-(Шварца-Буняковского): $|\langle a, b \rangle|^2 \leq \langle a, a \rangle \langle b, b \rangle$, то есть $|\varphi(a^*b)|^2 \leq \varphi(a^*a)\varphi(b^*b)$.

Лемма 2.10. *Положительные линейные функционалы непрерывны. Если u_λ — аппроксимативная единица в A , то $\|\varphi\| = \lim_{\lambda \in \Lambda} \varphi(u_\lambda)$. В частности, если A имеет единицу, то $\|\varphi\| = \varphi(1)$.*

Доказательство. Рассмотрим сначала унитарный случай. Если $0 \leq a \leq 1$, то, поскольку φ положителен, получаем, что $0 \leq \varphi(a) \leq \varphi(1)$. Для $x \in A$ с $\|x\| \leq 1$ имеем $0 \leq x^*x \leq 1$, так что $|\varphi(x)|^2 = |\varphi(1 \cdot x)|^2 \leq \varphi(1) \cdot \varphi(x^*x) \leq \varphi(1)^2$ по неравенству Коши-Шварца-Буняковского. Значит, $\|\varphi\| \leq \varphi(1) \leq \|\varphi\|$.

Теперь рассмотрим неунитарный случай. Предположим, что φ не ограничен на единичном шаре A . Тогда он не ограничен на подмножестве единичного шара, состоящем из положительных элементов (поскольку любой элемент a разлагается в линейную комбинацию из четырех положительных элементов с нормами, не превосходящими $\|a\|$, см. (1.7)). Таким образом, для каждого $k \in \mathbb{N}$ существует такой положительный элемент $a_k \in A$, что $\|a_k\| \leq 1$ и $\varphi(a_k) > 2^k$. Положим $a := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{2^k} \in A$.

Тогда для любого $n \in \mathbb{N}$ имеем $a \geq \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{2^k}$ и

$$\varphi(a) \geq \varphi\left(\sum_{k=1}^n \frac{a_k}{2^k}\right) = \sum_{k=1}^n \frac{\varphi(a_k)}{2^k} > n,$$

что невозможно. Таким образом, φ ограничен и в неунитальном случае.

Положим $m := \lim_{\lambda \in \Lambda} \varphi(u_\lambda)$, причем предел существует, поскольку направленность является возрастающей и ограниченной $\|\varphi\|$ сверху. Тогда, для любого $x \in A$ с $\|x\| \leq 1$ имеем $|\varphi(x)| = \lim_{\lambda \in \Lambda} |\varphi(u_\lambda x)|$ в силу непрерывности φ . Поэтому, по неравенству Коши-Шварца-Буняковского имеем

$$|\varphi(x)|^2 = \lim_{\lambda \in \Lambda} |\varphi(u_\lambda x)|^2 \leq \sup_{\lambda} \varphi(u_\lambda^2) \varphi(x^* x) \leq \sup_{\lambda} \varphi(u_\lambda) \varphi(x^* x) \leq m \|\varphi\|.$$

Для любого $\varepsilon > 0$ выберем такой элемент $x \in A$, что $\|\varphi\|^2 < |\varphi(x)|^2 + \varepsilon$. Тогда $\|\varphi\|^2 < m \|\varphi\| + \varepsilon$. Следовательно, $\|\varphi\|^2 \leq m \|\varphi\|$ и $\|\varphi\| \leq m$. Поскольку для любого $\varepsilon > 0$ имеется u_{λ_0} , для которого $\varphi(u_{\lambda_0}) > m - \varepsilon$, то приходим к равенству $\|\varphi\| = m$. $\square$

Следствие 2.11. Если φ — состояние на C^* -алгебре с единицей, то $\varphi(1) = 1$.

Доказательство. По предыдущей лемме, $1 = \|\varphi\| = \varphi(1)$. $\square$