

Лекция 8

2.3 ГНС-конструкция (Гельфанд–Наймарк–Сегал)

Определение 2.12. Вектор $\xi \in H$ называется *циклическим* для $\pi : A \rightarrow \mathbb{B}(H)$, если $\pi(A)\xi$ плотно в H .

Теорема 2.13. Пусть φ — положительный линейный функционал на C^* -алгебре A . Тогда найдутся такие представление π_φ алгебры A в гильбертовом пространстве H и циклический вектор $\xi_\varphi \in H$, что $\|\xi_\varphi\|^2 = \|\varphi\|$ и $(\xi_\varphi, \pi_\varphi(a)\xi_\varphi) = \varphi(a)$ для всех $a \in A$.

Доказательство. Пусть $N := \{a \in A : \varphi(a^*a) = 0\}$. Тогда $N = \{a \in A : \varphi(b^*a) = 0 \text{ для всех } b \in A\}$ по неравенству Коши–Шварца–Буняковского. Поэтому N замкнуто как пересечение ядер непрерывных функционалов $a \mapsto \varphi(b^*a)$. Кроме того, N — левый идеал, поскольку $\varphi(b^*an) = \varphi((a^*b)^*n) = 0$ для любых $a, b \in A$ при $n \in N$, так что $an \in N$.

Определим эрмитово скалярное произведение на банаховом фактор-пространстве A/N формулой $(\dot{a}, \dot{b}) = \varphi(a^*b)$, где через $\dot{a}$ обозначен класс смежности $a + N$. Это произведение корректно определено, поскольку, если $n_1, n_2 \in N$, то $\varphi((a + n_1)^*(b + n_2)) = \varphi(a^*b) + \varphi((a + n_1)^*n_2) + \overline{\varphi(b^*n_1)} = \varphi(a^*b)$. Также выполняется $(\dot{a}, \dot{a}) > 0$ при $\dot{a} \neq 0$. Пусть H — гильбертово пространство, полученное из A/N пополнением по норме, заданной этим скалярным произведением. Обозначим через π_0 представление A в A/N (тут мы несколько расширяем понятие представления на предгильбертово пространство) по формуле $\pi_0(a)\dot{x} = (ax)^\cdot$, где $\dot{x} \in A/N$. Если $n \in N$, то $(a(x + n))^\cdot = (ax)^\cdot$, так что π_0 корректно определено. Оно является инволютивным, поскольку $(\pi_0(a)\dot{x}, \dot{y}) = \varphi((ax)^*y) = \varphi(x^*(a^*y)) = (\dot{x}, \pi_0(a^*)\dot{y}) = (\pi_0(a^*)^*\dot{x}, \dot{y})$ и $\pi_0(a^*)^* = \pi_0(a)$. При этом $\|\pi_0\| \leq 1$. Действительно,

$$\begin{aligned} \|\pi_0(a)\|^2 &= \sup_{\|\dot{x}\| \leq 1} \|\pi_0(a)\dot{x}\|^2 = \sup_{\|\dot{x}\| \leq 1} \varphi(x^*a^*ax) \leq \\ &\leq \sup_{\|\dot{x}\| \leq 1} \|a^*a\| \varphi(x^*x) \leq \|a\|^2. \end{aligned}$$

Поэтому π_0 продолжается по непрерывности до представления π_φ алгебры A в H .

Если алгебра A унитарна, то положим $\xi_\varphi := \dot{1}$. Тогда $(\xi_\varphi, \pi_\varphi(a)\xi_\varphi) = \varphi(a)$ и ξ_φ является циклическим, поскольку $\pi_\varphi(A)\xi_\varphi = A/N$ плотно в H . Наконец, $\|\varphi\| = \varphi(1) = \|\xi_\varphi\|^2$.

Для алгебры A общего вида рассмотрим ее аппроксимативную единицу u_λ . Покажем, что $\dot{u}_\lambda$ является направленностью Коши. Выберем $\varepsilon > 0$. Тогда найдется такой индекс $\alpha \in \Lambda$, что $\varphi(u_\alpha) > \|\varphi\| - \varepsilon$ (поскольку $\|\varphi\| = \lim_{\lambda \in \Lambda} \varphi(u_\lambda)$ по лемме 2.10). Теперь найдем такой индекс $\beta \in \Lambda$, что $\beta \geq \alpha$ и $\|u_\lambda u_\alpha - u_\alpha\| < \varepsilon$ для любого $\lambda \geq \beta$. Тогда

$$\operatorname{Re}(\varphi(u_\lambda u_\alpha)) = \varphi(u_\alpha) + \operatorname{Re}(\varphi(u_\lambda u_\alpha - u_\alpha)) > \|\varphi\| - 2\varepsilon.$$

Поэтому

$$\begin{aligned}\|\dot{u}_\lambda - \dot{u}_\alpha\|^2 &= \varphi((u_\lambda - u_\alpha)^2) = \varphi(u_\lambda^2) + \varphi(u_\alpha^2) - 2\operatorname{Re}(\varphi(u_\lambda u_\alpha)) \leq \\ &\leq \varphi(u_\lambda^2) + \varphi(u_\alpha^2) - 2(\|\varphi\| - 2\varepsilon) \leq 4\varepsilon.\end{aligned}$$

Значит, при $\lambda, \mu \geq \beta$, имеем

$$\|\dot{u}_\lambda - \dot{u}_\mu\| \leq \|\dot{u}_\lambda - \dot{u}_\alpha\| + \|\dot{u}_\alpha - \dot{u}_\mu\| \leq 4\varepsilon^{1/2}.$$

Таким образом, $\dot{u}_\lambda$ — направленность Коши. Пусть $\xi_\varphi := \lim_{\lambda \in \Lambda} \dot{u}_\lambda \in H$. Тогда $(\xi_\varphi, \pi_\varphi(a)\xi_\varphi) = \lim_{\lambda \in \Lambda} \varphi(u_\lambda a u_\lambda) = \varphi(a)$. Поскольку $\pi_\varphi(A)\xi_\varphi = A/N$, то ξ_φ — циклический. Из $\dot{a} = \pi_\varphi(a)\xi_\varphi$ следует, что

$$\lim_{\lambda \in \Lambda} \pi_\varphi(u_\lambda)\dot{a} = \lim_{\lambda \in \Lambda} \pi_\varphi(u_\lambda)\pi_\varphi(a)\xi_\varphi = \pi_\varphi(a)\xi_\varphi = \dot{a}$$

для любого $\dot{a} \in A/N$, так что направленность $\pi_\varphi(u_\lambda)$ сильно сходится к 1. Поэтому $\|\varphi\| = \lim_{\lambda \in \Lambda} \varphi(u_\lambda) = \lim_{\lambda \in \Lambda} (\xi_\varphi, \pi_\varphi(u_\lambda)\xi_\varphi) = \|\xi_\varphi\|^2$. $\square$

2.4 Реализация C^* -алгебр как операторных алгебр в гильбертовом пространстве

Следствие 2.14. Любое состояние φ на C^* -алгебре A без единицы допускает единственное продолжение до состояния на A^+ .

Доказательство. Пусть π_φ — представление A , заданное ГНС-конструкцией. Положим $\pi_\varphi(1) = 1$. Тогда π_φ продолжается до представления A^+ и $\tilde{\varphi}(a) := (\xi_\varphi, \pi(a)\xi_\varphi)$ является состоянием. Оно единственно, поскольку должно выполняться $\tilde{\varphi}(1) = 1$ (следствие 2.11). $\square$

Задача 46. Пусть u_λ , $\lambda \in \Lambda$, — некоторая аппроксимативная единица в унитарной алгебре. Доказать, что $1 = \lim_{\lambda \in \Lambda} u_\lambda$.

Лемма 2.15. Пусть $\varphi : A \rightarrow \mathbb{C}$ — такой непрерывный линейный функционал, что $\|\varphi\| = 1 = \lim_{\lambda \in \Lambda} \varphi(u_\lambda)$ для некоторой аппроксимативной единицы u_λ . Тогда φ — состояние.

Доказательство. Сначала сведем доказательство к унитарному случаю. Пусть $\tilde{\varphi}$ — некоторое продолжение (по теореме Хана–Банаха) функционала φ до непрерывного функционала на A^+ . Пусть $\tilde{\varphi}(1) =: \alpha$. Поскольку $\|\tilde{\varphi}\| = 1$, то $|\alpha| \leq 1$. Из неравенства $\|2u_\lambda - 1\| \leq 1$ следует, что $|2 - \alpha| = \lim_{\lambda \in \Lambda} |\varphi(2u_\lambda - 1)| \leq 1$. Таким образом, $\alpha = 1$. Значит, можем считать, что A унитарна и $\varphi(1) = 1$ (если A с самого начала была унитарной, то пользуемся задачей 46).

Покажем теперь, что $\varphi(a) \in \mathbb{R}$, если $a = a^*$ (а значит, содержится в $[-\|a\|, \|a\|]$). Пусть a — самосопряженный элемент нормы 1. Тогда $\|a \pm in1\|^2 = \|a^2 + n^2 1\| = n^2 + 1$, так что $|\varphi(a) \pm in| \leq \sqrt{n^2 + 1}$ для любого $n \in \mathbb{N}$. Значит, $\varphi(a)$ содержится

в пересечении всех дисков с центрами в $\pm in$ и радиусов $\sqrt{n^2 + 1}$. Это пересечение равно вещественному интервалу $[-1, 1]$.

Если $0 \leq a \leq 1$, то $\|2a - 1\| \leq 1$. Применяя предыдущее рассуждение к самосопряженному элементу $2a - 1$, получаем, что $-1 \leq 2\varphi(a) - 1 \leq 1$, так что $\varphi(a) \geq 0$ и φ является положительным. $\square$

Лемма 2.16. Пусть $a \in A$ — самосопряженный элемент. Тогда имеется такое состояние φ на A , что $|\varphi(a)| = \|a\|$.

Доказательство. Если A без единицы, то будем работать в A^+ . Рассмотрим коммутативную C^* -алгебру $C^*(a)$. Тогда найдется такой мультипликативный линейный функционал φ_0 на $C^*(a)$, что $|\varphi_0(a)| = \|a\|$ (надо взять в качестве φ_0 отображение взятия значения в той точке $\text{Sp}(a)$, где функция $\hat{a}$ достигает своего максимума). Тогда $\varphi_0(1) = 1 = \|\varphi_0\|$. Рассмотрим продолжение φ_0 по теореме Хана-Банаха до функционала φ на A^+ . Тогда, поскольку $\|\varphi\| = 1 = \varphi(1)$, то φ — состояние по лемме 2.15. $\square$

Следствие 2.17. Для любого $a \in A$ существуют такие представление π и единичный вектор ξ в пространстве представления, что $\|\pi(a)\xi\| = \|a\|$.

Доказательство. По предыдущей лемме, найдем такое состояние φ , что $\varphi(a^*a) = \|a\|^2$. Пусть $\pi = \pi_\varphi$ и $\xi = \xi_\varphi$ получены для φ по ГНС-конструкции. Тогда

$$\|\pi(a)\xi\|^2 = (\xi, \pi(a^*a)\xi) = \varphi(a^*a) = \|a\|^2.$$

$\square$

Теорема 2.18 (Гельфанда-Наймарка). Любая C^* -алгебра изометрически $*$ -изоморфна C^* -подалгебре $\mathbb{B}(H)$ для некоторого гильбертова пространства H . Если A сепарабельна, то и H может быть выбрано сепарабельным.

Доказательство. Положим $\pi = \bigoplus_\varphi \pi_\varphi$, где прямая сумма берется по всем состояниям A . Точнее, рассматривается гильбертова прямая сумма $H := \bigoplus_\varphi H_\varphi$ (пополнение по ℓ_2 норме пространства финитных отображений $\varphi \mapsto h_\varphi \in H_\varphi$, то есть наборов $h = \{h_\varphi\}$, $h_\varphi \in H_\varphi$, причем лишь конечное число h_φ отлично от нуля, а норма определяется как $\|h\|^2 = \sum_\varphi \|h_\varphi\|^2$) с диагональным действием $\pi(a)(\{h_\varphi\}) = \{\pi_\varphi(a)(h_\varphi)\}$. Тогда, как видно из доказательства предыдущего следствия, $\|\pi(a)\| = \sup_\varphi \|\pi_\varphi(a)\| = \|a\|$. Если же A сепарабельна, то достаточно брать сумму по счетному набору φ_n , где $\|\pi_{\varphi_n}(a_n)\| = \|a_n\|$, для элементов a_n , образующих плотное подмножество в A . Тогда $\pi = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \pi_{\varphi_n}$, а соответствующее гильбертово пространство сепарабельно, поскольку каждое H_{φ_n} сепарабельно (как пополнение фактора сепарабельного пространства). $\square$

Определение 2.19. Построенное в теореме (в первой ее части) представление называется *универсальным представлением* A . Алгебра фон Неймана $\pi(A)''$, где π — универсальное представление, содержит $\pi(A) \cong A$ в качестве слабо плотного подмножества и называется *обертывающей алгеброй фон Неймана* для A .

Отметим, что универсальное представление является прямой суммой циклических. Получаем следующее утверждение.

Следствие 2.20. Пусть π — точное представление C^* -алгебры A . Тогда существуют такие циклические представления π_λ , $\lambda \in \Lambda$, что $\|\pi(a)\| = \sup_{\lambda \in \Lambda} \|\pi_\lambda(a)\|$ для любого $a \in A$.

2.5 Разложение Жордана

Лемма 2.21. Пусть φ — линейный функционал на A . Тогда $\varphi = \psi_1 + i\psi_2$, где ψ_1 и ψ_2 — самосопряженные.

Доказательство. Положим, как делали и для элементов алгебры,

$$\psi_1(a) = (\varphi(a) + \overline{\varphi(a^*)})/2 \quad \text{и} \quad \psi_2(a) = (\varphi(a) - \overline{\varphi(a^*)})/2i.$$

□

Обозначим через A_{sa} множество всех самосопряженных элементов A . Тогда, очевидно, что A_{sa} является вещественным банаховым пространством.

Задача 47. Имеется естественная биекция между самосопряженными линейными функционалами на A и (вещественными) линейными функционалами на A_{sa} .

Для доказательства теоремы о разложении Жордана нам понадобится следующее утверждение, представляющее самостоятельный интерес.

Теорема 2.22 (о продолжении положительных функционалов). Пусть $B \subset A$ — C^* -подалгебра, а $\varphi : B \rightarrow \mathbb{C}$ — положительный функционал. Тогда найдется такой положительный функционал $\varphi' : A \rightarrow \mathbb{C}$, что $\varphi'|_B = \varphi$ и $\|\varphi'\| = \|\varphi\|$.

Доказательство. Возможны следующие случаи:

- (а) обе алгебры имеют общую единицу,
- (б) A имеет единицу, а B — нет,
- (с) обе алгебры не имеют единицы,
- (д) B имеет единицу, а A — нет.
- (е) обе алгебры с 1, но $1_A \neq 1_B$.

В силу следствия 2.14, (с) и (б) сводятся присоединением единицы к (а) (для (б) нужно заметить, что $B^+ \cong B \oplus \mathbb{C}1_A$). В свою очередь, (д), очевидно, сводится к (е).

В случае (а) продолжим по теореме Хана-Банаха φ до некоторого $\varphi' : A \rightarrow \mathbb{C}$ той же нормы. Тогда по лемме 2.10, $\|\varphi'\| = \|\varphi\| = \varphi(1) = \varphi'(1)$ и φ' — положительный по лемме 2.15.

В случае (е) рассмотрим C^* -подалгебру $B_1 := B \oplus \mathbb{C}1_A = B \oplus \mathbb{C}(1_A - 1_B)$ и продолжим φ до $\varphi_1 : B_1 \rightarrow \mathbb{C}$, положив $\varphi_1(1_A - 1_B) = 0$. Тогда $\varphi_1(a) = \varphi(1_B \cdot a)$, где $a \in B_1$. Действительно, если $a \in B$, то $\varphi_1(a) = \varphi(1_B \cdot a) = \varphi(a)$, а если $a = 1_A - 1_B$, то $\varphi_1(a) = \varphi(1_B(1_A - 1_B)) = \varphi(0) = 0$. При этом единица B_1 — это 1_A . Кроме того, $\|\varphi_1\| \leq \|\varphi\| \cdot \|1_B\| = \|\varphi\|$, а $\varphi_1(1_A) = \varphi(1_B) = \|\varphi\|$. Значит, $\|\varphi_1\| = \|\varphi\| = \varphi_1(1_A) = \varphi_1(1_{B_1})$ и, по лемме 2.15, φ_1 — положительный. Таким образом, случай (е) тоже свелся к доказанному случаю (а). $\square$

Теорема Жордана о разложении меры в сумму положительной и отрицательной [6, гл. VI, §5, теорема 1] на языке функционалов (в смысле теоремы Рисса-Маркова-Какутани [9, гл. I, §6, теорема 4]) может быть записана так: для любого ограниченного вещественного линейного функционала $\tau : C(\Omega, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ имеются такие положительные линейные функционалы τ_+ и τ_- , что $\tau = \tau_+ - \tau_-$ и $\|\tau\| = \|\tau_+\| + \|\tau_-\|$, где Ω — компактное хаусдорфово пространство, а $C(\Omega, \mathbb{R})$ — вещественная алгебра всех непрерывных функций на Ω .

Теорема 2.23 (Разложение Жордана). *Пусть ψ — самосопряженный линейный функционал на A . Тогда $\psi = \varphi_+ - \varphi_-$, где φ_+ и φ_- — положительные линейные функционалы на A , причем $\|\psi\| = \|\varphi_+\| + \|\varphi_-\|$.*

Доказательство. Обозначим через K множество всех самосопряженных линейных функционалов нормы ≤ 1 , то есть $K \subset (A^*)_{sa}$. Тогда K — $*$ -слабо замкнутое подмножество единичного шара и, таким образом, $*$ -слабо компактно. Определим $\mathbb{R}$ -линейное отображение

$$\theta : A_{sa} \rightarrow C(K, \mathbb{R}), \quad \theta(a)(\tau) = \tau(a),$$

так что если $a \in A$, $a \geq 0$, то $\theta(a) \geq 0$ на K . В силу леммы 2.16 отображение θ является изометрией на образ.

Имеется естественная изометрия $\tau \mapsto \tau'$ вещественных пространств $(A^*)_{sa}$ и $(A_{sa})_{\mathbb{R}}^*$ (вещественные функционалы) (см. задачу 47). По теореме Хана-Банаха найдется такой функционал $\rho \in (C(K, \mathbb{R}))_{\mathbb{R}}^*$, что $\rho \circ \theta = \psi'$ и $\|\rho\| = \|\psi'\|$ (продолжение функционала с замкнутого подпространства $\theta(A_{sa})$). Тогда по теореме Жордана для мер (как объяснено выше перед формулировкой) найдутся такие положительные функционалы ρ_+ и ρ_- , что $\rho = \rho_+ - \rho_-$ и $\|\rho\| = \|\rho_+\| + \|\rho_-\|$. Положим $\varphi'_+ := \rho_+ \circ \theta$ и $\varphi'_- := \rho_- \circ \theta$. Это функционалы из $(A_{sa})_{\mathbb{R}}^*$. Пусть φ_+ и φ_- соответствуют им при отождествлении с $(A^*)_{sa}$. Очевидно, что они удовлетворяют всем требованиям, кроме, быть может, условия на норму. Проверим его:

$$\|\psi\| = \|\psi'\| = \|\rho\| = \|\rho_+\| + \|\rho_-\| \geq \|\varphi'_+\| + \|\varphi'_-\| = \|\varphi_+\| + \|\varphi_-\| \geq \|\psi\|.$$

$\square$