Лекция 8

Лемма 2.16. *Пусть $a \in A$ — самосопряженный элемент. Тогда имеется такое состояние φ на A, что $|\varphi(a)| = \|a\|$.*

Доказательство. Если A без единицы, то будем работать в A^+. Рассмотрим коммутативную C^*-алгебру $C^*(a)$. Тогда найдется такой мультипликативный линейный функционал φ_0 на $C^*(a)$, что $|\varphi_0(a)| = \|a\|$ (надо взять в качестве φ_0 отображение взятия значения в той точке $\mathrm{Sp}(a)$, где функция $\hat{a}$ достигает своего максимума). Тогда $\varphi_0(1) = 1 = \|\varphi_0\|$. Рассмотрим продолжение φ_0 по теореме Хана-Банаха до функционала φ на A^+. Тогда, поскольку $\|\varphi\| = 1 = \varphi(1)$, то φ — состояние по лемме 2.15. □

Следствие 2.17. *Для любого $a \in A$ существуют такие представление π и единичный вектор ξ в пространстве представления, что $\|\pi(a)\xi\| = \|a\|$.*

Доказательство. По предыдущей лемме, найдем такое состояние φ, что $\varphi(a^*a) = \|a\|^2$. Пусть $\pi = \pi_\varphi$ и $\xi = \xi_\varphi$ получены для φ по ГНС-конструкции. Тогда $\|\pi(a)\xi\|^2 = (\xi, \pi(a^*a)\xi) = \varphi(a^*a) = \|a\|^2$. □

Теорема 2.18 (Гельфанда-Наймарка)**.** *Любая C^*-алгебра изометрически $*$-изоморфна C^*-подалгебре $\mathbb{B}(H)$ для некоторого гильбертова пространства H. Если A сепарабельна, то и H может быть выбрано сепарабельным.*

Доказательство. Положим $\pi = \oplus_\varphi \pi_\varphi$, где прямая сумма берется по всем состояниям A. Точнее, рассматривается гильбертова прямая сумма $H := \oplus_\varphi H_\varphi$ (пополнение по ℓ_2 норме пространства финитных отображений $\varphi \mapsto h_\varphi \in H_\varphi$, то есть наборов $h = \{h_\varphi\}$, $h_\varphi \in H_\varphi$, причем лишь конечное число h_φ отлично от нуля, а норма определяется как $\|h\|^2 = \sum_\varphi \|h_\varphi\|^2$) с диагональным действием $\pi(a)(\{h_\varphi\}) = \{\pi_\varphi(a)(h_\varphi)\}$. Тогда, как видно из доказательства предыдущего следствия, $\|\pi(a)\| = \sup_\varphi \|\pi_\varphi(a)\| = \|a\|$. Если же A сепарабельна, то достаточно брать сумму по счетному набору $\{\varphi_n\}$, где $\|\pi_{\varphi_n}(a_n)\| = \|a_n\|$, для элементов a_n, образующих плотное подмножество в A. Тогда $\pi = \oplus_{n\in\mathbb{N}} \pi_{\varphi_n}$, а соответствующее гильбертово пространство сепарабельно, поскольку каждое H_{φ_n} сепарабельно (как пополнение фактора сепарабельного пространства). □

Определение 2.19. Построенное в теореме (в первой ее части) представление называется *универсальным представлением* A. Алгебра фон Неймана $\pi(A)''$, где π — универсальное представление, содержит $\pi(A) \cong A$ в качестве плотного подмножества и называется *обертывающей алгеброй фон Неймана* для A.

2.5 Разложение Жордана

Лемма 2.20. *Пусть φ — линейный функционал на A. Тогда $\varphi = \psi_1 + i\psi_2$, где ψ_1 и ψ_2 — самосопряженные.*

Доказательство. Положим, как делали и для элементов алгебры, $\psi_1(a) = (\varphi(a) + \overline{\varphi(a^*)})/2$ и $\psi_2(a) = (\varphi(a) - \overline{\varphi(a^*)})/2i$. $\square$

Обозначим через A_{sa} множество всех самосопряженных элементов A. Тогда, очевидно, что A_{sa} является вещественным банаховым пространством.

Задача 46. Имеется естественная биекция между самосопряженными линейными функционалами на A и (вещественными) линейными функционалами на A_{sa}.

Для доказательства теоремы о разложении Жордана нам понадобится следующее утверждение, представляющее самостоятельный интерес.

Теорема 2.21 (о продолжении положительных функционалов)**.** *Пусть $B \subset A$ — C^*-подалгебра, а $\varphi : B \to \mathbb{C}$ — положительный функционал. Тогда найдется такой положительный функционал $\varphi' : A \to \mathbb{C}$, что $\varphi'|_B = \varphi$ и $\|\varphi'\| = \|\varphi\|$.*

Доказательство. Возможны следующие случаи:

a) обе алгебры имеют общую единицу,

b) A имеет единицу, а B — нет,

c) обе алгебры не имеют единицы,

d) B имеет единицу, а A — нет.

e) обе алгебры с 1, но $1_A \neq 1_B$.

В силу следствия 2.14, (c) и (b) сводятся присоединением единицы к (a) (для (b) нужно заметить, что $B^+ \cong B \oplus \mathbb{C}\, 1_A$). В свою очередь, (d), очевидно, сводится к (e).

В случае (a) продолжим по теореме Хана-Банаха φ до некоторого $\varphi' : A \to \mathbb{C}$ той же нормы. Тогда по лемме 2.10, $\|\varphi'\| = \|\varphi\| = \varphi(1) = \varphi'(1)$ и φ' — положительный по лемме 2.15.

В случае (e) рассмотрим C^*-подалгебру $B_1 := B \oplus \mathbb{C}\, 1_A = B \oplus \mathbb{C}\,(1_A - 1_B)$ и продолжим φ до $\varphi_1 : B_1 \to \mathbb{C}$, положив $\varphi_1(1_A - 1_B) = 0$. Тогда $\varphi_1(a) = \varphi(1_B \cdot a)$, где $a \in B_1$. Действительно, если $a \in B$, то $\varphi_1(a) = \varphi(1_B \cdot a) = \varphi(a)$, а если $a = 1_A - 1_B$, то $\varphi_1(a) = \varphi(1_B(1_A - 1_B)) = \varphi(0) = 0$. При этом единица B_1 — это 1_A. Кроме того, $\|\varphi_1\| \leqslant \|\varphi\| \cdot \|1_B\| = \|\varphi\|$, а $\varphi_1(1_A) = \varphi(1_B) = \|\varphi\|$. Значит, $\|\varphi_1\| = \|\varphi\| = \varphi_1(1_A) = \varphi_1(1_{B_1})$ и, по лемме 2.15, φ_1 — положительный. Таким образом, случай (e) тоже свелся к доказанному случаю (a). $\square$

Теорема Жордана о разложении меры в сумму положительной и отрицательной [4, гл. VI, §5, теорема 1] на языке функционалов (в смысле теоремы Рисса-Маркова-Какутани [9, гл. I, §6, теорема 4]) может быть записана так: для любого ограниченного вещественного линейного функционала $\tau : C(\Omega, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ имеются такие положительные линейные функционалы τ_+ и τ_-, что $\tau = \tau_+ - \tau_-$ и $\|\tau\| = \|\tau_+\| + \|\tau_-\|$, где Ω — компактное хаусдорфово пространство, а $C(\Omega, \mathbb{R})$ — вещественная алгебра всех непрерывных функций на Ω.